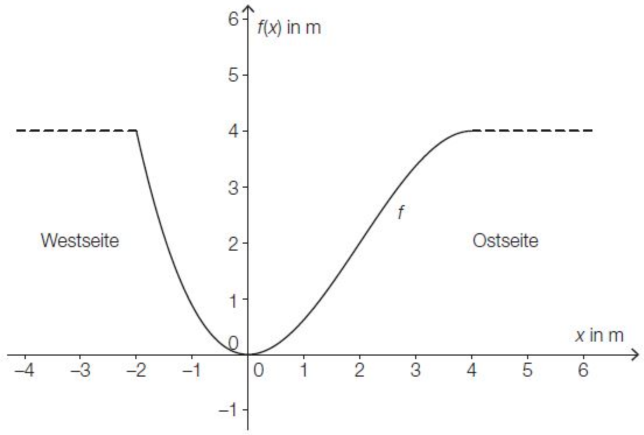
Am Fluss * (A_229)

a) Das Querschnittsprofil eines künstlichen Flusslaufes kann annähernd durch den Graphen der Polynomfunktion f beschrieben werden:

$f(x) = -\frac{1}{8} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot x^2$ mit $-2 \leq x \leq 4$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in Metern (m)

Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Berechnen Sie diejenige Stelle, an der das Querschnittsprofil auf der Ostseite am stärksten ansteigt.

Gegeben ist das folgende Integral:

$\int_{-2}^{4} (4 - f(x))\,\mathrm{d}x$

– Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Fläche, deren Inhalt mithilfe dieses Integrals berechnet werden kann.

Betonschutzwand (A_171)

Zur Sicherung von Baustellen auf den Straßen werden verschiedene Betonschutzwände eingesetzt.

b) Die Abbildung 2 zeigt den Querschnitt einer anderen Betonschutzwand.

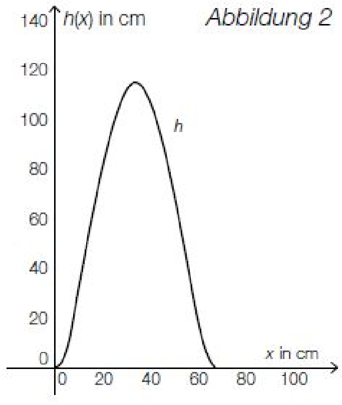
$h(x) = \frac{1}{11\,560} \cdot x^4 - \frac{1}{85} \cdot x^3 + \frac{2}{5} \cdot x^2$ mit $0 \leq x \leq 68$
x, $h(x)$ … Koordinaten in cm

– Berechnen Sie den Flächeninhalt der Querschnittsfläche dieser Betonschutzwand.

Die Betonschutzwand hat eine Länge von 4 m und eine Dichte von 2 400 kg/m³ (Masse = Dichte × Volumen).

– Berechnen Sie die Masse dieser Betonschutzwand in Tonnen.

Abbildung 2

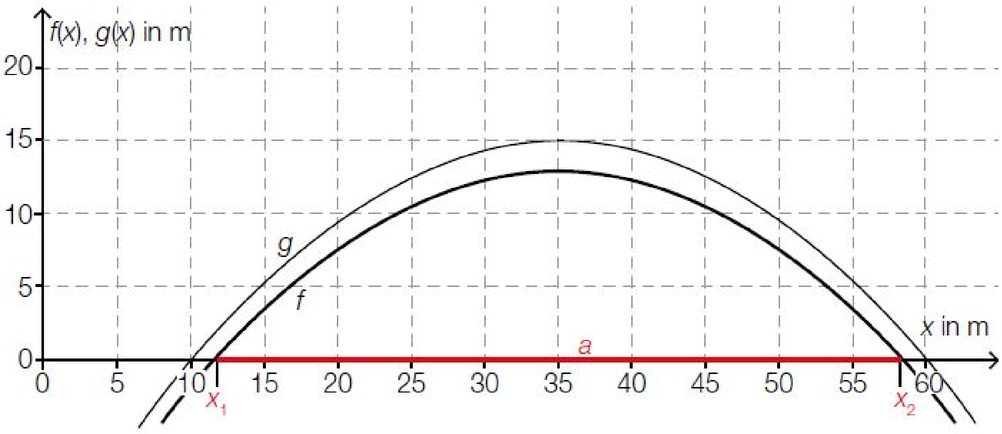


Brueckenboegen (A_216)

Der innere Teil eines Brückenbogens kann durch die Funktion f beschrieben werden. Der äußere Teil des Brückenbogens kann durch die Funktion g beschrieben werden.

$$f(x) = -\frac{3}{125} \cdot x^2 + \frac{42}{25} \cdot x - \frac{82}{5}$$

x, $f(x)$, $g(x)$ … Koordinaten in m



c) Der äußere Teil des Brückenbogens verläuft so, dass der senkrechte Abstand zum inneren Brückenbogen in jedem Punkt 2 m beträgt.

