Club GeoGebra Iberoamericano

4

TRIGONOMETRÍA

TRIGONOMETRÍA

INTRODUCCIÓN

Comenzamos la publicación de un nuevo tema, dedicado en esta ocasión a la parte de la Matemática que estudia la medida de los ángulos y que sirve para resolver triángulos, es decir calcular elementos desconocidos a partir de elementos conocidos de éstos.

La estructura es similar al tema anterior con una propuesta de actividades que esperamos os ayuden para utilizar GeoGebra como recurso para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Recordemos que los Clubs de GeoGebra se realizan gracias a la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) a través de sus Instituto Iberoamericano de TIC y Educación (IBERTIC) e Instituto Iberoamericano de Enseñanza de la Ciencia y la Matemática (IBERCIENCIA).

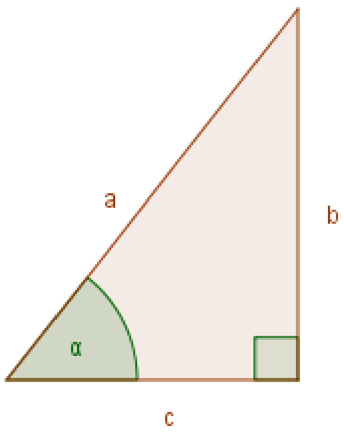
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UNA ÁNGULO AGUDO (0º A 90º)

Utilizaremos el siguiente triángulo rectángulo para definir las razones trigonométricas: seno (sen), coseno (cos), tangente (tg), cotangente (cotg), secante (sec) y cosecante (cosec).

$$\text{sen } \alpha = \frac{cateto \ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{cateto \ contiguo}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{cateto \ opuesto}{cateto \ contiguo} = \frac{b}{c}$$



$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \qquad \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} \qquad \text{cotg } \alpha = \frac{1}{tg \alpha}$$

En lo que sigue utilizaremos solamente las tres primeras razones definidas.

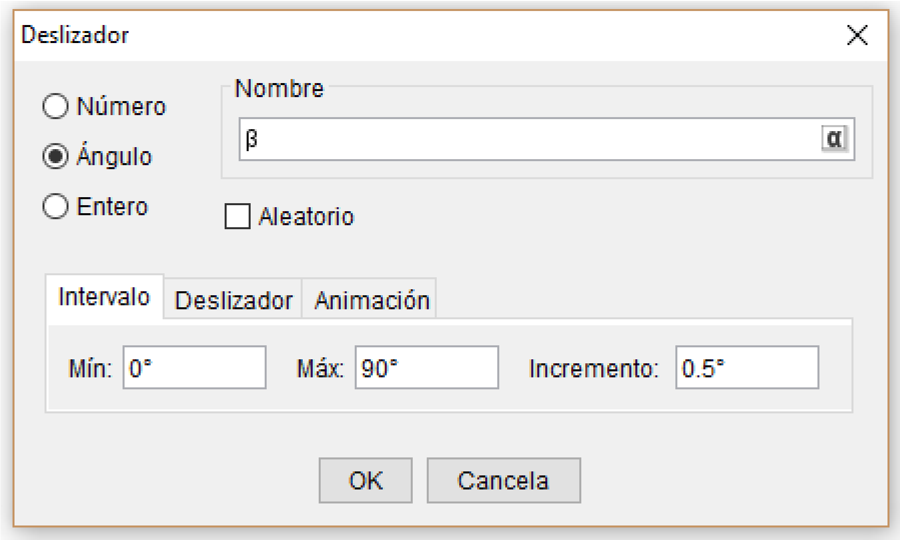
Las razones trigonométricas de un ángulo no dependen de la medida de los lados del triángulo rectángulo. Para comprobarlo vamos a realizar con GeoGebra una sencilla construcción pero útil y potente para aplicar didácticamente en el aula. Además nos servirá más adelante para calcular las razones trigonométricas de cualquier ángulo agudo.

La construcción sigue estos sencillos pasos del Protocolo de Construcción.

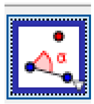
nº	Nombre	Descripción	Valor	Rótulo
1	Punto A	Punto sobre EjeX	A = (10, 0)	
2	Ángulo β		β = 30°	
3	Punto B		B = (0, 0)	
4	Punto A'	A rotado por el ángulo β	A' = (8.66, 5)	
5	Ángulo α	Ángulo entre A, B, A'	α = 30°	
6	Semirrecta f	Semirrecta que pasa por B, A'	f: -5x + 8.66y = 0	
7	Recta g	Recta que pasa por A perpendicular a EjeX	g: x = 10	
8	Punto C	Punto de intersección de f, g	C = (10, 5.77)	
9	Triángulo p...	Polígono C, B, A	polígono1 = 28.87	
9	Segmento a	Segmento [C, B] de Triángulo polígono1	a = 11.55	a: hipotenusa
9	Segmento c	Segmento [B, A] de Triángulo polígono1	c = 10	c: cateto contiguo
9	Segmento b	Segmento [A, C] de Triángulo polígono1	b = 5.77	b: cateto opuesto
10	Texto texto1	"sen \, α=\frac{cateto\, opuesto}{hipotenusa}=	"sen \, α=\frac{cateto\, ...	
11	Texto texto2	"cos \, α=\frac{cateto\, contiguo}{hipotenusa}=	"cos \, α=\frac{cateto\, ...	
12	Texto texto3	"tg \, α=\frac{cateto\, opuesto}{cateto\,	"tg \, α=\frac{cateto\,op...	

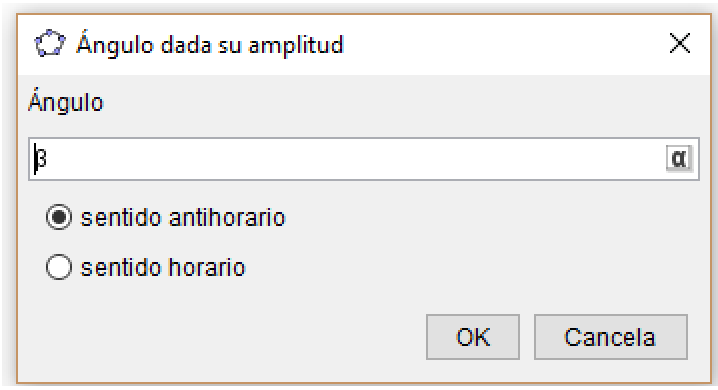
Vamos a explicar brevemente los pasos:

1. Fijamos un punto sobre el eje X. Por ejemplo A=(10,0). Será un vértice del triángulo rectángulo.
2. Creamos un deslizador con estas caracterísiticas:



3. Fijamos el origen de coordenadas y lo llamamos B=(0,0). Será el segundo vértice del triángulo rectángulo.

4. Usamos la herramienta "Ángulo dada su amplitud"  y pulsamos primero sobre el punto A y luego en B. Aparecerá la ventana para introducir el ángulo. Escribiremos β.



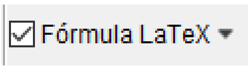
5. El paso anterior nos crea el punto A' y el ángulo α

6. Trazamos una semirrecta que una B y A'. Ahí irá la hipotenusa.

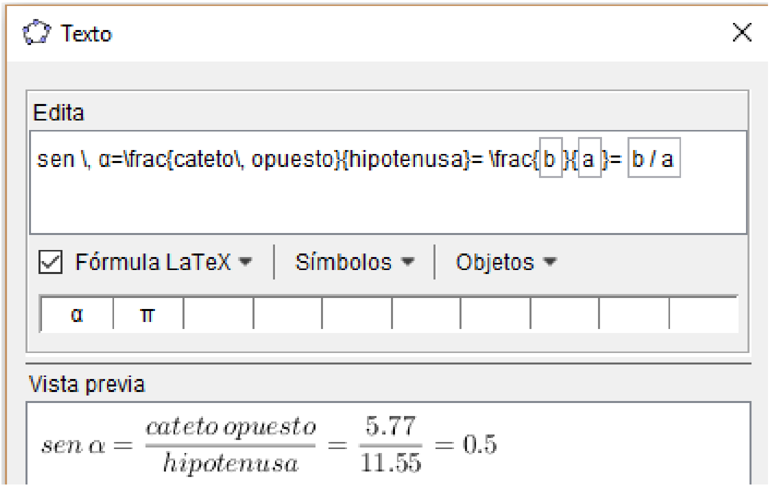
7. Trazamos una perpendicular al eje x por A. Ahí irá el cateto opuesto.

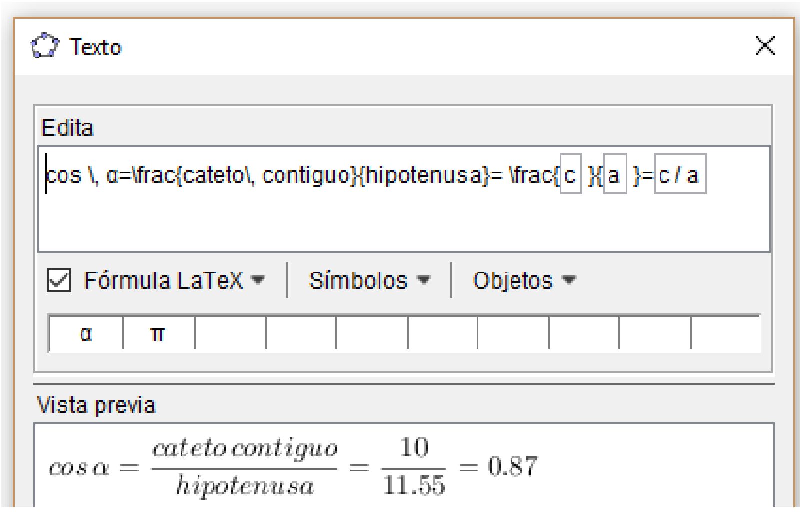
8. Hallamos el punto C intersección de las dos rectas anteriores. Será el tercer vértice del triángulo.

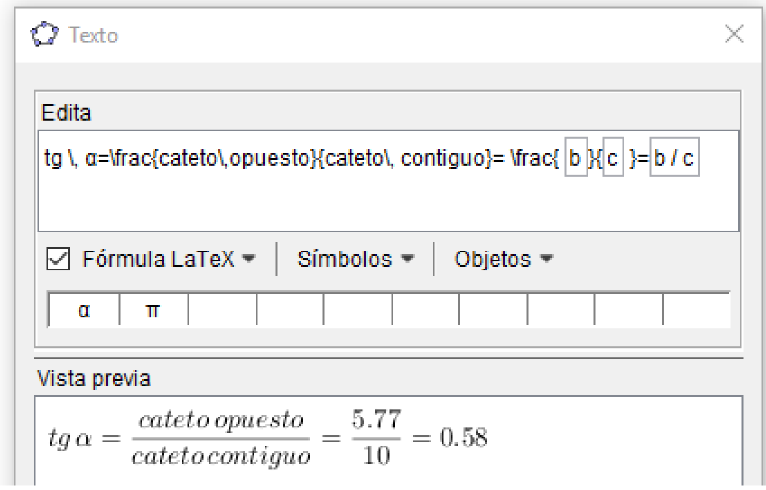
9. Dibujamos el triángulo CBA. Se dibujarán los tres lados del triángulo; los renombramos y ponemos los rótulos que aparecen en el Protocolo anterior.

10. 11. 12. Escribimos los textos en LaTex (editor científico). Desplegando la flecha en 

aparecerán conjuntos de símbolos y comandos que contienen más opciones de escritura.

