FONCTION EXPONENTIELLE : ACTIVITÉ D'INTRODUCTION

On cherche les fonctions f telles que $f'=f$. On note (E) cette équation.

I. Fonctions polynômes

Certaines fonctions déjà étudiées sont-elles solutions ? On pense aux fonctions polynômes.

Or, si une fonction polynôme de degré n ($n>0$) est solution de (E), alors sa fonction dérivée f' est de degré $n-1$. On ne peut donc pas avoir $f'=f$.

Si $n=0$: f est une fonction polynôme de degré 0, donc $f(x)=k$ où $k \in \mathbb{R}$.
On a alors : $f'(x)=0$, et donc f est solution de (E) si, et seulement si, $k=0$.
Autrement dit, la seule fonction polynôme de degré 0 qui est solution de (E) est la fonction nulle.

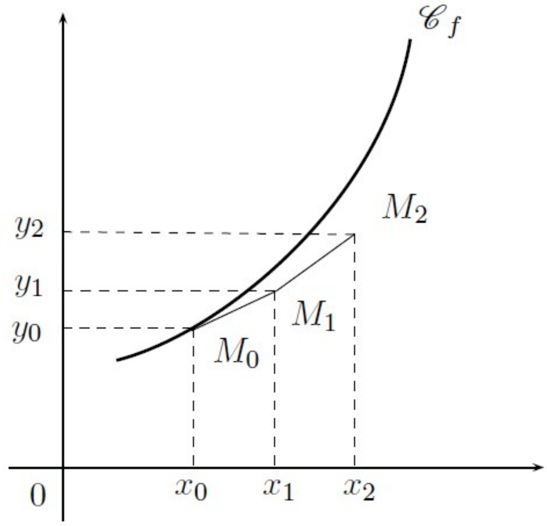
Conclusion : **hormis la fonction nulle, aucun polynôme n'est solution de (E).**

II. Unicité d'une solution

S'il existe une fonction f non nulle solution de (E), alors il est facile de montrer que toute fonction g_k définie par $g_k(x)=k\,f(x)$ ($k \in \mathbb{R}$) vérifie également (E).
Autrement dit, **s'il existe une solution non nulle, alors il existe une infinité de solutions**.

III. Approximation d'une solution par la méthode d'Euler

On suppose qu'il existe une solution de (E), que l'on note f, et qui vérifie $f(0)=1$.



On note $M_0(x_0\,;y_0)$ où $x_0=0$ et $y_0=f(x_0)=1$.
Donc : $M_0(0\,;1)$.