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion g auf, die den äußeren Teil des Brückenbogens beschreibt.

Der Flächeninhalt zwischen den beiden Teilen des Brückenbogens und der x-Achse soll berechnet werden.

– Kreuzen Sie diejenige Formel an, die zur Berechnung dieses Flächeninhalts verwendet werden kann. *[1 aus 5]*

$\int_{10}^{60} (g(x) - f(x))\,dx$	☐
$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - \int_{10}^{60} g(x)\,dx$	☐
$\int_{10}^{60} g(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$	☐
$\int_{x_1}^{x_2} (g(x) - f(x))\,dx$	☐
$\int_{10}^{60} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$	☐

Feinstaubemissionen (A_180)

Für den Zeitraum von 1990 bis 2010 wurden die Feinstaubemissionen in verschiedenen Bereichen aufgezeichnet.

b) Die Feinstaubemissionswerte der Industrie lassen sich annähernd durch die Funktion E mit $E(t) = 2{,}5 \cdot t^2 - 50 \cdot t + 12500$ beschreiben.

t … Zeit in Jahren nach Jahresbeginn 1990 mit $0 \leq t \leq 20$
$E(t)$ … Emission zur Zeit t in Tonnen pro Jahr

F ist derjenige Flächeninhalt, der vom Graphen der Funktion E und der horizontalen Achse im Intervall [0; 20] eingeschlossen wird.

– Berechnen Sie den Flächeninhalt F.
– Interpretieren Sie die Bedeutung des Flächeninhalts F im gegebenen Sachzusammenhang.

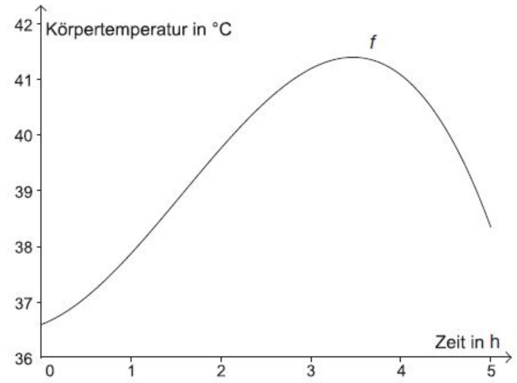
Ganzkoerperhyperthermie * (A_158)

Bei einem Therapieverfahren wird die Körpertemperatur bewusst stark erhöht (künstliches Fieber). Die nebenstehende Grafik dokumentiert näherungsweise den Verlauf des künstlichen Fiebers bei einer solchen Behandlung.

Die Funktion f beschreibt den Zusammenhang zwischen Zeit und Körpertemperatur:

$f(t) = -0{,}18 \cdot t^3 + 0{,}85 \cdot t^2 + 0{,}6 \cdot t + 36{,}6$

t ... Zeit in Stunden (h) mit $0 \leq t \leq 5$
$f(t)$ ... Körpertemperatur zur Zeit t in °C



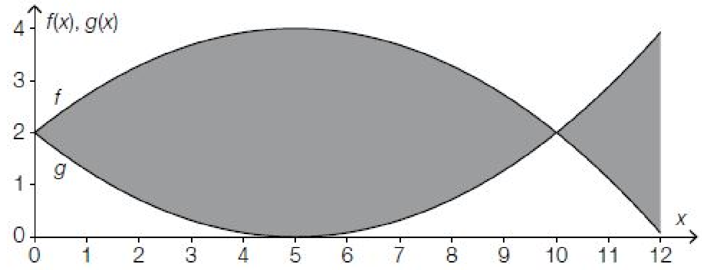
d) Die mittlere Körpertemperatur $\overline{f}$ während der 5 Stunden andauernden Behandlung soll ermittelt werden.

Die mittlere Körpertemperatur in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ ist:
$\overline{f} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\mathrm{d}t$

– Berechnen Sie die mittlere Körpertemperatur $\overline{f}$ im Intervall [0; 5].

Glaubensrichtungen und -symbole (A_187)

c) Ein Fisch-Symbol, dargestellt durch zwei gekrümmte Linien (siehe nachstehende Abbildung), spielte schon im Urchristentum eine wichtige Rolle.