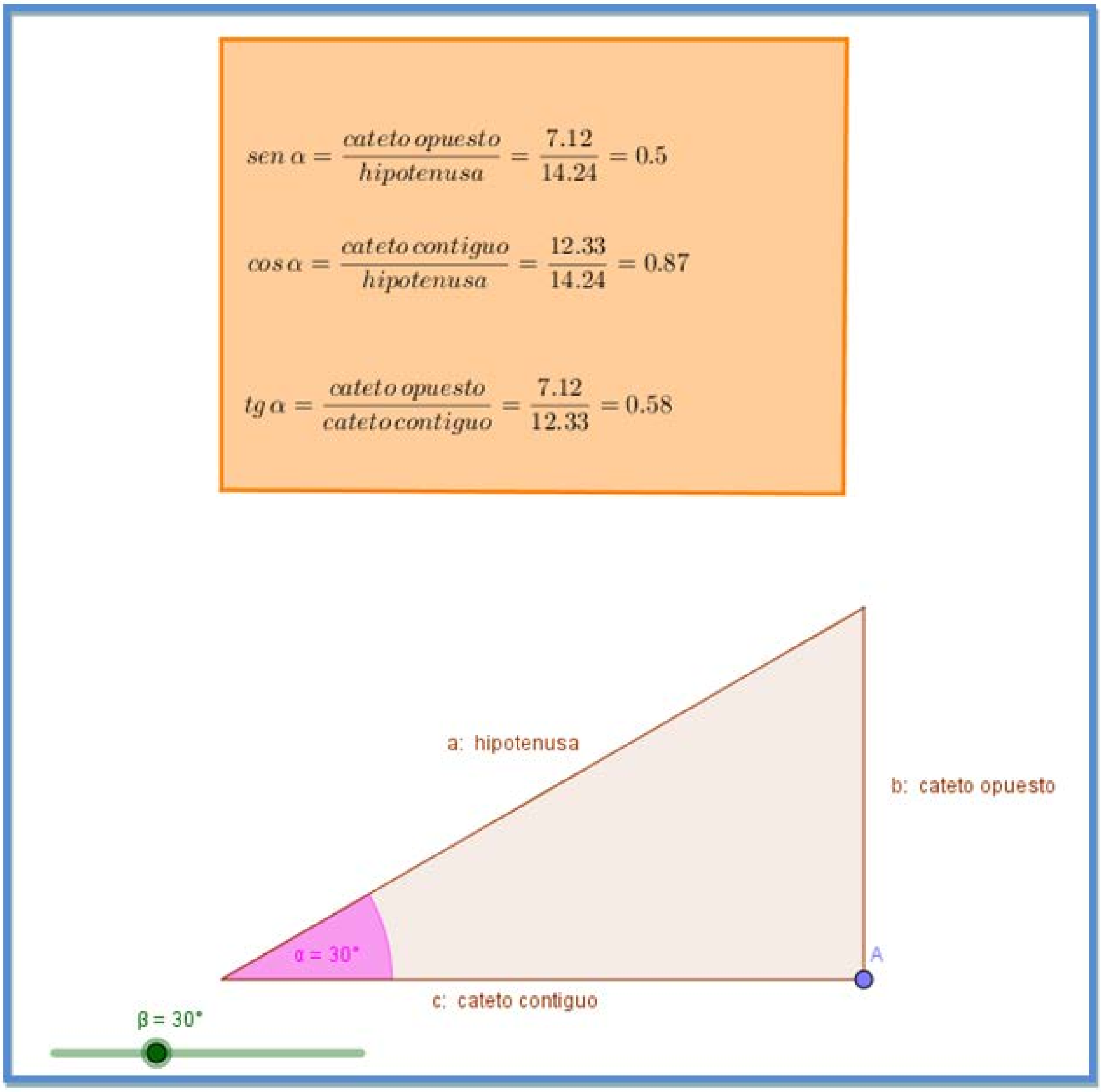




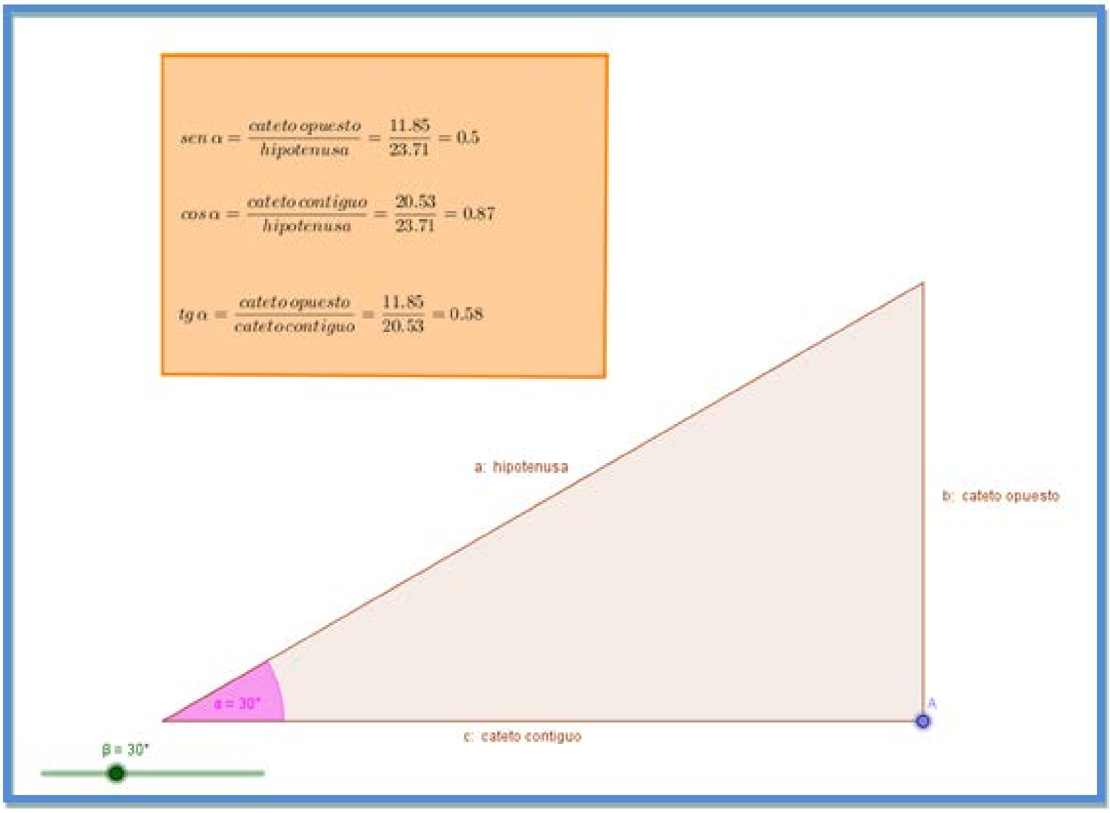


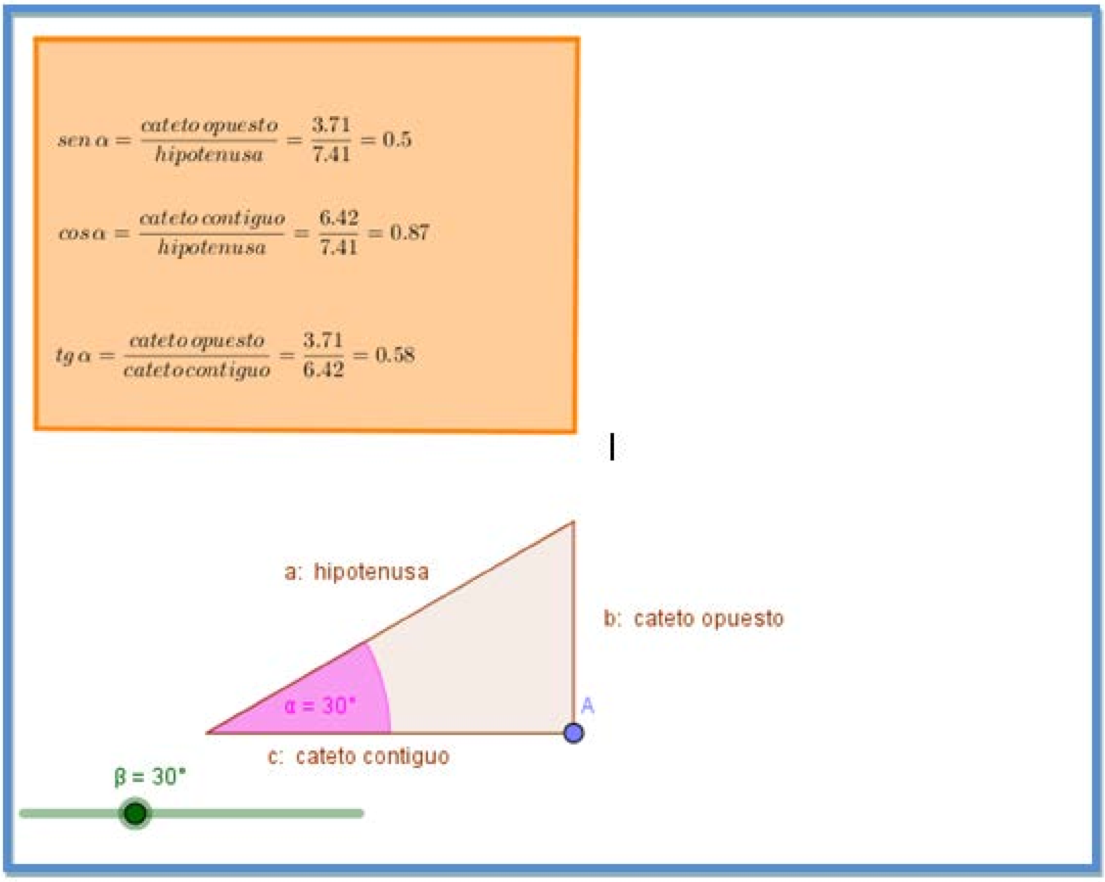
Ya sólo queda ocultar: A’, B, f, g, los ejes, la cuadrícula y recuadrar con un rectángulo coloreado los textos.

Debería quedar algo como lo que sigue:



Ahora movemos el punto A para ver que las razones trigonométricas de un ángulo no dependen de la medida de los lados del triángulo rectángulo.

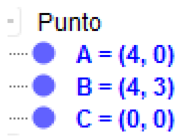

$sen\,\alpha = \frac{cateto\,opuesto}{hipotenusa} = \frac{11.85}{23.71} = 0.5$
$cos\,\alpha = \frac{cateto\,contiguo}{hipotenusa} = \frac{20.53}{23.71} = 0.87$
$tg\,\alpha = \frac{cateto\,opuesto}{cateto\,contiguo} = \frac{11.85}{20.53} = 0.58$
a: hipotenusa
b: cateto opuesto
α = 30°
A
c: cateto contiguo
β = 30°


$sen\,\alpha = \frac{cateto\,opuesto}{hipotenusa} = \frac{3.71}{7.41} = 0.5$
$cos\,\alpha = \frac{cateto\,contiguo}{hipotenusa} = \frac{6.42}{7.41} = 0.87$
$tg\,\alpha = \frac{cateto\,opuesto}{cateto\,contiguo} = \frac{3.71}{6.42} = 0.58$
a: hipotenusa
b: cateto opuesto
α = 30°
A
c: cateto contiguo
β = 30°

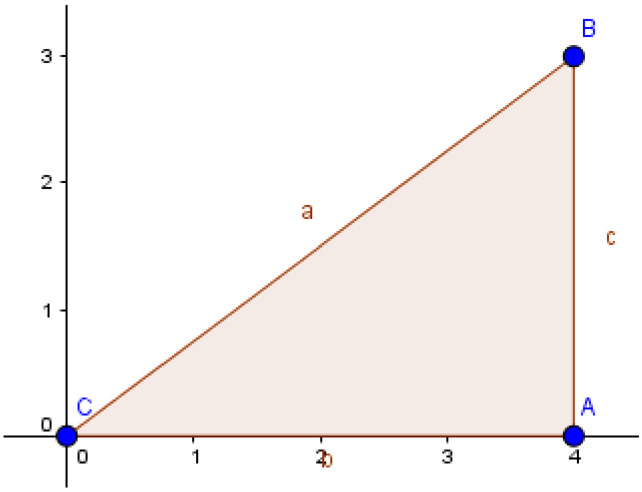
Actividad 1

En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 5 cm y los catetos 3 cm y 4 cm. Calcula las razones trigonométricas del ángulo que forma la hipotenusa con el mayor de los catetos.

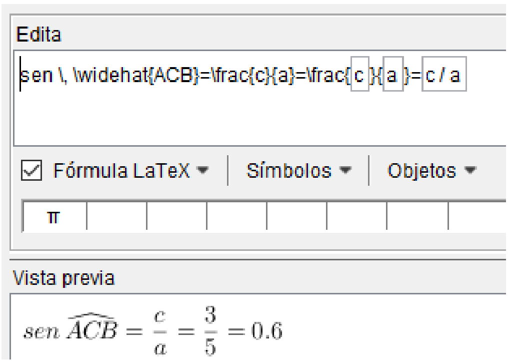
En GeoGebra dibujamos y fijamos (*botón derecho -> Propiedades -> Fijar el objeto*) los puntos

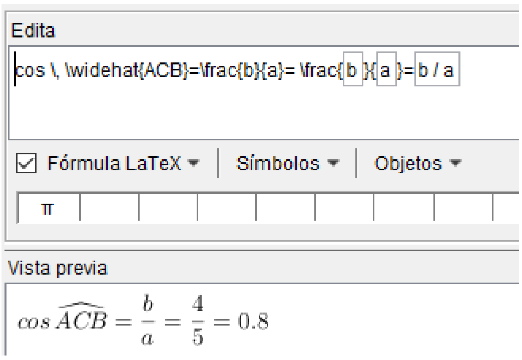


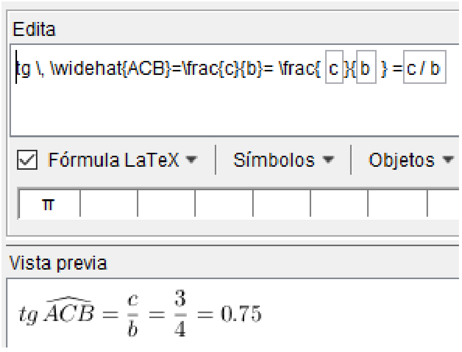
y el triángulo ABC.



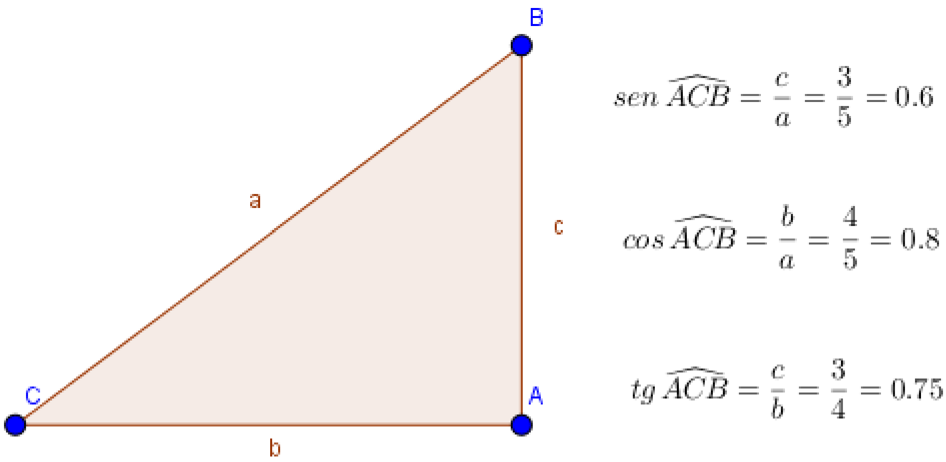
Ahora basta calcular, mediante la herramienta texto, lo siguiente:







El resultado final es:

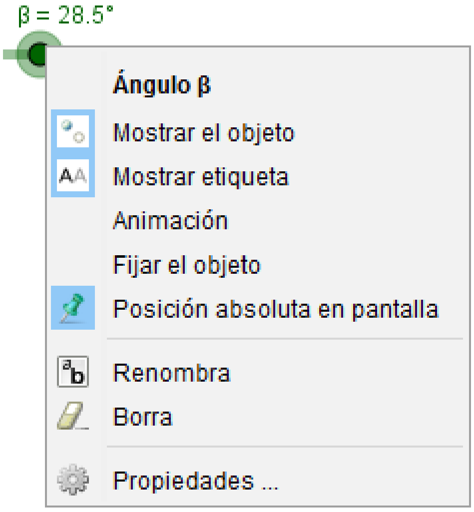


CÁLCULO DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

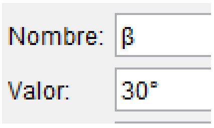
Actividad 2

Halla las razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60°.

En la construcción que hemos realizado al principio, pulsamos con el botón derecho sobre el deslizador β.



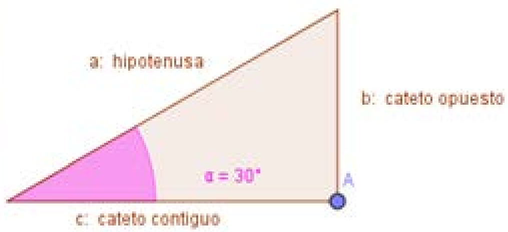
En Propiedades -> Básico, fijamos el valor del ángulo



$$sen\,\alpha = \frac{cateto\,opuesto}{hipotenusa} = \frac{8.38}{16.77} = 0.5 = \frac{1}{2}$$

$$cos\,\alpha = \frac{cateto\,contiguo}{hipotenusa} = \frac{14.52}{16.77} = 0.87 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{cateto\,opuesto}{cateto\,contiguo} = \frac{8.38}{14.52} = 0.58 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

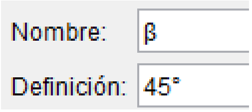


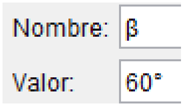
Geogebra dispone del comando **TextoIrracional[<Número>** con el que hemos obtenido los resultados finales anteriores, por ejemplo:

cos \, α=\frac{cateto\, contiguo}{hipotenusa}= \frac{c }{a }=c / a =TextoIrracional[c / a]

$$cos\,\alpha = \frac{cateto\,contiguo}{hipotenusa} = \frac{14.52}{16.77} = 0.87 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Variando los datos:

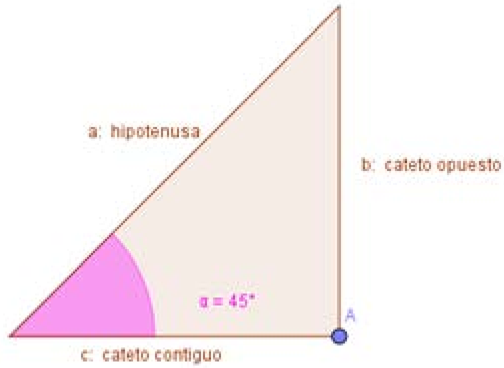




$$sen\,\alpha = \frac{cateto\,opuesto}{hipotenusa} = \frac{8.57}{12.12} = 0.71 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\,\alpha = \frac{cateto\,contiguo}{hipotenusa} = \frac{8.57}{12.12} = 0.71 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

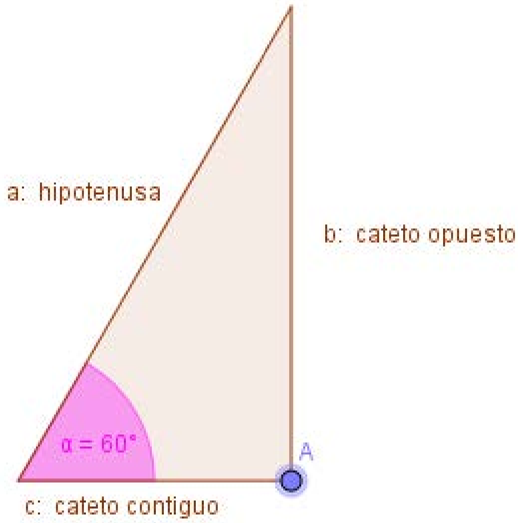
$$tg\,\alpha = \frac{cateto\,opuesto}{cateto\,contiguo} = \frac{8.57}{8.57} = 1$$



$$sen\,\alpha = \frac{cateto\,opuesto}{hipotenusa} = \frac{8.92}{10.3} = 0.87 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

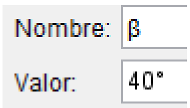
$$cos\,\alpha = \frac{cateto\,contiguo}{hipotenusa} = \frac{5.15}{10.3} = 0.5 = \frac{1}{2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{cateto\,opuesto}{cateto\,contiguo} = \frac{8.92}{5.15} = 1.73 = \sqrt{3}$$



Actividad 3

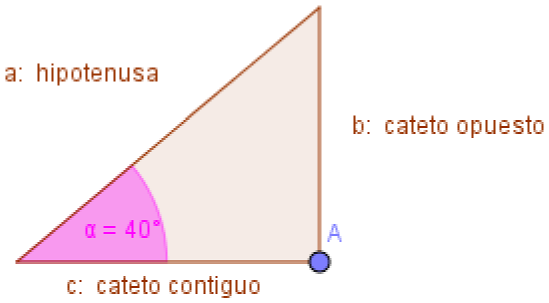
Razones trigonométricas de otros ángulos. Halla las razones trigonométricas de un ángulo de 40^{o}.