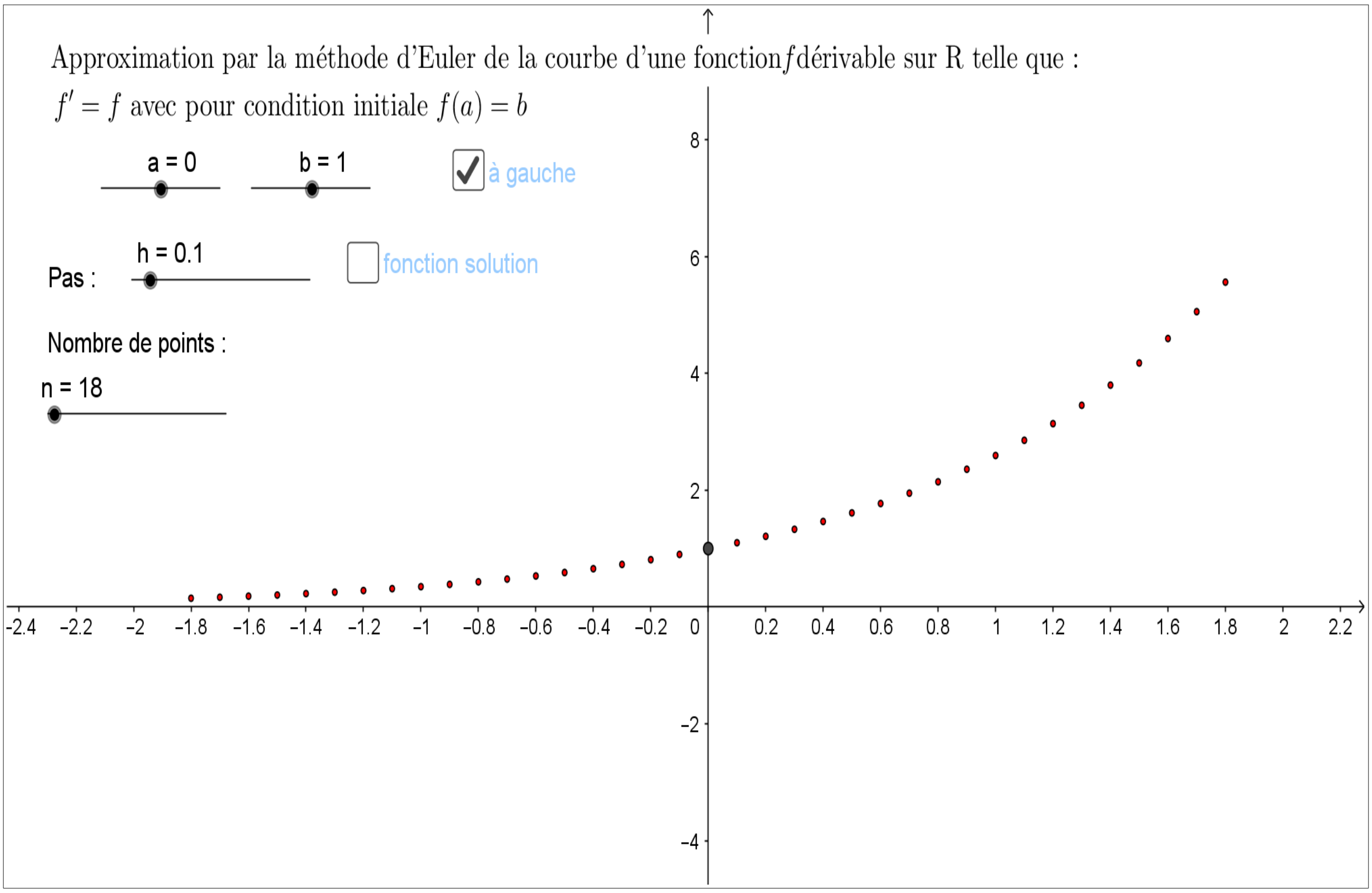
On choisit un pas $h\neq 0$ (proche de 0).