Die beiden im Intervall [0; 12] dargestellten, zur Geraden $y = 2$ symmetrischen Linien wurden durch die quadratischen Funktionen f und g erzeugt.

– Stellen Sie mithilfe der obigen Abbildung die Gleichung der Funktion f auf.
– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem der Inhalt der in der obigen Abbildung eingefärbten Fläche berechnet werden kann. *[1 aus 5]*

$48 - \int_0^{12} f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$2 \cdot \left(\int_0^{10} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{10}^{12} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$	☐
$\int_0^{12} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$	☐
$2 \cdot \int_0^{12} (2 - g(x))\,\mathrm{d}x$	☐
$2 \cdot \left(24 - \int_0^{10} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{10}^{12} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$	☐

Leistung einer Solaranlage * (A_212)

b) Eine andere Solaranlage wird an einem bestimmten Tag von 7 Uhr bis 19 Uhr betrieben und ihre Leistung durch die Funktion P beschrieben, wobei gilt:

$P(t) = 0{,}007 \cdot t^4 - 0{,}165 \cdot t^3 + 0{,}972 \cdot t^2 + 1{,}221$ mit $0 \leq t \leq 12$

t ... Zeit in Stunden (h), wobei $t = 0$ der Uhrzeit 7 Uhr entspricht
$P(t)$ ... Leistung der Solaranlage zur Zeit t in kW

Die in einem Zeitintervall von der Solaranlage gelieferte Energie wird mithilfe des Integrals der Leistung in diesem Zeitintervall berechnet.

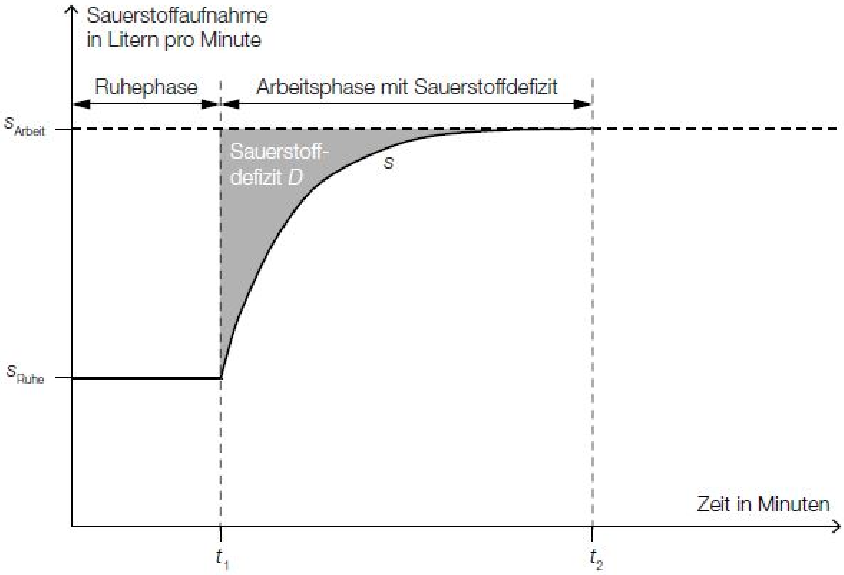
– Berechnen Sie die an diesem Tag von der Solaranlage gelieferte Energie.

Leistungsdiagnostik im Sport * (B_417)

Bei höherer Belastung benötigt der Körper mehr Sauerstoff und produziert als „Abfallprodukt" Laktat.

Ab einer gewissen Laktatkonzentration ist das Herz-Kreislauf-System nicht mehr in der Lage, die arbeitenden Muskeln mit genügend Sauerstoff zu versorgen. Diese Laktatkonzentration heißt *anaerobe Schwelle*.

c) Nach Beginn einer körperlichen Belastung beim Sport (Arbeitsphase) passt sich das Atmungssystem nur verzögert dem erhöhten Sauerstoffbedarf an. Erst nach einigen Minuten wird eine ausreichende Versorgung erreicht. Bis dahin kommt es zu einem Sauerstoffdefizit.



– Stellen Sie eine Formel auf, mit der man das Sauerstoffdefizit D (grau markierte Fläche in obiger Skizze) berechnen kann, wenn eine Gleichung der Funktion s bekannt ist.

D = ____

– Geben Sie die Einheit von D an.

Pac-Man (B_292)

Pac-Man ist ein Videospiel, das 1980 veröffentlicht wurde. Die Spielfigur Pac-Man muss Punkte in einem Labyrinth fressen, während sie von Gespenstern verfolgt wird.