Procedimiento 1. Podemos hacer lo mismo que en la actividad 2.  y observar la construcción resultante:

$$sen\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{5.33}{8.3} = 0.64$$

$$cos\,\alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{6.36}{8.3} = 0.77$$

$$tg\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{5.33}{6.36} = 0.84$$



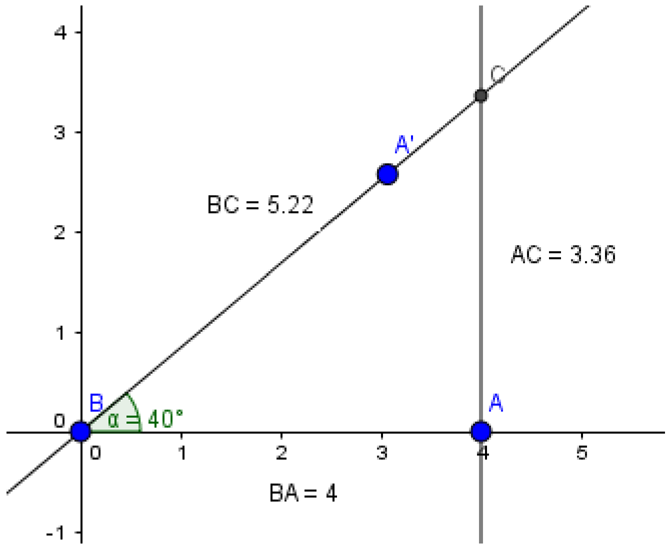
Procedimiento 2. Se dibuja, desde el principio, en una ventana nueva, un triángulo rectángulo de manera que uno de sus ángulos agudos sea 40°.

Sugerencia: seguir este protocolo (en el que se ha fijado el punto A).

Protocolo de Construcción

nº	Nombre	Descripción	Valor	R
1	Punto A		A = (4, 0)	
2	Punto B		B = (0, 0)	
3	Punto A'	A rotado por el ángulo 40°	A' = (3.06, 2.57)	
4	Ángulo α	Ángulo entre A, B, A'	α = 40°	
5	Recta f	Recta que pasa por A perpendicular a EjeX	f: x = 4	
6	Recta g	Recta que pasa por B, A'	g: -2.57x + 3.06y = 0	
7	Punto C	Punto de intersección de f, g	C = (4, 3.36)	
8	Número dis...	Distancia de A a C	distanciaAC = 3.36	
9	Texto Texto...	Nombre[A] + (Nombre[C]) + " = " +	"AC = 3.36"	
10	Número dis...	Distancia de B a C	distanciaBC = 5.22	
11	Texto Texto...	Nombre[B] + (Nombre[C]) + " = " +	"BC = 5.22"	
12	Número dis...	Distancia de B a A	distanciaBA = 4	
13	Texto Texto...	Nombre[B] + (Nombre[A]) + " = " +	"BA = 4"	

para obtener



A continuación se calculan los cocientes correspondientes a cada razón.

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

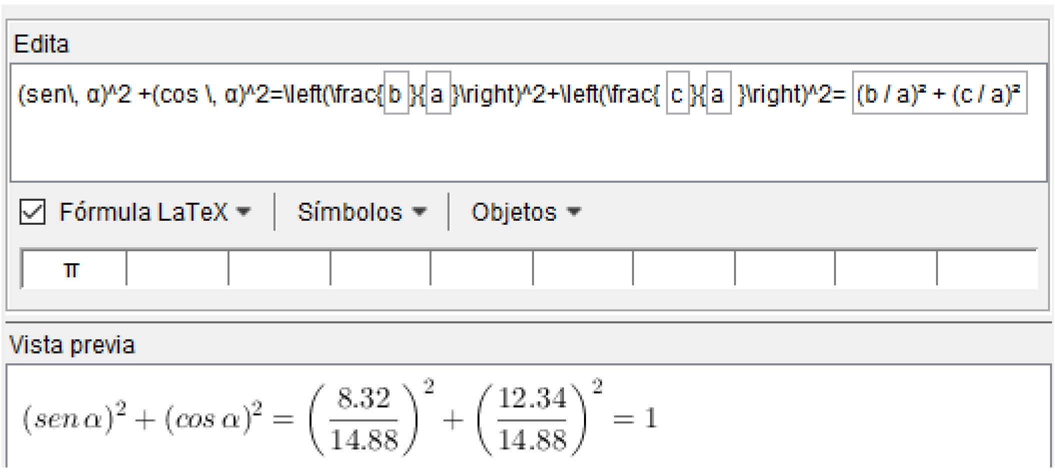
Las razones trigonométricas están relacionadas por medio de igualdades que constituyen identidades, es decir, son ciertas para cualquier ángulo. Estas identidades permiten calcular el resto de las razones a partir de una dada.

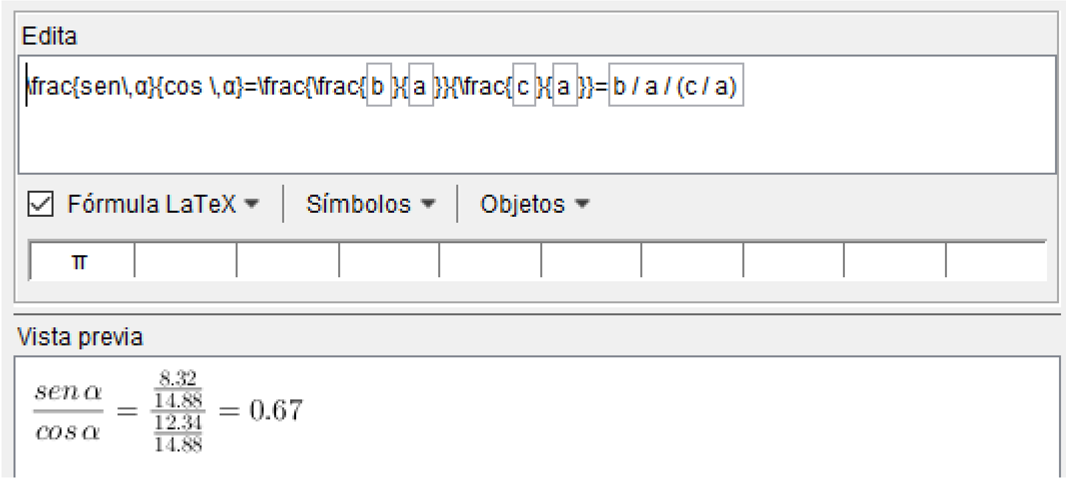
Las más usadas son:

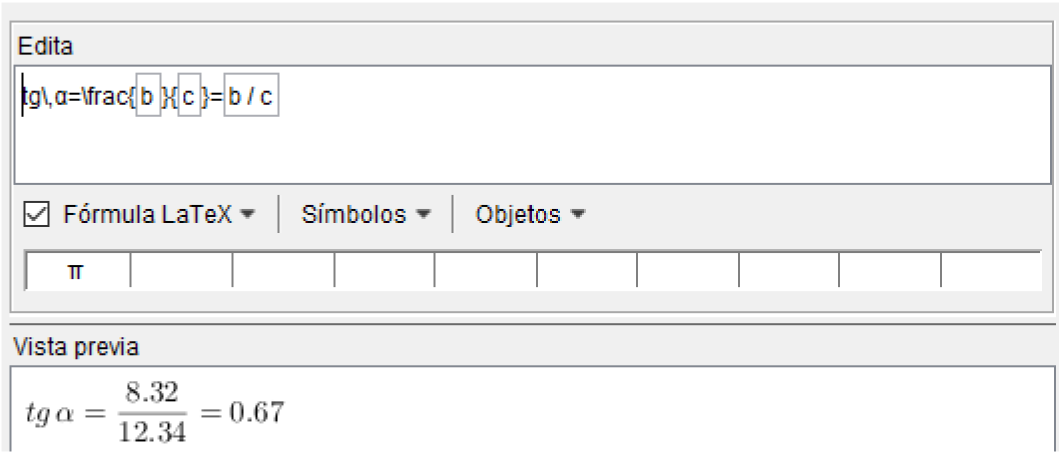
1) $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 2) $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$ 3) $\sec^2\alpha = tg^2\,\alpha + 1$

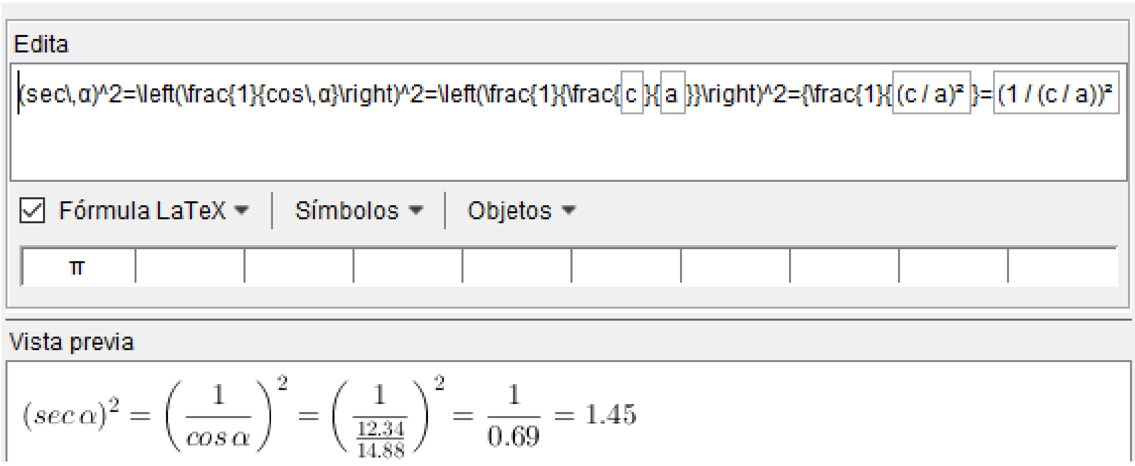
Vamos a comprobarlas para cualquier ángulo usando la construcción del principio.

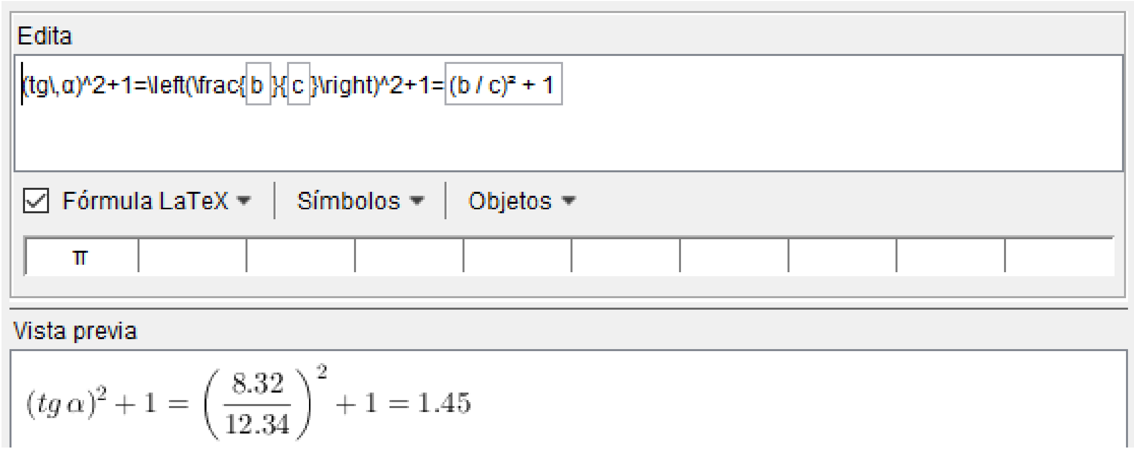
Añadimos los textos:



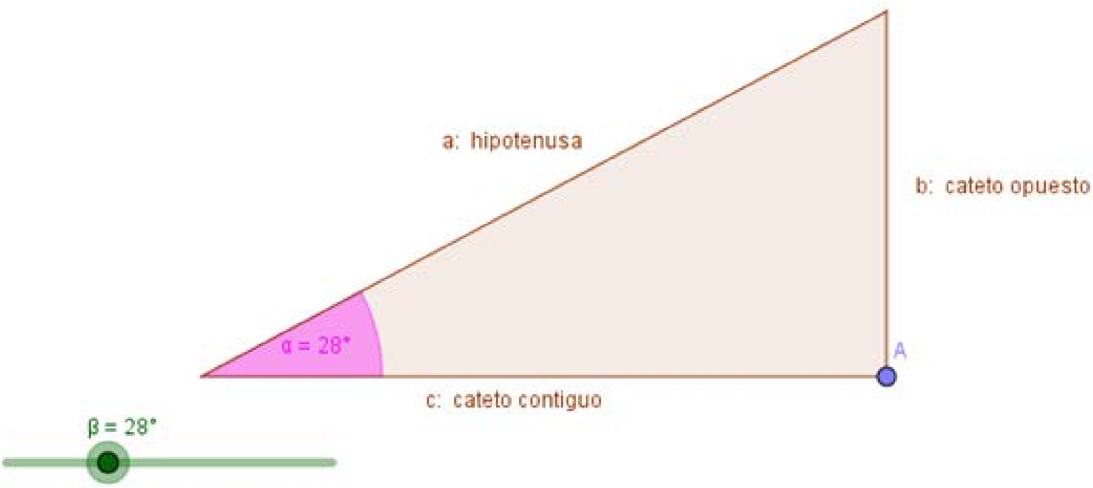

Edita
\frac{sen\,α}{cos \,α}=\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=b / a / (c / a)
Fórmula LaTeX
Símbolos
Objetos
π
Vista previa
$\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}=\frac{\frac{8.32}{14.88}}{\frac{12.34}{14.88}}=0.67$


Edita
tg\,α=\frac{b}{c}=b / c
Fórmula LaTeX
Símbolos
Objetos
π
Vista previa
$tg\,\alpha=\frac{8.32}{12.34}=0.67$


Edita
(sec\,α)^2=\left(\frac{1}{cos\,α}\right)^2=\left(\frac{1}{\frac{c}{a}}\right)^2={\frac{1}{(c / a)²}}=(1 / (c / a))²
Fórmula LaTeX
Símbolos
Objetos
π
Vista previa
$(sec\,\alpha)^2=\left(\frac{1}{cos\,\alpha}\right)^2=\left(\frac{1}{\frac{12.34}{14.88}}\right)^2=\frac{1}{0.69}=1.45$



El resultado deberá ser:



$$(sen\,\alpha)^2+(cos\,\alpha)^2=\left(\frac{6.72}{14.31}\right)^2+\left(\frac{12.64}{14.31}\right)^2=1$$

$$\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}=\frac{\frac{6.72}{14.31}}{\frac{12.64}{14.31}}=0.53 \qquad tg\,\alpha=\frac{6.72}{12.64}=0.53$$

$$(sec\,\alpha)^2=\left(\frac{1}{cos\,\alpha}\right)^2=\left(\frac{1}{\frac{12.64}{14.31}}\right)^2=\frac{1}{0.78}=1.28 \qquad (tg\,\alpha)^2+1=\left(\frac{6.72}{12.64}\right)^2+1=1.28$$

Variando el punto A y el ángulo α se observará que se mantienen las identidades trigonométricas.