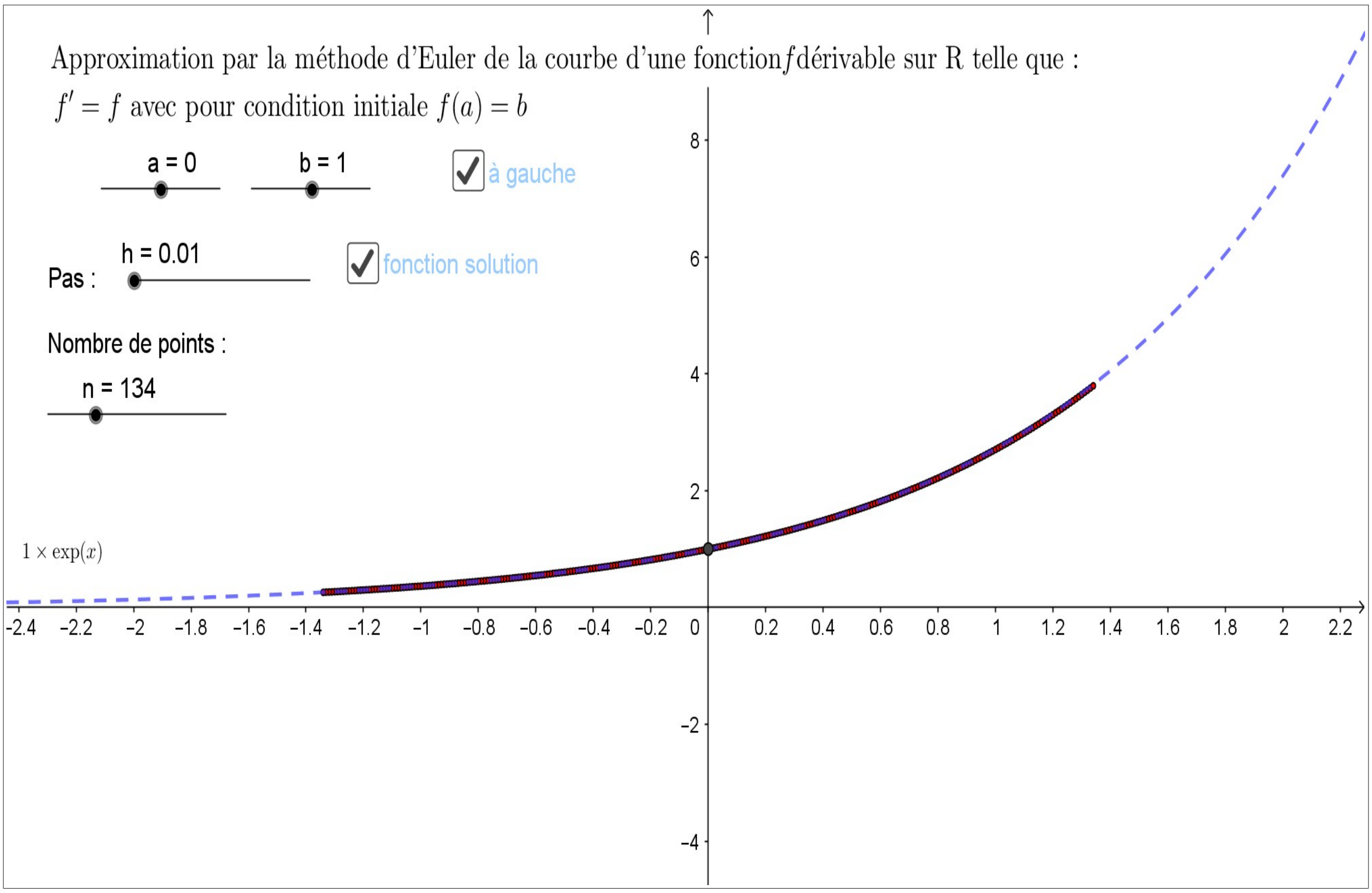
On pose : $x_1=x_0+h$.
L'équation de la tangente à C_f au point M_0 est :
$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ *ie* $y=f(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.
Donc on approche $f(x_1)$ par l'image de x_1 sur cette tangente :
$f(x_1)\approx f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_0)$. Or, $x_1-x_0=h$ et $f(x_0)=y_0$
donc : $f(x_1)\approx y_0h+y_0$ *ie* $f(x_1)\approx y_0(h+1)$.
On note donc : $y_1=y_0(h+1)$ et $M_1(x_1\,;y_1)$.

On recommence le procédé en posant $x_2=x_1+h$, et en approchant $f(x_2)$ par l'image de x_2 sur la tangente à C_f au point M_1.
On trouve alors : $f(x_2)\approx f(x_1)(x_2-x_1)+f(x_1)$ *ie* $f(x_2)\approx y_1(h+1)$ *ie* $f(x_2)\approx y_0(h+1)^2$.
Donc on pose : $y_2=y_0(h+1)^2$ et $M_2(x_2\,;y_2)$.

Ainsi de suite, on construit une suite de points M_n de coordonnées $(x_n\,;y_n)$ tels que $\boxed{x_n=x_0+nh}$ et $\boxed{y_n=y_0(h+1)^n}$. Ces points approchent la courbe C_f solution du problème posé.

Plus h est proche de 0, plus la ligne polygonale $M_0M_1M_2\ldots$ est proche de C_f.


Approximation par la méthode d'Euler de la courbe d'une fonction f dérivable sur R telle que :
$f' = f$ avec pour condition initiale $f(a) = b$
a = 0
b = 1
à gauche
Pas :
h = 0.1
fonction solution
Nombre de points :
n = 18


Approximation par la méthode d'Euler de la courbe d'une fonction f dérivable sur R telle que :
$f' = f$ avec pour condition initiale $f(a) = b$
a = 0
b = 1
à gauche
Pas :
h = 0.01
fonction solution
Nombre de points :
n = 134
$1 \times \exp(x)$