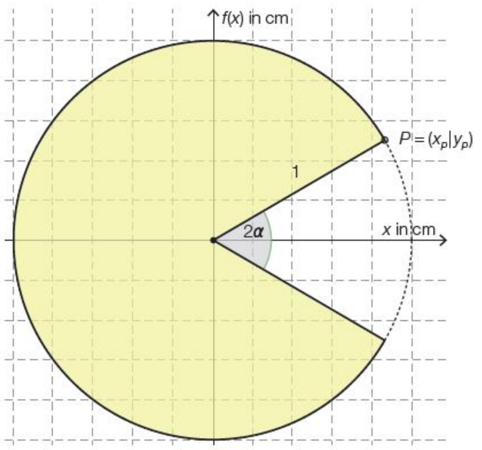


Abbildung 1: Pac-Man

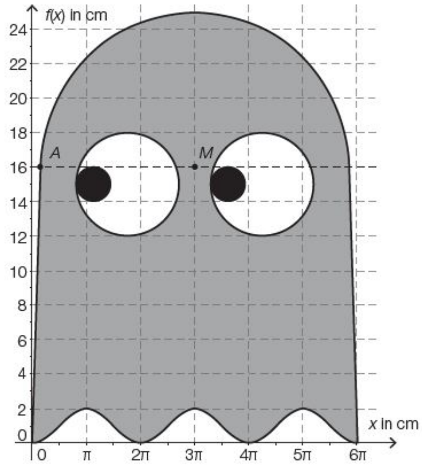


Abbildung 2: Gespenst

a) In Abbildung 1 ist Pac-Man dargestellt. Der Kreisabschnitt in der oberen Hälfte des Koordinatensystems kann mit dem Funktionsgraphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ im Intervall $-1 \le x \le x_P$ dargestellt werden.

– Veranschaulichen Sie in der Abbildung 1 den $\cos(\alpha)$.

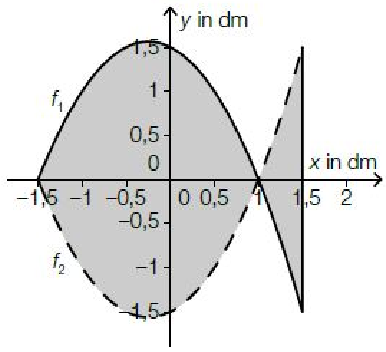
– Kennzeichnen Sie in der Abbildung 1 diejenige Fläche, die mit dem nachstehenden bestimmten Integral berechnet wird.

$$F = \int_0^{x_P} \left(\sqrt{1 - x^2} - \frac{y_P}{x_P} \cdot x\right) \mathrm{d}x$$

– Berechnen Sie den Flächeninhalt von Pac-Man mit Radius 1 cm und $\alpha = \frac{\pi}{5}$ rad.

Pinboard (A_037)

Es sollen Pinboards in Form eines Fisches angefertigt werden. Die obere und die untere Begrenzungslinie können durch die Funktionen f_1 und f_2 beschrieben werden:



Die Graphen von f_1 und f_2 sind symmetrisch bezüglich der x-Achse. Es gilt:

$$f_2(x) = x^2 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{3}{2} \text{ mit } -1{,}5 \le x \le 1{,}5$$

x, $f_1(x)$, $f_2(x)$ … Koordinaten in dm

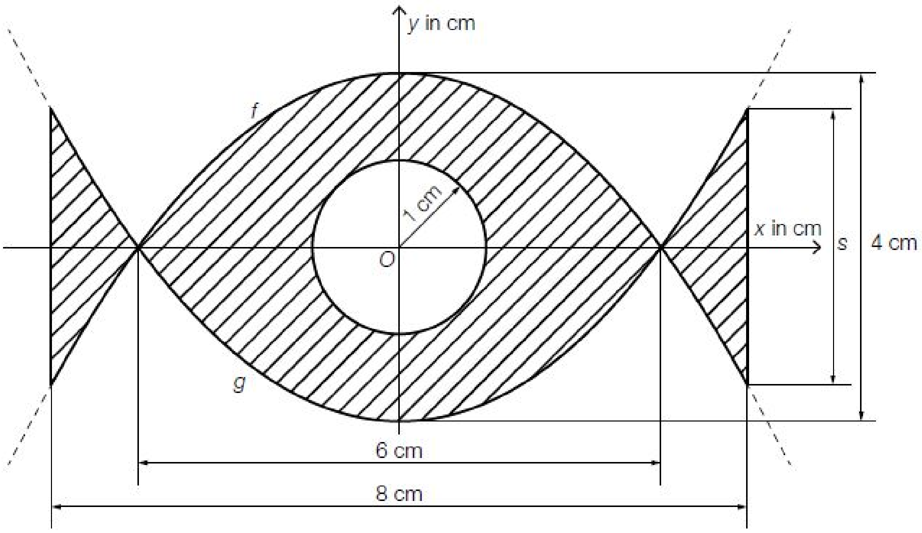
a) – Erstellen Sie eine Formel für den Flächeninhalt A des Fisches mithilfe von f_2.