CÁLCULO DE UN ÁNGULO A PARTIR DE UNA RAZÓN

Para calcular el valor aproximado de un ángulo si se conoce una de sus razones trigonométricas, se dibuja un triángulo rectángulo que cumpla la condición dada por la razón y se mide el ángulo correspondiente.

Actividad 4

¿Qué ángulo agudo cumple que sen α=0.7?

Seguimos, en GeoGebra, los siguientes pasos:

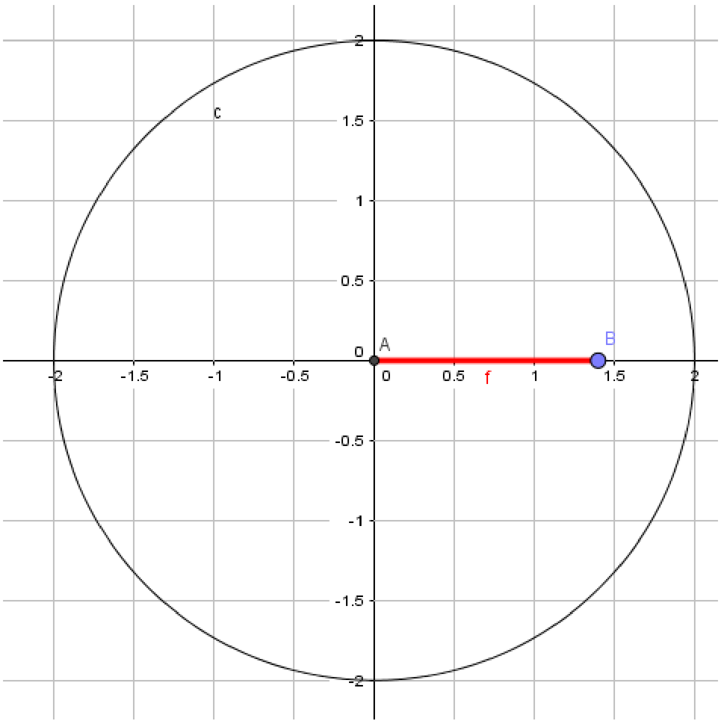
1.- Se toma un valor para la medida del cateto opuesto al ángulo α de un triángulo rectángulo. (Puede ser cualquiera, pero es conveniente elegir como medida del cateto un múltiplo de la razón).

Supongamos que hemos elegido 1.4

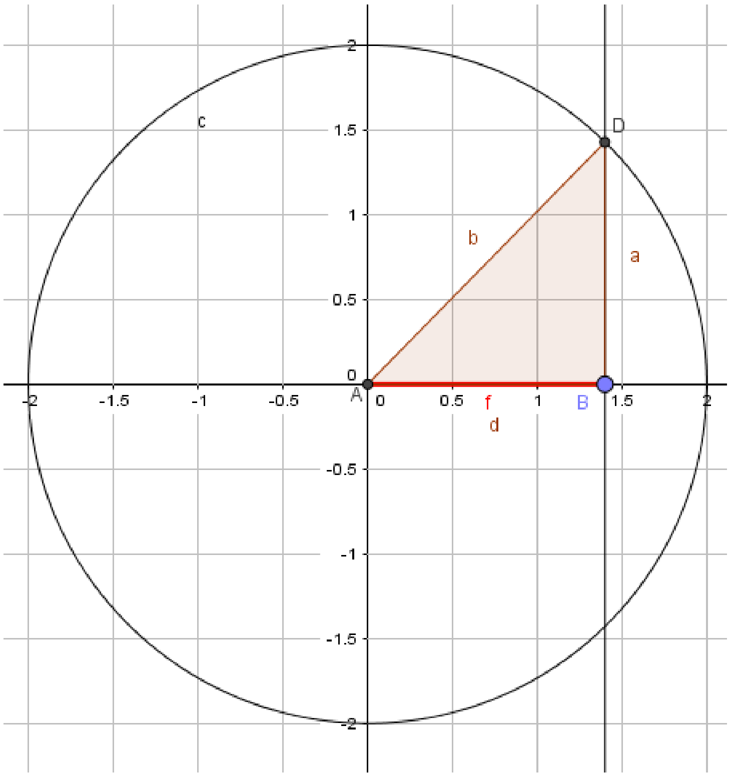
Entonces:

$$sen\,\alpha = \frac{cateto\ \ opuesto}{hipotenusa} \Rightarrow 0.7 = \frac{1.4}{hipotenusa} \Rightarrow hipotenusa = 2$$

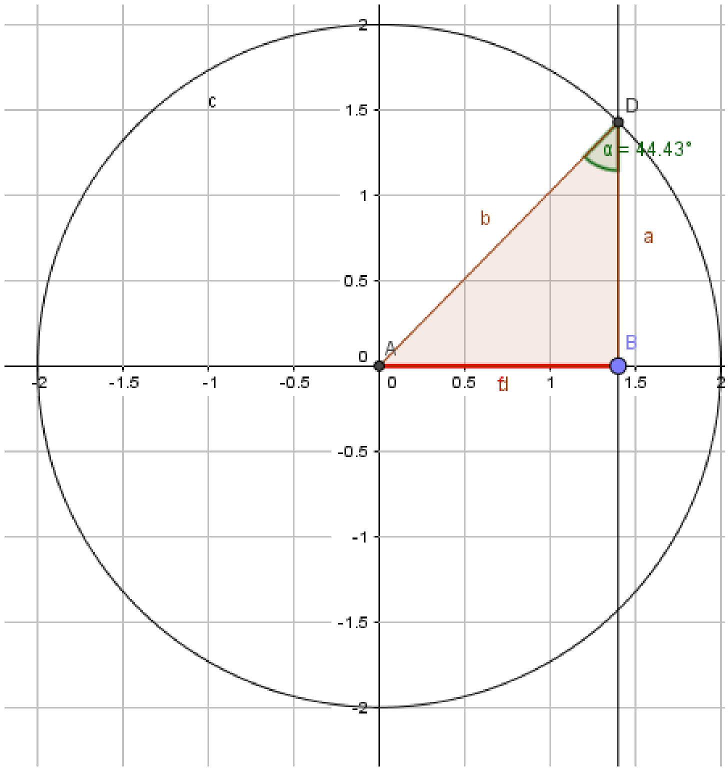
2.- Se traza un segmento con la medida del cateto y, en un extremo, una circunferencia cuyo radio sea la hipotenusa; en este caso radio 2.



3.- En el otro extremo del segmento se traza una perpendicular a él. El punto de intersección de la recta y la circunferencia es el tercer vértice del triángulo.



4.- Se mide el ángulo que corresponde al cateto opuesto. En nuestro caso usamos la herramienta **Ángulo** y pulsamos en este orden ADB. Por tanto α=44.43°=44° 25´ 48´´



Actividad 5

¿Qué ángulo agudo cumple que tg α = 1.5?

Seguimos, en GeoGebra, los siguientes pasos:

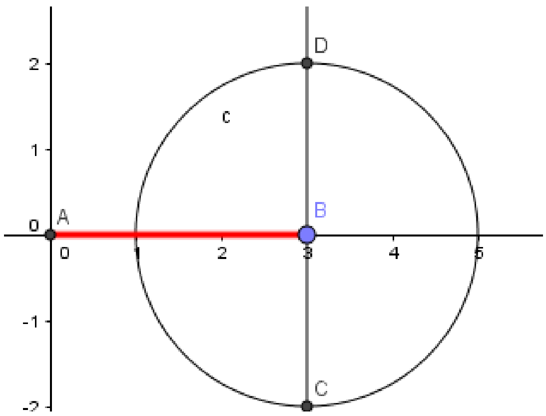
1.- Se toma un valor para la medida del cateto opuesto al ángulo α de un triángulo rectángulo. (Puede ser cualquiera, pero es conveniente elegir como medida del cateto un múltiplo de la razón).

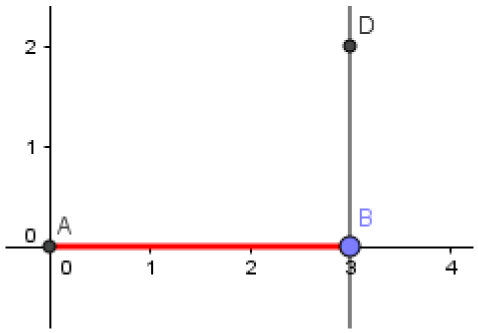
Supongamos que hemos elegido 3

Entonces:

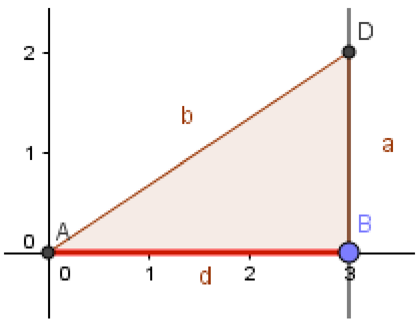
$$tg\alpha = \frac{cateto\ \ opuesto}{cateto\ adyacente} \Rightarrow 1.5 = \frac{3}{cateto\ adyacente} \Rightarrow cateto\ adyacente = 2$$

2.- Se traza un segmento con la medida de uno de los catetos y, en un extremo, se traza una perpendicular. Sobre la perpendicular se toma la medida del otro cateto, dibujando una circunferencia en ese extremo cuyo radio es la longitud de dicho cateto. Hallamos la intersección con la perpendicular. (Después hemos ocultado la circunferencia y el segundo punto de intersección).

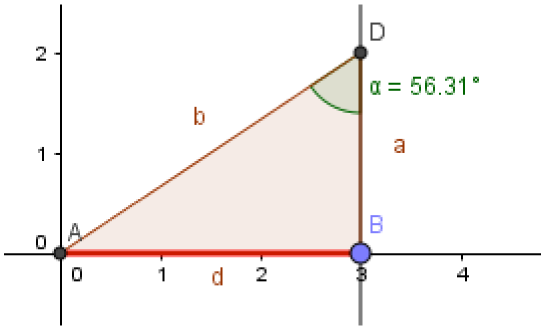




3.- Se traza la hipotenusa y el triángulo.



4.- Se mide el ángulo correspondiente al cateto opuesto. En nuestro caso usamos la herramienta **Ángulo** y pulsamos en este orden ADB. Por tanto α=56.31°=56° 18´ 26´´

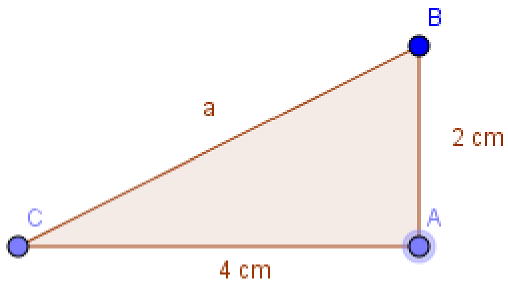


RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CON GEOGEBRA

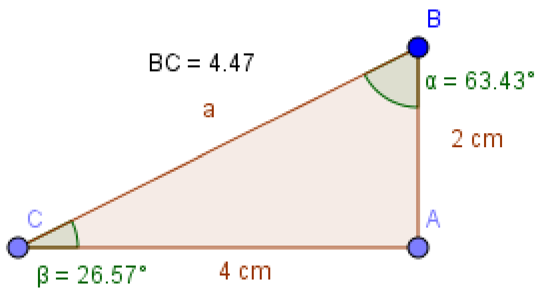
Resolver un triángulo rectángulo es calcular la medida de sus lados y sus ángulos desconocidos.

Como ya se conoce el ángulo recto, sólo se necesitan otros dos datos.

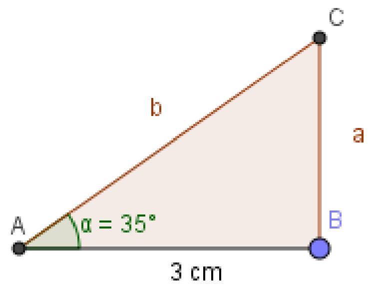
Caso 1.- Se conoce la medida de dos lados. (Dos catetos o un cateto y la hipotenusa).



Resolución: Se reproduce en GeoGebra la figura anterior y se miden la hipotenusa y los ángulos agudos.



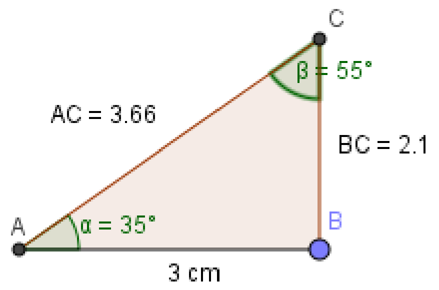
Caso 2.- Se conoce la medida de un lado y un ángulo.



Resolución: Se reproduce en GeoGebra la figura anterior. Se puede usar este protocolo de Construcción:

nº	Nombre	Descripción	Valor	Rótulo
1	Punto A	Punto de intersección de	A = (0, 0)	
2	Punto B	Punto sobre EjeX	B = (3, 0)	
3	Segmento f	Segmento [A, B]	f = 3	3 cm
4	Punto B'	B rotado por el ángulo 35°	B' = (2.46, 1.72)	
5	Ángulo α	Ángulo entre B, A, B'	α = 35°	
6	Semirrect...	Semirrecta que pasa por A, B'	g: -1.72x + 2.46y = 0	
7	Recta h	Recta que pasa por B perpendicular a	h: x = 3	
8	Punto C	Punto de intersección de h, g	C = (3, 2.1)	
9	Triángulo ...	Polígono C, A, B	polígono1 = 3.15	
9	Segmento b	Segmento [C, A] de Triángulo polígono1	b = 3.66	
9	Segmento c	Segmento [A, B] de Triángulo polígono1	c = 3	
9	Segmento a	Segmento [B, C] de Triángulo polígono1	a = 2.1	

Ahora medimos los datos que faltan.



MEDICIONES INDIRECTAS

La trigonometría se puede aplicar al cálculo de alturas, distancias o ángulos que no se pueden medir directamente.

Actividad 6

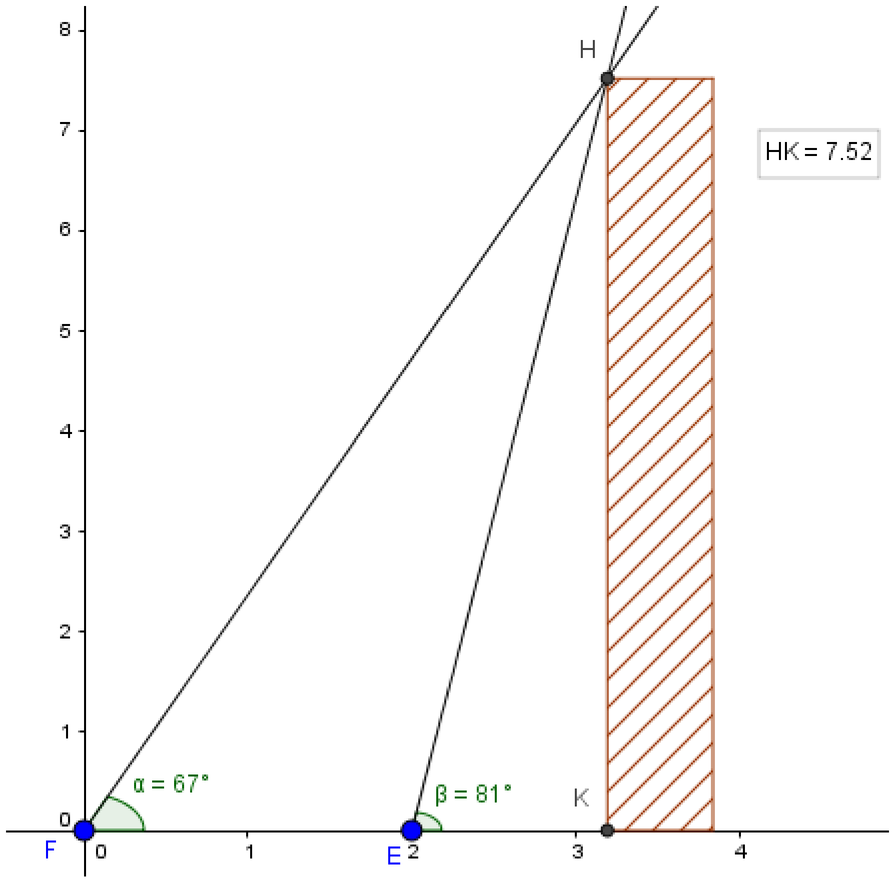
Fernando y Esther se encuentran a 200 metros de distancia. Ambos pueden ver el punto más elevado de una torreta cuya base está alineada con ellos.

El ángulo de elevación con el que Fernando ve el punto más alto es 68^{o} y el de Esther 81^{o}.

¿Qué altura tiene la torreta?

Estos problemas suelen resolverse analíiticamente mediante el método de doble observación y usando las tangentes de los ángulos.

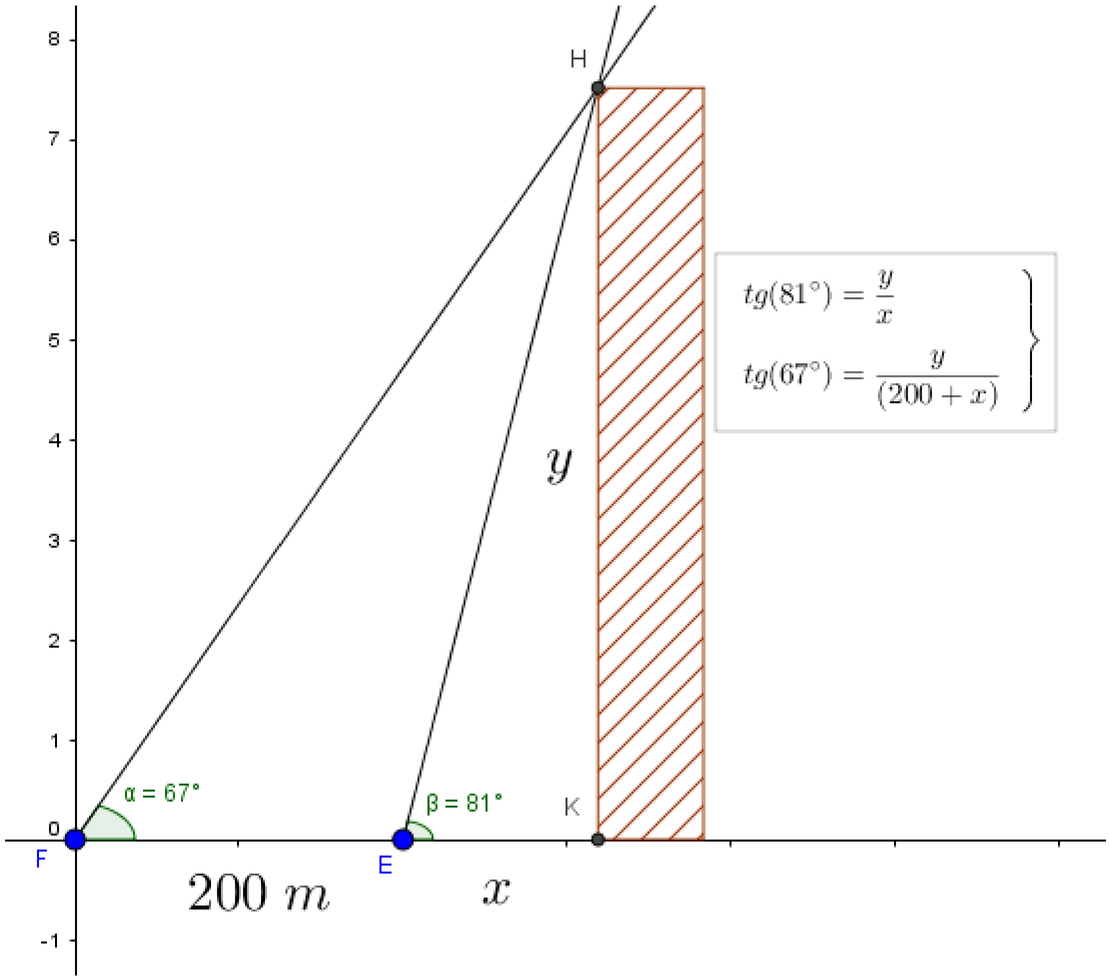
Resolución gráfica con Geogebra. Basta reproducir la situación y medir la distancia pedida.



Teniendo en cuenta que hemos tomado cada división de los ejes como 100 m, la altura de la torreta es aproximadamente de 752 m.

Resolución analítica con Geogebra. Observemos que los triángulos FHK y EHK son rectángulos. Llamemos *x* a la distancia de Esther al pie de la torreta, e *y* a la altura de la torreta.

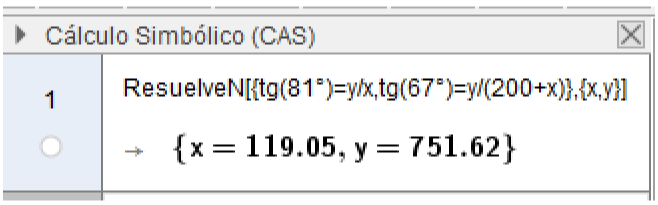
Tenemos la situación siguiente en la que planteamos el sistema que se observa:



Resolvamos el sistema en la vista CAS. Usamos el comando ***ResuelveN*** ya que son soluciones numéricas aproximadas.

Usamos el comando ***ResuelveN[<Lista de ecuaciones>, <Lista de variables>]***

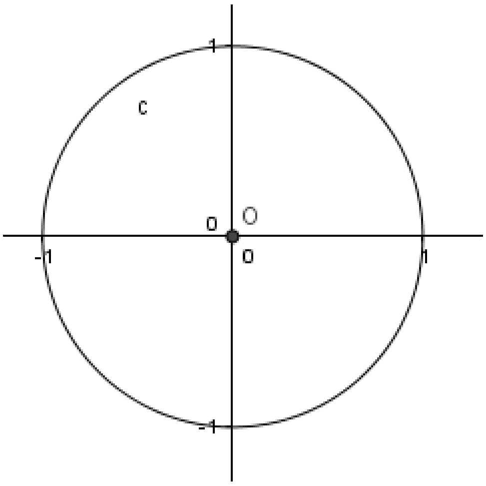
Tendremos que escribir ***Resuelve[{tan(81°)=y/x,tan(67°)=y/(200+x)},{x,y}]***



Y obtenemos que la altura de la torreta es aproximadamente de 752 metros.

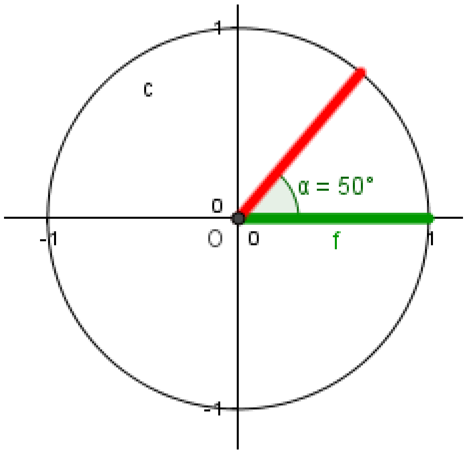
CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA

Una **circunferencia goniométrica** es una circunferencia cuyo radio mide una unidad y su centro es el origen de un sistema de ejes de coordenadas cartesianas.

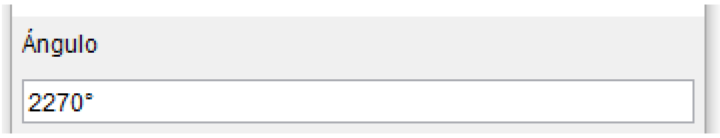


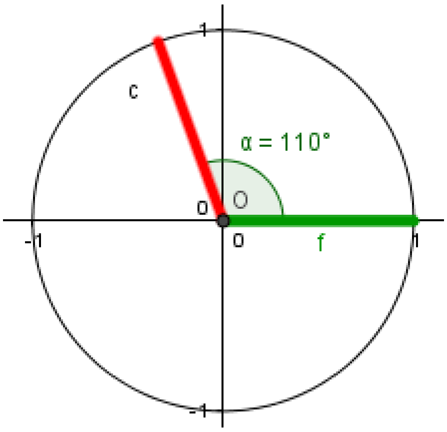
Ángulos en la circunferencia goniométrica. Para representar un ángulo en la circunferencia goniométrica se pueden seguir estos pasos:

1. Se toma como vértice el origen de coordenadas. Se dibuja un lado, que vamos a llamar **origen**, sobre el eje positivo de abscisas.
2. A partir del lado origen se traza el otro lado que llamaremos extremo. El ángulo se mide en sentido contrario a las agujas del reloj si el ángulo es positivo.

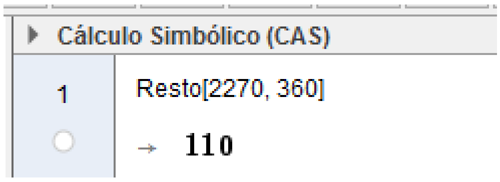


Reducción de ángulos al primer giro. GeoGebra reduce directamente un ángulo mayor que 360º.



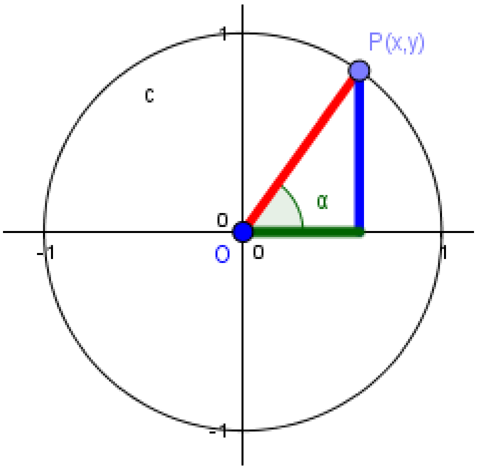


Se puede comprobar en la vista CAS que ese es el resultado correcto.

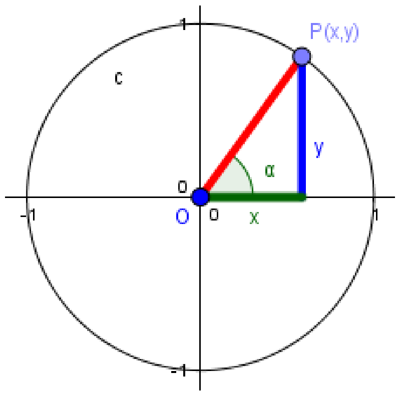


Razones trigonométricas de un ángulo. Sea **P** el punto intersección del lado extremo de un ángulo α con la circunferencia goniométrica.

Dibujamos el siguiente triángulo rectángulo:



Está claro que las coordenadas de P(x,y) definen las razones trigonométricas del ángulo α.

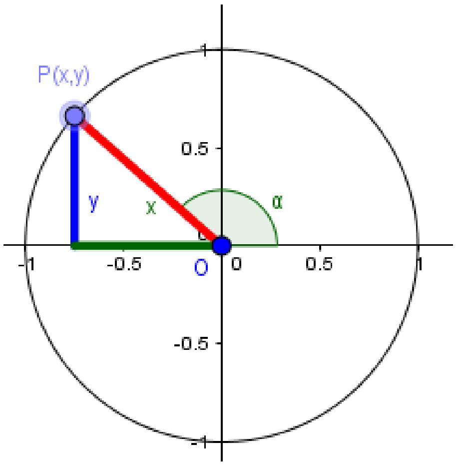


$$sen\ \alpha = y$$

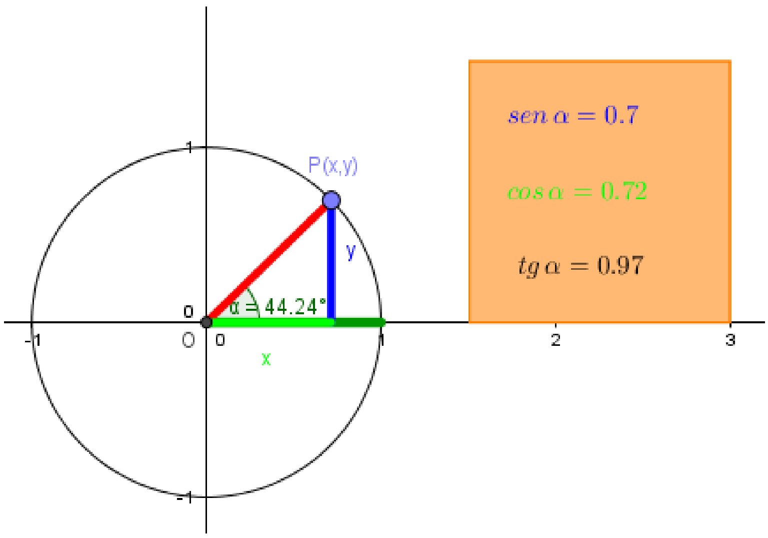
$$\cos\ \alpha = x$$

$$tg\ \alpha = \frac{y}{x}$$

Y eso es válido para los cuatro cuadrantes. Con esto es fácil deducir qué signo tienen las razones trigonométricas en cualquiera de esos cuadrantes. Por ejemplo en el segundo cuadrante, el seno es positivo y el coseno negativo, por lo que la tangente es negativa.



Con la siguiente construcción podemos observar los valores de las razones trigonométricas de todos los ángulos comprendidos entre 0° y 360°.