$A =$ ____

– Berechnen Sie den Flächeninhalt des Fisches.

Schmuckstueck (A_064)

Ein Schmuckstück wird gemäß nachstehender Skizze in den schraffierten Teilen mit Blattgold belegt.



Die Begrenzungslinien der Blattgoldfläche sind außen die Graphen der Funktionen f und g und innen ein Kreis, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt.

$f(x) = -\frac{2}{9} \cdot x^2 + 2$

$g(x) = -f(x)$

x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

b) – Berechnen Sie den Inhalt der mit Blattgold belegten Fläche.

Schmuckstuecke (A_241)

Ein Goldschmied fertigt Schmuckstücke nach kreisrunden Designvorlagen.

b) Die kreisrunde Designvorlage für einen Armbandanhänger wird durch die in der Abbildung 2 veranschaulichte Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen von g und h geteilt.

$h(x) = \frac{8}{9} \cdot x^3 - \frac{8}{9} \cdot x$

$g(x) = a \cdot h(x) \quad \text{mit} \quad a > 0$

x, $g(x)$, $h(x)$ … Koordinaten in Zentimetern (cm)

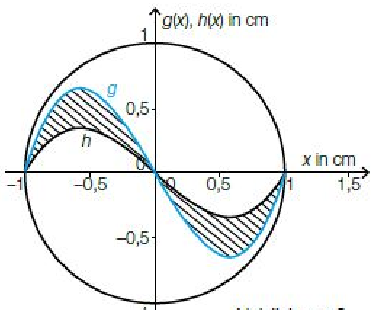


Abbildung 2

– Erklären Sie, was eine Multiplikation einer Funktion mit einem Faktor $a > 1$ bewirkt.

– Begründen Sie, warum gilt: $\int_{-1}^{1} (g(x) - h(x))\,dx = 0$

– Bestimmen Sie den Faktor a so, dass der schraffierte Flächeninhalt 0,4 cm² beträgt.

Skatepark (1) * (A_194)

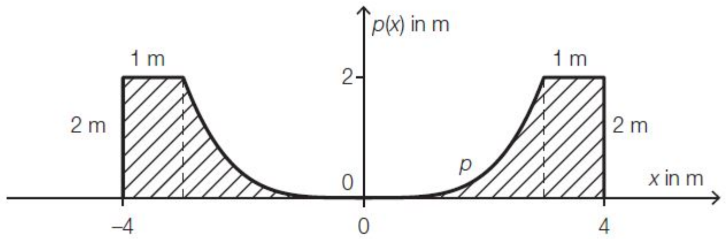
Ein *Skatepark* ist ein speziell für Skater/innen eingerichteter Bereich mit Startrampen und verschiedenen Hindernissen, die befahren werden können.

c) Für eine *Halfpipe* soll in einem Skatepark Material aufgeschüttet werden. Ein Teil des Verlaufs der Halfpipe im Querschnitt lässt sich annähernd durch die Funktion p beschreiben:

$p(x) = \frac{2}{81} \cdot x^4$ mit $-3 \leq x \leq 3$

x ... horizontale Koordinate in Metern (m)
$p(x)$ ... Höhe an der Stelle x in m

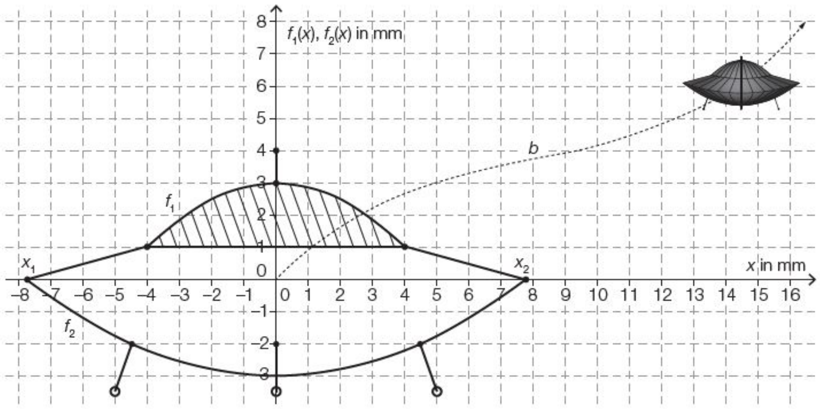
Die nachstehende Abbildung zeigt die Querschnittsfläche der Halfpipe.