Se ha realizado con el siguiente Protocolo de construcción:

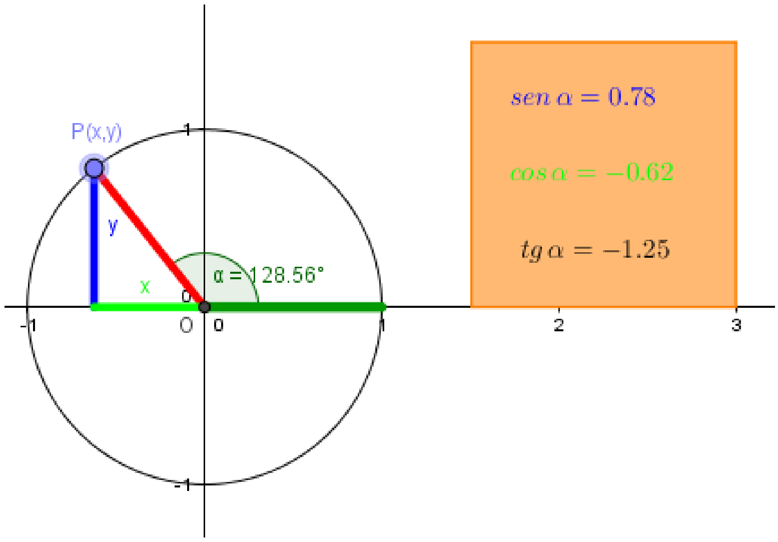
Protocolo de Construcción

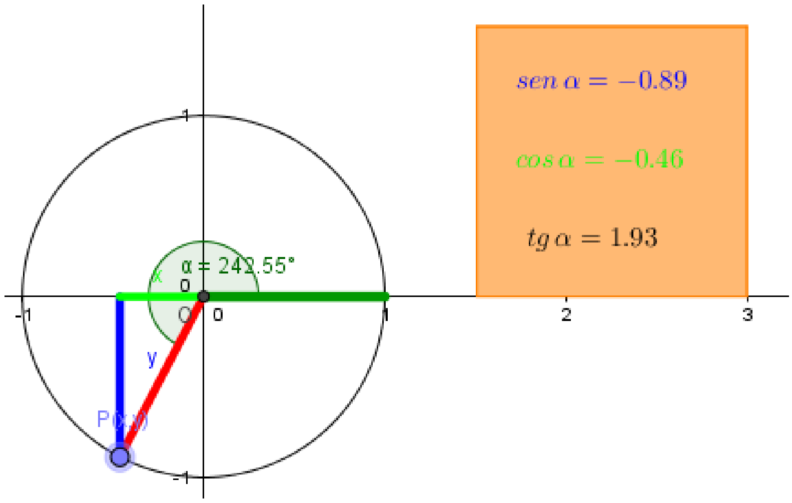
nº	Nombre	Descripción	Valor	Rótulo
1	Punto O	Punto de intersección de EjeX, EjeY	O = (0, 0)	
2	Circunferen...	Circunferencia con centro O y radio 1	c: x² + y² = 1	
3	Punto A		A = (1, 0)	
4	Segmento f	Segmento [O, A]	f = 1	
5	Punto P	Punto sobre c	P = (0.72, 0.7)	P(x,y)
6	Ángulo α	Ángulo entre A, O, P	α = 44.24°	
7	Segmento g	Segmento [O, P]	g = 1	
8	Recta h	Recta que pasa por P perpendicular a EjeX	h: x = 0.72	
9	Punto C	Punto de intersección de EjeX, h	C = (0.72, 0)	
10	Segmento i	Segmento [P, C]	i = 0.7	y
11	Segmento j	Segmento [O, C]	j = 0.72	x

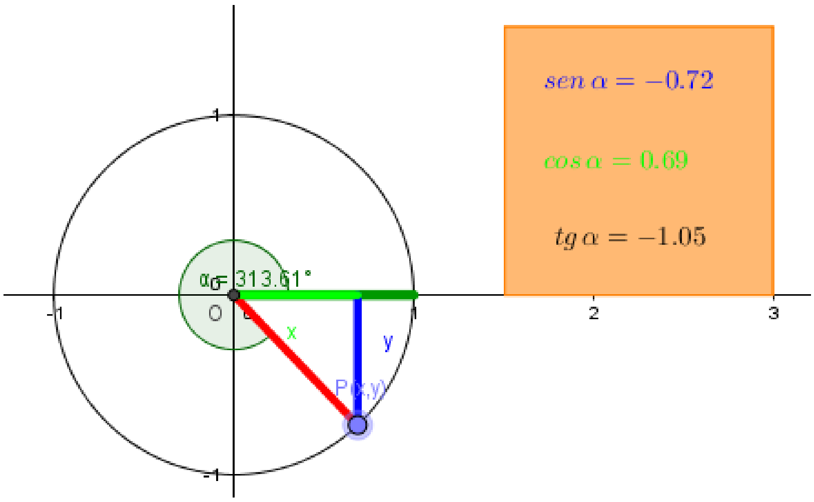
Y añadiendo los textos en forma Latex:

sen\,α= y(P)   cos\,α= x(P)   tg\,α= y(P) / x(P)

Moviendo el punto P podemos obtener:


P(x,y)
y
x
α = 128.56°
sen α = 0.78
cos α = −0.62
tg α = −1.25


α = 242.55°
y
P(x,y)
sen α = −0.89
cos α = −0.46
tg α = 1.93


α = 313.61°
x
y
P(x,y)
sen α = −0.72
cos α = 0.69
tg α = −1.05

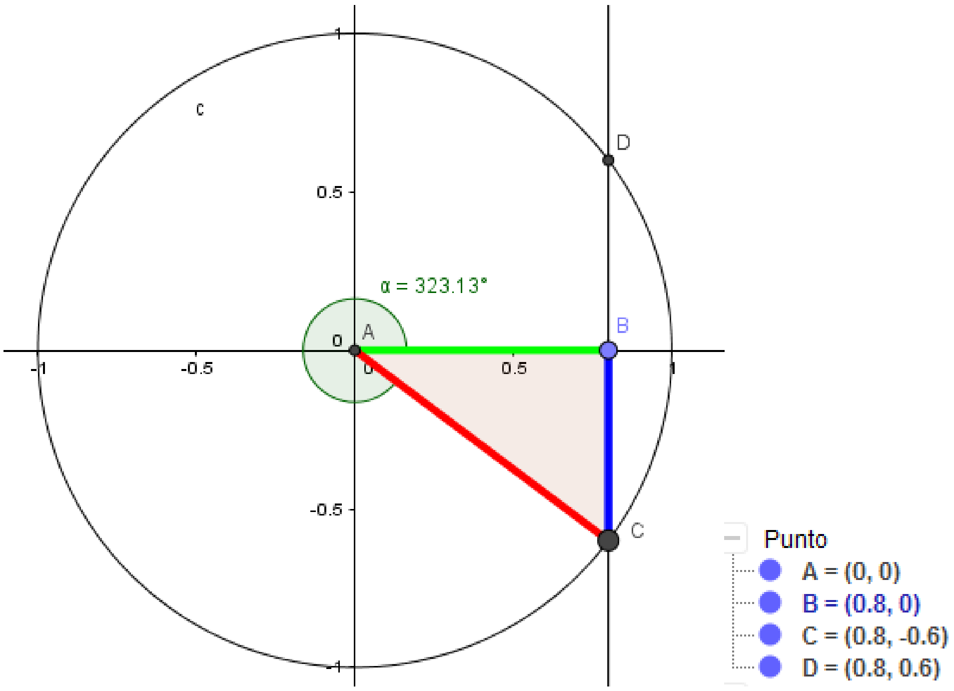
Cálculo de las razones trigonométricas de un ángulo a partir de una dada.

Actividad 7

El coseno de un ángulo α del IV cuadrante es 0,8. ¿Cuál es su seno?

Resolución gráfica con GeoGebra.

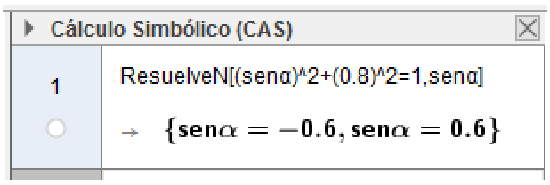
Dibujamos en la circunferencia goniométrica un segmento de longitud 0,8 en el eje horizontal. En el extremo del segmento se traza la perpendicular y se halla el punto de corte con la circunferencia goniométrica y que se encuentre en el IV cuadrante. La ordenada,y, de dicho punto será el seno del ángulo.



Observando el punto es C=(0.8, -0.6), concluimos que sen α = -0.6

Resolución analítica con Geogebra.

Usamos sen^2 α + cos^2 α =1



Atención: senα es el nombre de una variable con respecto a la que resolvemos la ecuación. No confundir con sen(α) que es una razón trigonométrica.

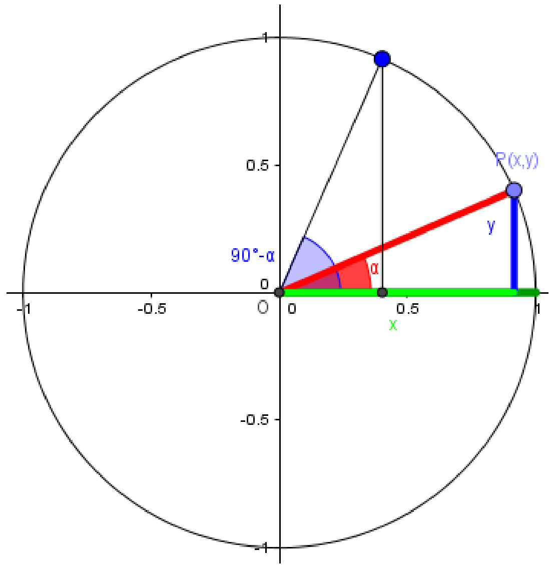
Como α es un ángulo del cuarto cuadrante, tomamos la solución negativa y por tanto sen α =-0,6.

RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

Ángulos complementarios

El complementario de un ángulo α es el ángulo (90º- α)

Con la siguiente construcción, en la que el ángulo rojo es α y el azul 90º- α,



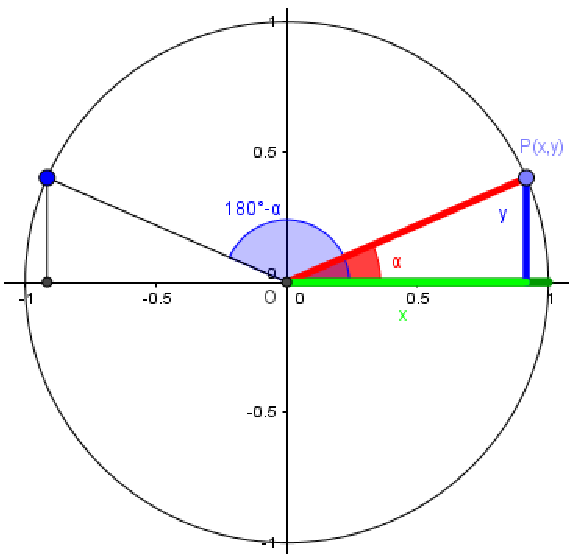
podemos comprobar claramente, por igualdad de triángulos, que

sen α= cos (90º- α) cos α = sen (90º- α)

Repitiendo el proceso de la construcción anterior podemos desarrollar los siguientes apartados.

Ángulos suplementarios

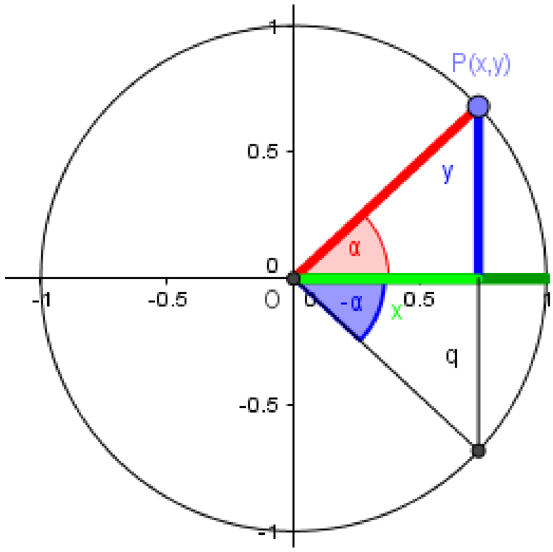
El suplementario de un ángulo α es el ángulo (180º- α)



sen α= sen (180°- α) cos α = -cos (180°- α)

Ángulos opuestos

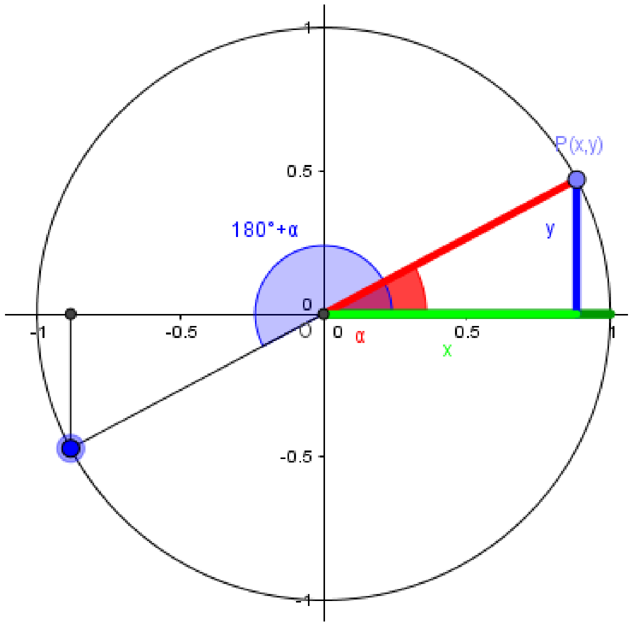
El opuesto del ángulo α es el ángulo – α



sen α= -sen (- α) cos α = cos (- α)

Ángulos que se diferencian en 180°

El ángulo α y el ángulo (180°+ α) se diferencian en 180°



sen α= -sen (180°+ α) cos α = -cos (180°+ α)

Actividad 8

Sabiendo que sen α=0.75 y que α 0°< α<90°, calcula:

a) cos α b) sen (90°- α) c) tg (180°- α) d) cos (180°+ α) e) sen(-α)

Resolución con GeoGebra CAS

Llamemos y=cos α

1	ResuelveN[(0.75)^2+(y)^2=1,y]
	→ $\{y = -0.66, y = 0.66\}$

Como α es un ángulo del primer cuadrante, llamamos

2	cosα := 0.66
	→ $cos\alpha := \frac{33}{50}$
3	senα := 0.75
	→ $sen\alpha := \frac{3}{4}$

Atención: senα y cosα son nombre. No confundir con sen α y cos α.

Ahora calculamos mediante Texto las razones pedidas.

$$cos\,\alpha = 0.66$$

$$sen\,(90° - \alpha) = cos\,\alpha = 0.66$$

$$tg(180° - \alpha) = \frac{sen\,(180° - \alpha)}{cos\,(180° - \alpha)} = \frac{sen\,\alpha}{-cos\,\alpha} = \frac{0.75}{-0.66} = -1.14$$

$$cos\,(180° + \alpha) = -cos\,\alpha = -0.66$$

$$sen\,(-\alpha) = -sen\,(\alpha) = -0.75$$

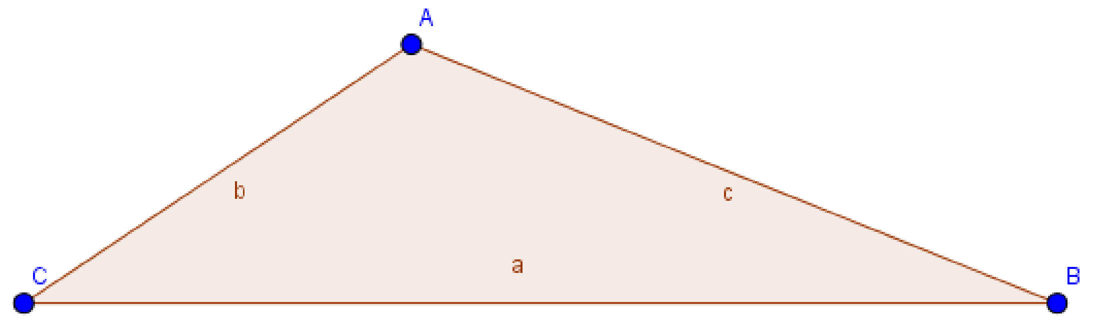
Por ejemplo, el tercer texto se ha obtenido asÍ:

Edita

```
tg(180°-α)=\frac{sen\, (180°-α)}{cos\,(180°-α)}=\frac{sen\,α}{-cos\,α}=\frac{senα}{-cosα}=senα / (-cosα)
```

TEOREMAS DEL SENO Y DEL COSENO

Sea *ABC* un triángulo cualquiera. En él se verifica:



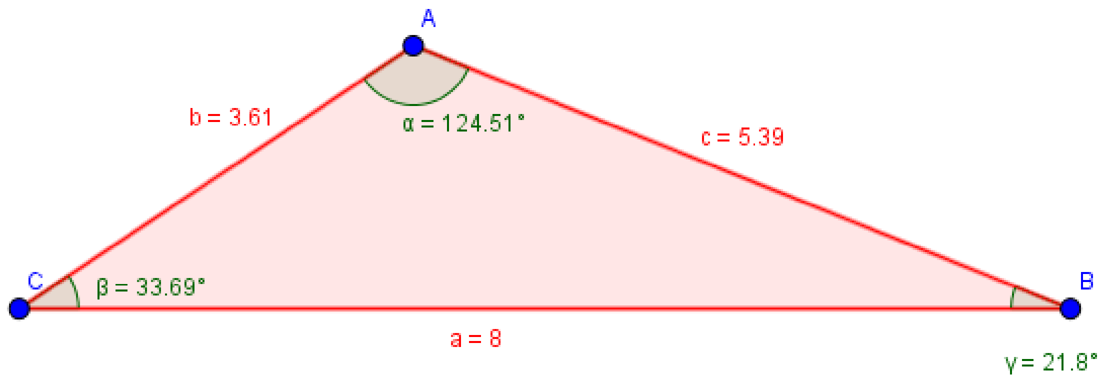
$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

Podemos comprobar con GeoGebra el teorema del seno:

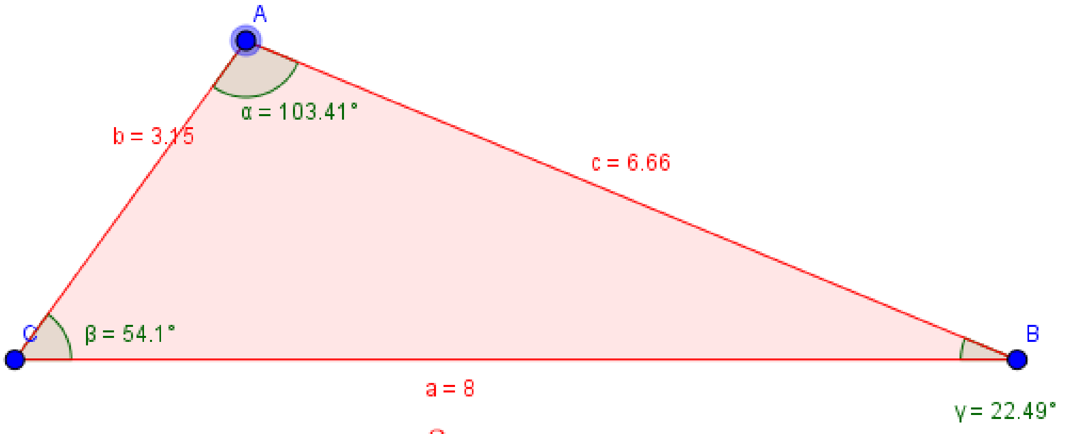


$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{8}{sen\,124.51^\circ} = 9.71$$

$$\frac{b}{sen\,\gamma} = \frac{3.61}{sen\,21.8^\circ} = 9.71$$

$$\frac{c}{sen\,\beta} = \frac{5.39}{sen\,33.69^\circ} = 9.71$$

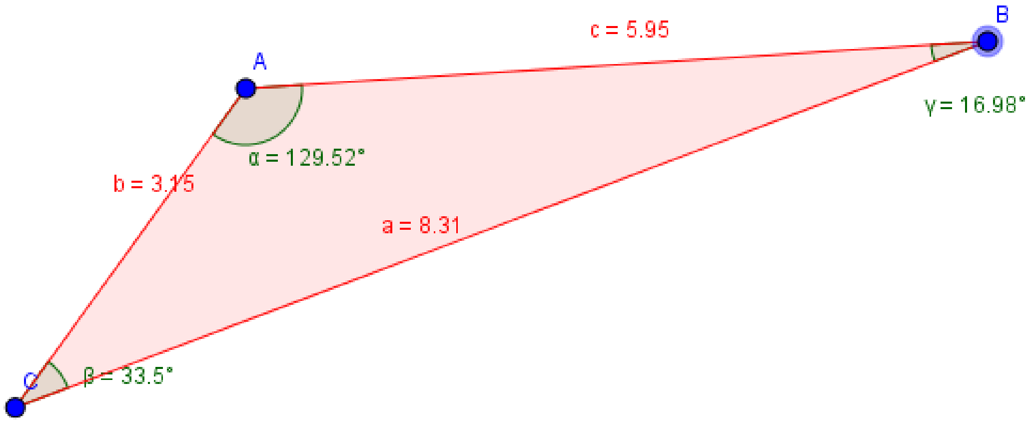
Y modificando el triángulo, moviendo sus puntos:



$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{8}{sen\,103.41°} = 8.22$$

$$\frac{b}{sen\,\gamma} = \frac{3.15}{sen\,22.49°} = 8.22$$

$$\frac{c}{sen\,\beta} = \frac{6.66}{sen\,54.1°} = 8.22$$



$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{8.31}{sen\,129.52°} = 10.77$$

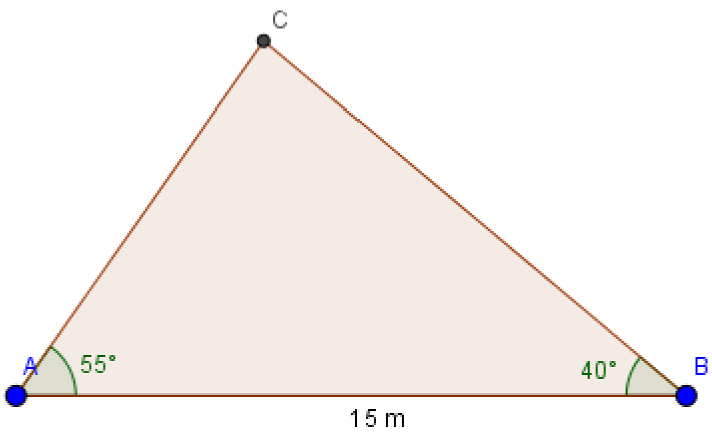
$$\frac{b}{sen\,\gamma} = \frac{3.15}{sen\,16.98°} = 10.77$$

$$\frac{c}{sen\,\beta} = \frac{5.95}{sen\,33.5°} = 10.77$$

APLICACIÓN DE LOS TEOREMAS DEL SENO Y DEL COSENO A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Actividad 9

Dos personas observan un árbol situado en la orilla opuesta de un río bajo ángulos de 40^{o} y 55^{o}, respectivamente. La distancia entre ellas es de 15 m. ¿A qué distancia de cada una está el árbol?

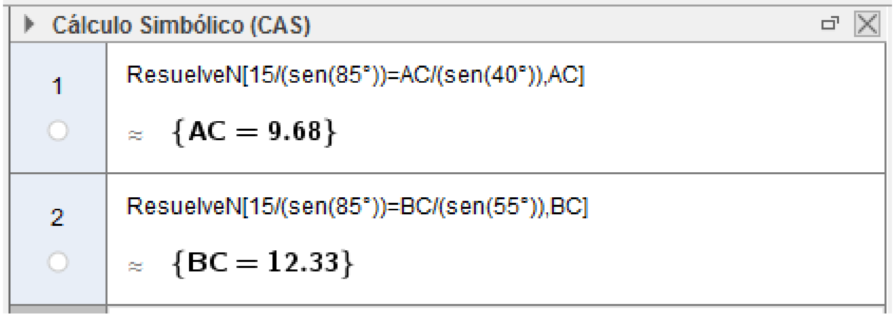


Protocolo de Construcción

nº	Nombre	Descripción	Valor	Rótulo
1	Punto A		A = (0, 1)	
2	Punto B		B = (15, 1)	
3	Segmento f	Segmento [A, B]	f = 15	15 m
4	Punto B'	B rotado por el ángulo 55°	B' = (8.6, 13.29)	
5	Ángulo α	Ángulo entre B, A, B'	α = 55°	
6	Semirrect...	Semirrecta que pasa por A, B'	g: -12.29x + 8.6y =...	
7	Punto A'	A rotado por el ángulo -(40°)	A' = (3.51, 10.64)	
8	Ángulo β	Ángulo entre A', B, A	β = 40°	
9	Semirrect...	Semirrecta que pasa por B, A'	h: -9.64x - 11.49y ...	
10	Punto C	Punto de intersección de g, h	C = (5.55, 8.93)	
11	Triángulo ...	Polígono C, A, B	polígono1 = 59.46	

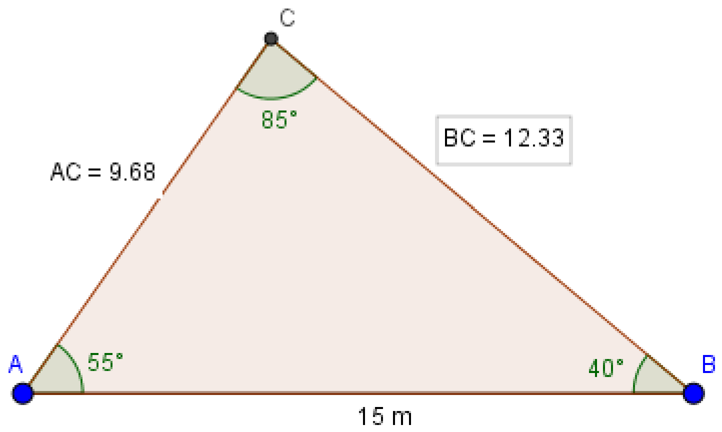
Resolución con GeoGebra CAS

Ya que $\hat{C} = 180 - 55 - 40 = 85$, aplicando el teorema del seno:



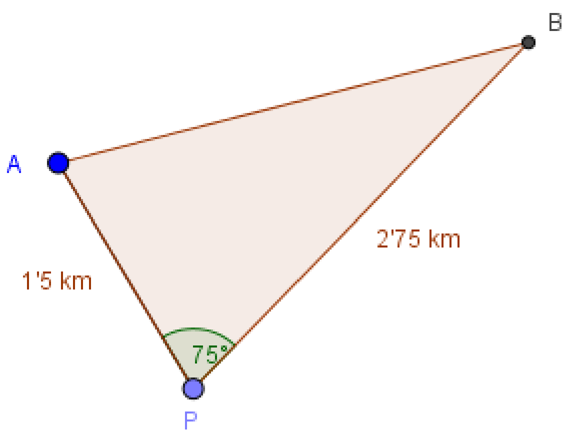
Resolución gráfica con GeoGebra

Basta medir con 



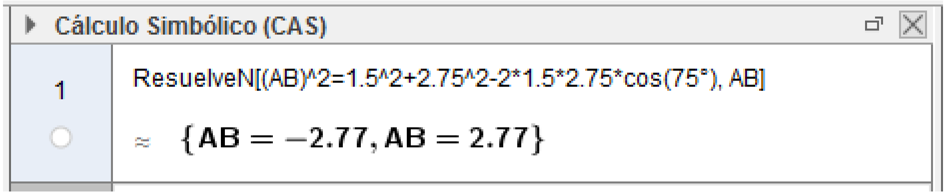
Actividad 10

Entre dos casas A y B hay algo que impide medir la distancia entre ellas. Desde un punto P situado a 1’5 km de A y a 2’750 km de B observamos las dos casas bajo un ángulo de 75° ¿Cuál es la distancia entre las dos casas?



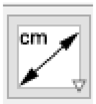
Resolución con GeoGebra CAS

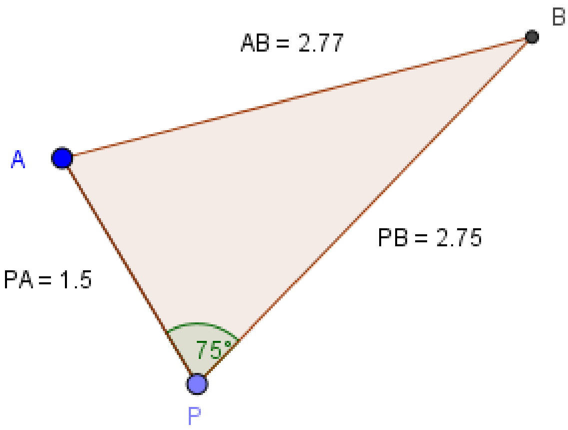
Aplicando el teorema del coseno:



Por tanto, la distancia entre las casas es de 2’77 km.

Resolución gráfica con GeoGebra

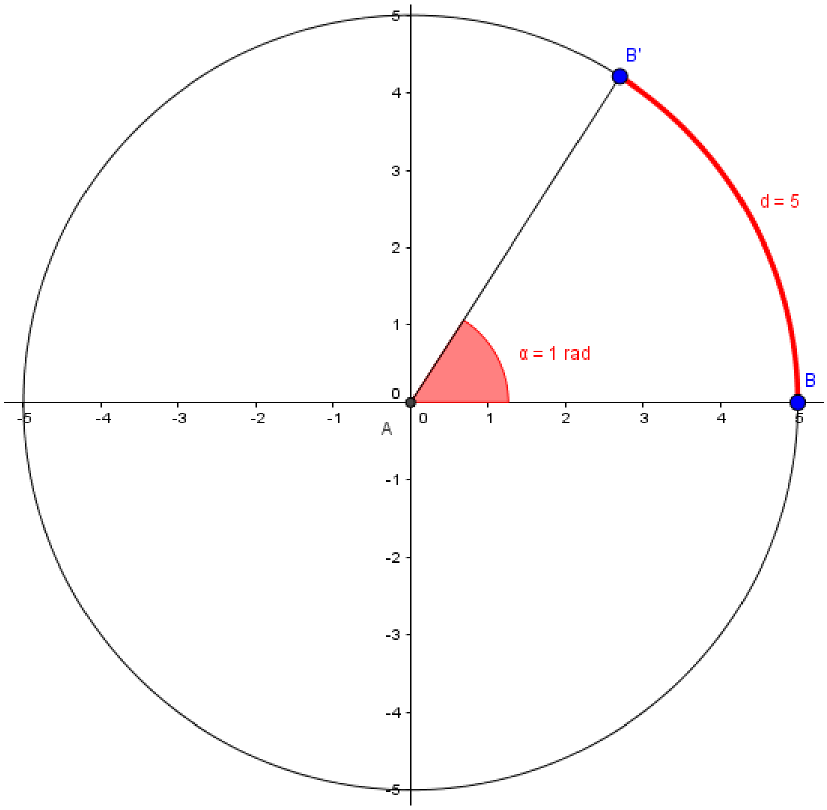
Medimos las distancias con la herramienta 



EL RADIÁN

Se llama radián a un ángulo tal que el arco que abarca tiene la misma longitud que el radio con el que se ha trazado.

En la siguiente figura se verifica que el ángulo α mide un radián porque la longitud del arco BB’ es igual al radio AB.



Para expresar en grados un ángulo dado en radianes, se multiplica la medida por 180 y se divide entre π, es decir

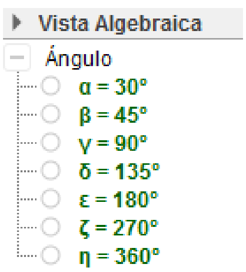
$$1\,rad = \frac{180^{\circ}}{\pi}$$

Para expresar en radianes un ángulo dado en grados , se multiplica la medida por π y se divide entre 180, es decir

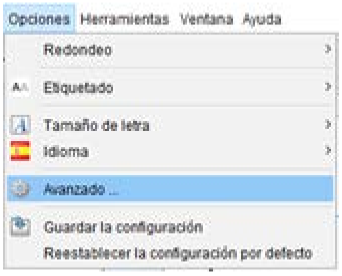
$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180^{\circ}}$$

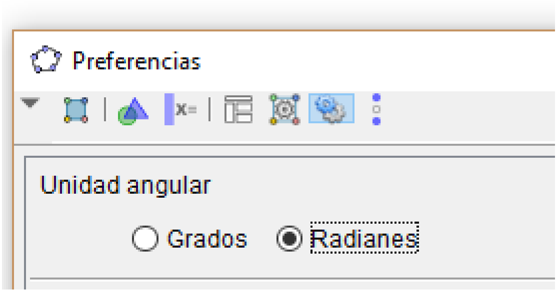
En GeoGebra podemos hacerlo de varias formas.