– Ermitteln Sie den Inhalt der schraffierten Querschnittsfläche.

UFO (A_188)

Für ein Computerspiel wurde ein einfaches UFO konstruiert.



Die obige Abbildung zeigt eine Querschnittsfläche des UFOs. In dieser werden die Kuppel und der Unterbau durch die quadratischen Funktionen f_1 und f_2 modelliert.

$f_2(x) = \frac{x^2}{20} - 3$

x, $f_2(x)$ ... Koordinaten in Millimetern

a) – Stellen Sie mithilfe der Abbildung eine Funktionsgleichung von f_1 auf.
– Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche in der obigen Abbildung.

UFO (A_188)

b) – Ermitteln Sie die beiden Nullstellen x_1 und x_2 der Funktion f_2.
– Interpretieren Sie, was durch das Integral $\int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\,dx$ bestimmt wird.

Wellness * (A_144)

b) Im Außenbereich einer Sauna wird eine neue Terrasse mit folgender Grundfläche geplant (siehe Grafik):

In dem gegebenen Koordinatensystem wird die Rundung der Terrasse im Intervall [3; 13] durch den Graphen einer Funktion g beschrieben.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts der Grundfläche der Terrasse, wenn die Funktion g bekannt ist.

$A =$ ____

Für die Verlegung von Sandsteinfliesen auf der Terrasse werden 90 m² Fliesen eingekauft. Die Sandsteinfliesen kosten netto (ohne 20 % Umsatzsteuer) pro Quadratmeter € 56.

– Berechnen Sie die Gesamtkosten für die Sandsteinfliesen inklusive Umsatzsteuer, wenn ein Preisnachlass von 3 % gewährt wird.

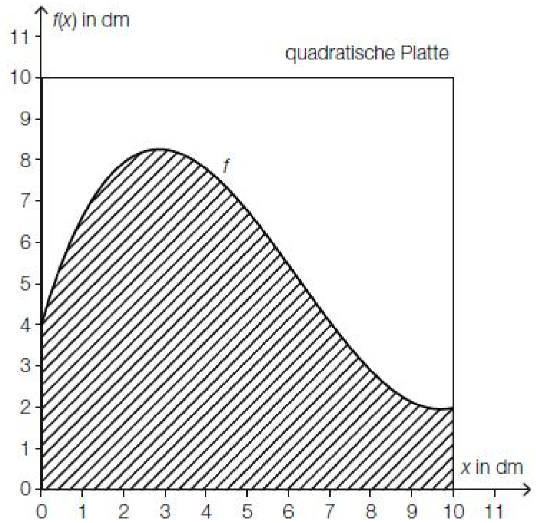
Werbedruck (A_173)

Eine Großbank erteilt einer Druckerei den Auftrag, ihre Bankenlogos anzufertigen.

a) Das Logo wird auf quadratische Platten gedruckt. Die Begrenzungslinie des Logos wird durch die Funktion f beschrieben.

$f(x) = \frac{1}{25} \cdot x^3 - \frac{3}{4} \cdot x^2 + \frac{33}{10} \cdot x + 4$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in dm



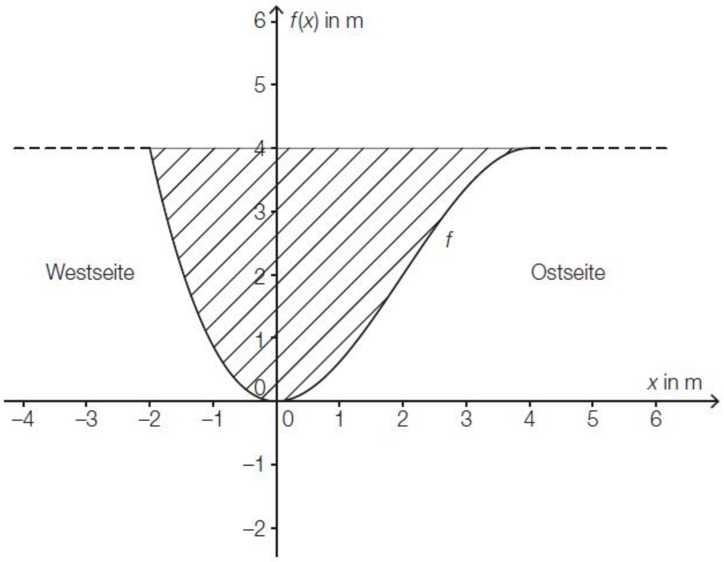
– Berechnen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Fläche.