Supongamos que queremos pasar a radianes estos ángulos:

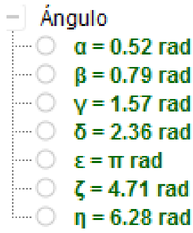


Método 1.- Activamos la opción

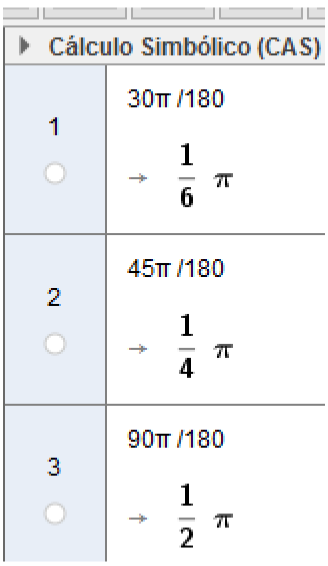


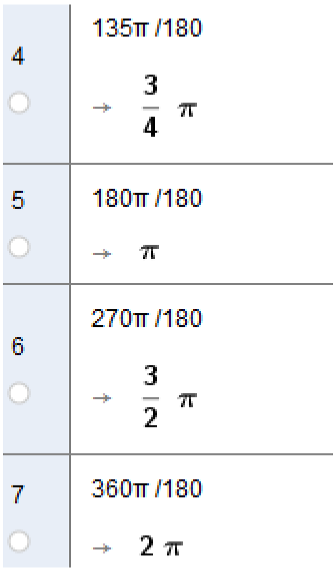


Directamente se convierten todos los ángulos.

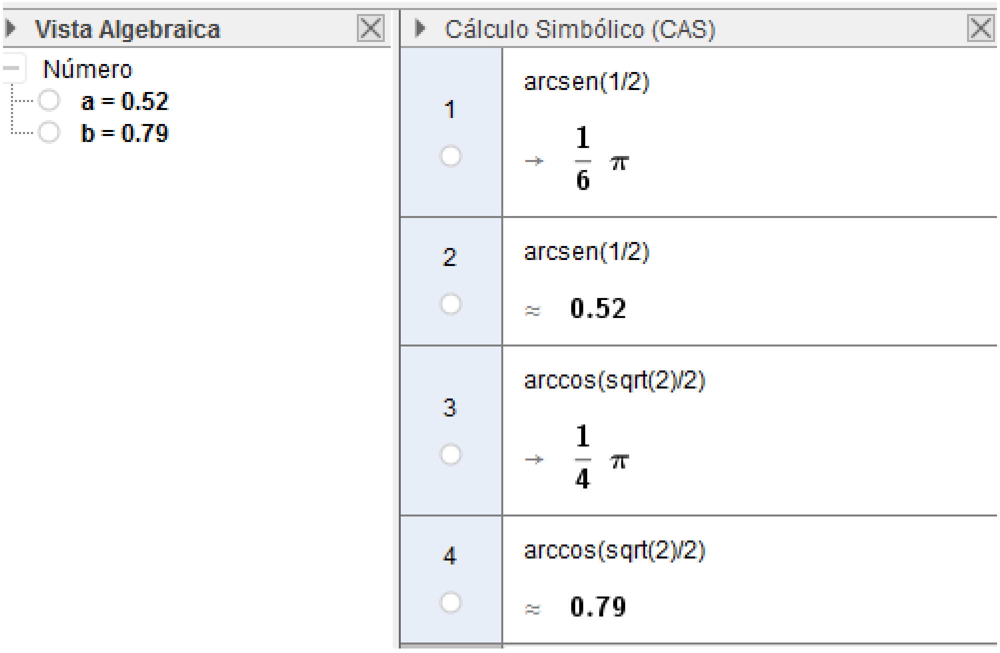


Método 2.- En la vista CAS haciendo directamente la operación.

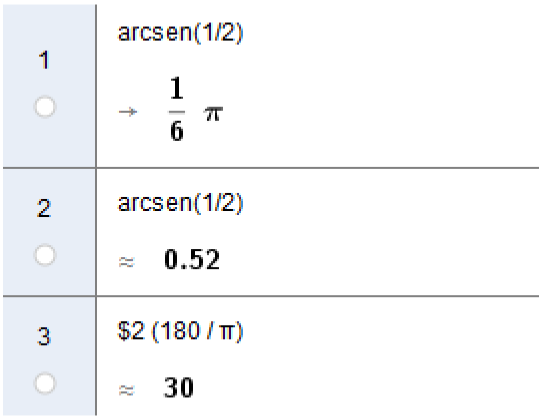


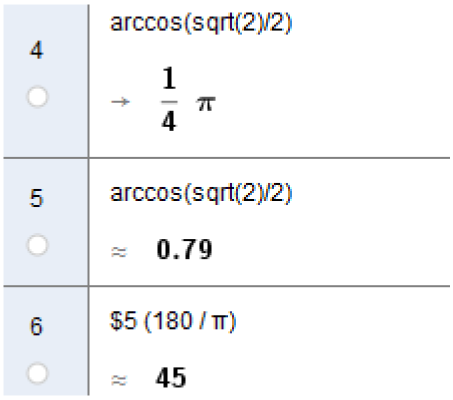


El paso de radianes a grados es similar. Recordamos que GeoGebra presenta el resultado de las funciones trigonométricas inversas *arcsen α, arcos α y arctg α* en radianes, independientemente de la unidad angular elegida en **Opciones -> Avanzado**, como puede verse en la siguiente pantalla, tanto en la vista CAS como Algebraica.



Por tanto habrá, para pasar a grados:





FORMA INCOMPLEJA A FORMA COMPLEJA DE UN ÁNGULO

Cuando un ángulo α está expresado por un número decimal como, por ejemplo, α=67’43°, decimos que está escrito en forma *incompleja*. Si está expresado en grados minutos y segundos, α = 67° 25’ 48’’, decimos que está en forma *compleja*.

Para expresar un ángulo dado en forma incompleja a compleja, adjuntamos la siguiente herramienta construida con GeoGebra, construida con este sencillo Protocolo

Protocolo de Construcción

nº	Nombre	Descripción	Valor
1	Número a		a = 67.43
2	Número b	a - parteFraccionaria(a)	b = 67
3	Número c	(a - floor(a)) 60 - parteFraccionaria((a - floor(a)) 60)	c = 25
4	Número d	parteFraccionaria((a - floor(a)) 60) 60	d = 48
5	Texto texto1	" " + (FórmulaTexto[a]) + "^o=" + (FórmulaTexto[b]) + "^o\; " + (FórmulaTexto[c]) + "' \; " +	" 67.43^o=67^o\; 25' \; 48""
6	CasillaDeEntrada CasillaDeEnt...	CasillaEntrada[a]	CasillaDeEntrada1

Donde empezamos asignando a *a* el valor del ángulo. Después asignamos a los números *b, c* y *d* los valores que aparecen en el Protocolo. [floor(a) es la parte entera de a].

a - parteFraccionaria(a)

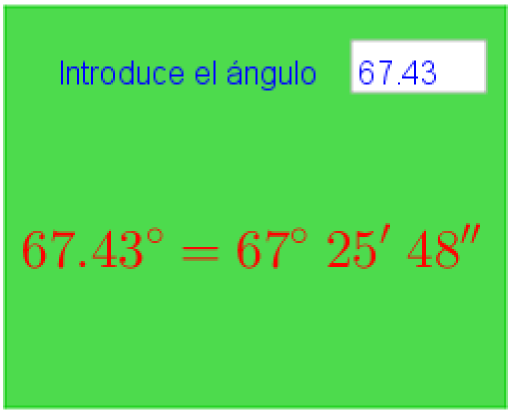
(a - floor(a)) 60 - parteFraccionaria((a - floor(a)) 60)

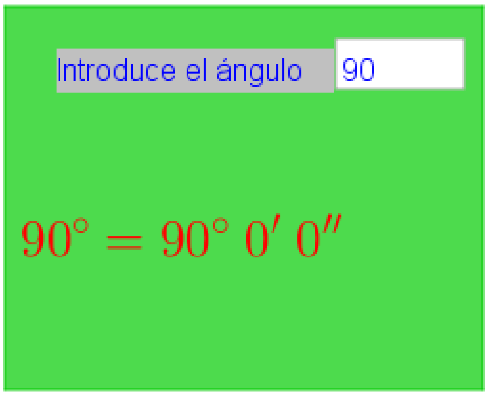
parteFraccionaria((a - floor(a)) 60) 60

Por último, añadimos una Casilla de Entrada cuyo argumento sea a. Y después el texto

a^o=b ^o\; c ' \; d "

El resultado es:





ACTIVIDADES

(Procura realizar todas las actividades de manera que se pueda calcular, en la medida de lo posible, lo que se pide mediante la vista CAS y comprobarlo con la Vista Grafica realizando las construcciones oportunas. En las actividades 19, 23, 29, 30 y 31 reproduce los dibujos propuestos en la Vista Gráfica de GeoGebra).

11. Si $sen\ \alpha = \frac{1}{3}$, donde α es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, y la hipotenusa mide 18 cm, halla los catetos y las razones trigonométricas del otro ángulo agudo

12. En un cuadrado de lado l, trazamos una de sus diagonales, *d*. Asi obtenemos dos triángulos rectángulos isósceles, cuyos ángulos agudos miden 45^o. Halla las razones trigonométricas de ese ángulo.

13. En un triángulo isósceles los lados iguales miden 8 cm, respectivamente, y el lado desigual 12 cm. ¿Cuánto miden sus ángulos?

14. En un triángulo rectángulo conocemos la hipotenusa, *a = 18 cm*, y uno de los ángulos agudos, $\alpha = 58^o$. Halla los catetos y el área del triángulo.

15. Halla las razones trigonométricas de los ángulos α y β de la circunferencia cuyo coseno es -0,34.

16. Representa los dos ángulos de la circunferencia tales que su seno es igual a $-\frac{1}{2}$. Halla las razones trigonométricas de esos ángulos.

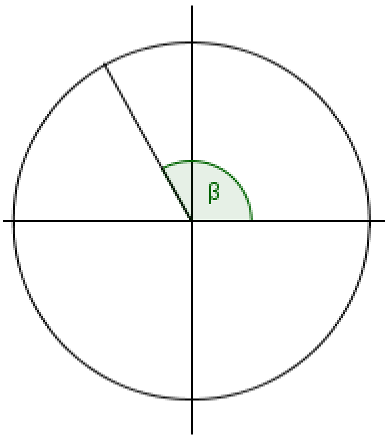
17. Halla las razones trigonométricas de los ángulos a) 210^o, b) 135^o y c) 300^o, buscando su relación con un ángulo comprendido entre 0^o y 90^o.

18. Si $cos\ \alpha = \frac{2}{3}$ y $0^o < \alpha < 90^o$, halla:

a) *sen* α b) *tg* α c) *sen* $(180^o + \alpha)$ d) *cos* $(180^o - \alpha)$

e) *tg* $(180^o + \alpha)$ *f) sen* $(180^o - \alpha)$ *g) cos* $(360^o - \alpha)$ *h) tag* $(360^o - \alpha)$

19. Dibuja en la circunferencia adjunta un ángulo α comprendido entre 0^o y 90^o, que verifique sen β = cos α.

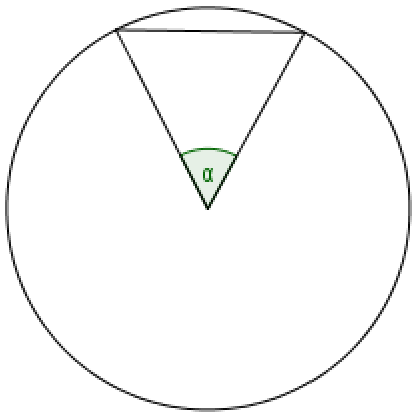


20. Expresa con un ángulo del primer cuafrante las razones trigonométricas de 3875°.

21. Calcula la longitud de la sombra que arroja un poste de 2`5 m de altura cuando los rayos del Sol forman con la horizontal un ángulo de 35° 50'.

22. Las diagonales de un rombo miden 24 cm y 16 cm, respectivamente. Halla sus ángulos.

23. En una circunferencia de radio 14 cm se traza una cuerda de 10 cm de longitud. Halla la medida del ángulo.



24. El mástil de una bandera está sujeto a tierra por dos cables que forman ángulos agudos de 42° y 28° con la horizontal. La distancia entre los puntos de anclaje es de 50 m. Halla la altura del mástil.

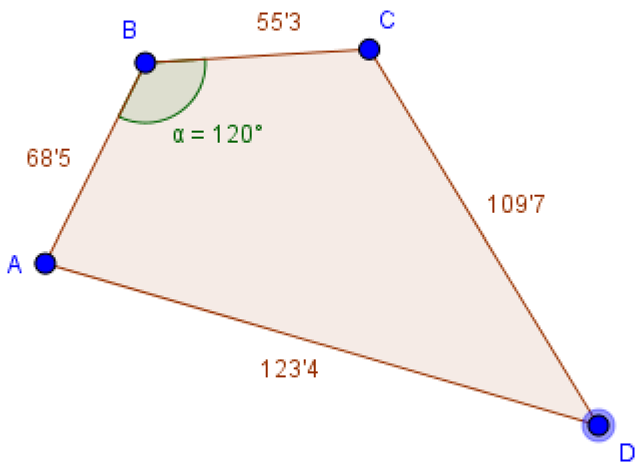
25. La diagonal mayor de un paralelogramo mide 56 m y forma con lso lados ángulos de 36° y 44°, respectivamente. Halla la medida de los lados del paralelogramo.

26. Desde un banco, *B*, se emita una señal de alarma que se recibe en dos comisarías, *A* y *C*, distantes entre sí 2'5 km. Desde las comisarías se miden, sobre un plano de la ciudad, los ángulos $\widehat{BAC} = 48^o$ y $\widehat{BCA} = 37^o$. Halla la distancia del banco a cada una de las comisarías.

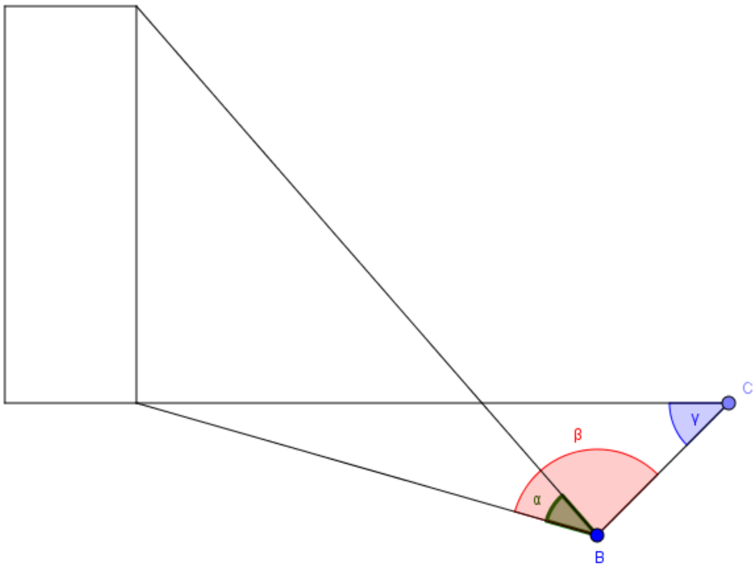
27. Halla el lado y el área de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 16 cm de radio.

28. En el triángulo de lados 12 cm, 18 cm y 24 cm, halla la medida del radio de la circunferencia inscrita.

29. Halla los otros ángulos de este cuadrilátero.



30. Para hallar la altura de un edificio, desde los puntos B y C, distantes entre sí 60 metros, medimos los ángulos $\alpha = 25^\circ$, $\beta = 75^\circ$ y $\gamma = 55^\circ$. Halla la altura del edificio.



31. Mide los siguientes ángulos y expresa cada medida en grados y radianes.