Lösung: Am Fluss * (A_229)

a) $f''(x) = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{3}{2}$

$0 = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{3}{2} \Rightarrow x = 2$

An der Stelle $x = 2$ steigt das Querschnittsprofil auf der Ostseite am stärksten an.



Lösung: Betonschutzwand (A_171)

b) $A = \int_0^{68} h(x)\,dx$

$A = 4\,192{,}4\ldots\ cm^2 = 0{,}41924\ldots\ m^2$
$m = V \cdot \rho = 0{,}41924\ldots \cdot 4 \cdot 2{,}4 = 4\,024{,}72\ldots$ kg
$m \approx 4$ t

Die Masse dieser Betonschutzwand beträgt rund 4 t.

Lösung: Brueckenboegen (A_216)

c) $g(x) = -\frac{3}{125} \cdot x^2 + \frac{42}{25} \cdot x - \frac{72}{5}$

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
$\int_{10}^{60} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$	☒

Lösung: Feinstaubemissionen (A_180)

b) $F = \int_0^{20} (2{,}5 \cdot t^2 - 50 \cdot t + 12\,500)\,dt = 246\,666{,}6\ldots \approx 246\,667$

Im Zeitintervall [0; 20] sind insgesamt rund 246 667 Tonnen Feinstaub angefallen.

Lösung: Ganzkoerperhyperthermie * (A_158)

d) $\overline{f} = \frac{1}{5} \cdot \int_0^5 f(t)\,dt = 39{,}55... \approx 39{,}6$

Die mittlere Körpertemperatur beträgt rund 39,6 °C.

Lösung: Glaubensrichtungen und -symbole (A_187)

c) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$f(0) = 2$
$f(5) = 4$
$f(10) = 2$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a = -0{,}08$, $b = 0{,}8$, $c = 2$

$f(x) = -0{,}08 \cdot x^2 + 0{,}8 \cdot x + 2$

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
$2 \cdot \left(24 - \int_0^{10} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{10}^{12} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$	☒

Lösung: Leistung einer Solaranlage * (A_212)

b) $\int_0^{12} (0{,}007 \cdot t^4 - 0{,}165 \cdot t^3 + 0{,}972 \cdot t^2 + 1{,}221)\,\mathrm{d}t = 67{,}5288$

Lösung: Leistungsdiagnostik im Sport * (B_417)

c) $D = (t_2 - t_1) \cdot s_{\text{Arbeit}} - \int_{t_1}^{t_2} s(t)\,\mathrm{d}t$

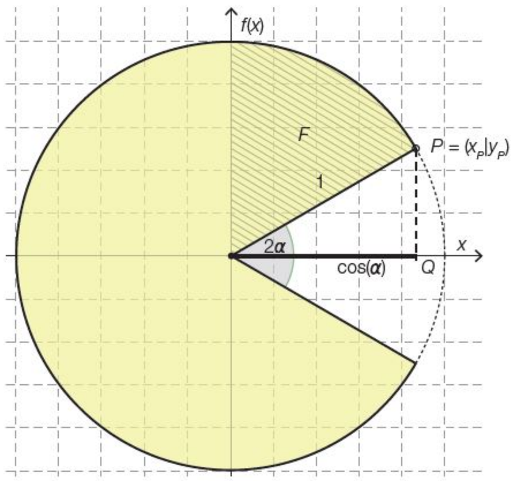
oder:

$D = \int_{t_1}^{t_2} [s_{\text{Arbeit}} - s(t)]\,\mathrm{d}t$

Die Einheit von D lautet:
$\frac{\text{L}}{\text{min}} \cdot \text{min} = \text{L}$

Lösung: Pac-Man (B_292)

a)



F_{PM} ... Flächeninhalt von Pac-Man

$F_{\text{PM}} = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4}{5} \cdot \pi = 2{,}513...$

$F_{\text{PM}} \approx 2{,}51\ \text{cm}^2$

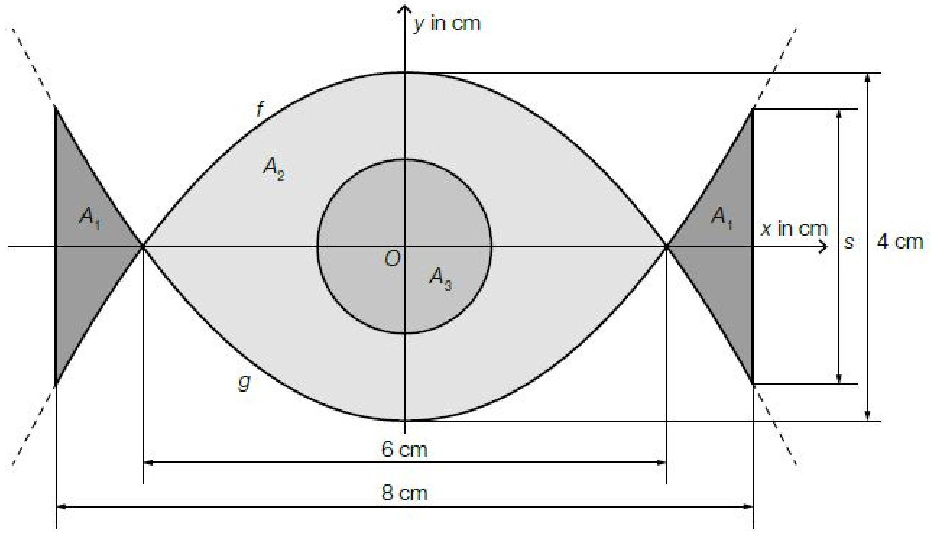
Lösung: Pinboard (A_037)

a) $A = 2 \cdot \left(-\int_{-1,5}^{1} f_2(x)\,dx + \int_{1}^{1,5} f_2(x)\,dx\right)$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$A = 5{,}91\overline{6}\ \text{dm}^2 \approx 5{,}92\ \text{dm}^2$

Lösung: Schmuckstueck (A_064)

b)



$A_1 = \int_{-4}^{-3} [g(x) - f(x)]\,dx = 1{,}48...$
$A_2 = \int_{-3}^{3} [f(x) - g(x)]\,dx = 16$
$A_3 = r^2 \cdot \pi = 1^2 \cdot \pi = \pi = 3{,}14...$

$A = 2 \cdot A_1 + A_2 - A_3 = 15{,}82...$

Man benötigt Blattgold für eine Fläche von rund 15,82 cm².

Lösung: Schmuckstuecke (A_241)

b) Die Multiplikation einer Funktion mit einem Faktor $a > 1$ bewirkt eine vertikale Streckung des Graphen um den Faktor a. (Die Null-, Extrem- und Wendestellen bleiben an der gleichen Stelle, nur deren y-Koordinaten werden mit a multipliziert.)

$\int_{-1}^{1} g(x) - h(x)\,dx = 0$, da die Fläche rechts von der y-Achse genau der Fläche links von der y-Achse, jedoch mit negativem Vorzeichen entspricht.

Zu lösen ist die Gleichung $\int_{-1}^{0} \left(\frac{8 \cdot a \cdot x^3}{9} - \frac{8 \cdot a \cdot x}{9} - \frac{8 \cdot x^3}{9} + \frac{8}{9} \cdot x\right) dx = 0{,}2 \Rightarrow a = 1{,}9$.

Lösung: Skatepark (1) * (A_194)

c) Inhalt der Querschnittsfläche zwischen $x = 0$ und $x = 3$:

$\int_0^3 \frac{2}{81} \cdot x^4\,dx = \frac{2}{81} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^3 = 1{,}2$

Inhalt der gesamten Querschnittsfläche: $A = 2 \cdot (2 + 1{,}2) = 6{,}4$

Der Inhalt der Querschnittsfläche beträgt 6,4 m².

Lösung: UFO (A_188)

a) $f_1(x) = a \cdot x^2 + 3$. Einsetzen eines Punktes ergibt $a = -\frac{1}{8}$.
$2 \cdot \left(\int_0^4 f_1(x)\,dx - 4\right) = 10{,}66...$
Der Inhalt der schraffierten Fläche beträgt rund 10,7 mm².

Lösung: UFO (A_188)

b) Aus $0 = \frac{x^2}{20} - 3$ folgt $x_{1,2} = \pm\sqrt{60} \approx \pm 7{,}75$.
Das Integral entspricht dem negativen Wert der Fläche zwischen x-Achse und dem Funktionsgraphen von f_2.

Lösung: Wellness * (A_144)

b) $A = 18 + \int_3^{13} g(x)\,\mathrm{d}x$

$90 \cdot 56 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}97 = 5866{,}56$

Die Gesamtkosten betragen € 5.866,56.

Lösung: Werbedruck (A_173)

a) $A = \int_0^{10} \left(\frac{1}{25} \cdot x^3 - \frac{3}{4} \cdot x^2 + \frac{33}{10} \cdot x + 4\right) \mathrm{d}x = 55\ \mathrm{dm}^2$