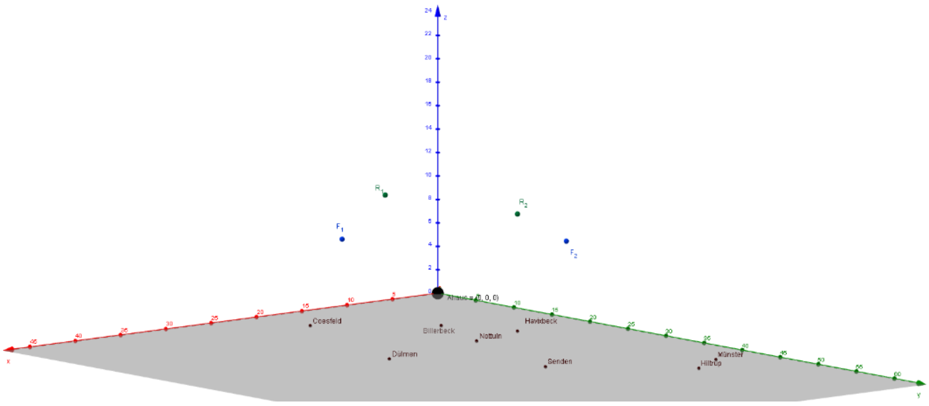
Modell-Entwicklung

Du stellst ein passendes mathematisches Modell bereit, mit dem die Flugüberwachung arbeiten kann.

(Geradengleichungen aufstellen.)

Ein Informant aus Ahaus $(0,0,0)$ kennt die Positionen der Flugzeuge um 10:28 und um 10:30.



Das aus Nordwesten kommende Flugzeug hat um 10:28 die Position $R_1(10,5,10)$. Es ist also 10 km auf der x-Achse, 5km auf der y-Achse vom Beobachter aus entfernt und fliegt auf Reiseflughöhe (*10 km*). Um 10:30 ist das Flugzeug bei $R_2(8,20,10)$

Das aus Südwesten kommende Flugzeug ist um 10:28 bei $F_1(24,16,9)$, um 10:30 wird es bei $F_2(12.6, 31.9,9.6)$ geortet.

(1) Argumentiere ohne Rechnung, warum sich das nach Finnland fliegende Flugzeug im Steigflug befindet!

(2) Ermittle die beiden Geradengleichungen *g* und *h*, die die Flugbahnen der beiden Flugzeuge beschreiben.

(3) Kontrolliere dein Modell mit der GeoGebra-Datei „*Crash_Version_A.ggb*“. Tausche dich auch mit einem/r anderen Modellierer/in aus.

(4) Hilf deinen Gruppenmitgliedern!

Flugüberwachung: Analyse I

✷✷

Du ermittelst, ob es zu einem Crash kommt.

(Lagebeziehungen von Geraden im Raum.)

Ein Kollege hat dir folgendes Modell vorgelegt, das die Flugbahnen der Flugzeuge beschreibt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -11.4 \\ 15.9 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

t bzw. s geben die Zeit (im 2-min-Takt) an.
t = 0 entspricht also 10:28,
t = 1 entspricht 10:30

(1) Bestimme die Positionen der Flugzeuge um 10:28 und um 10:32.

(2) Untersuche die Lagebeziehung der beiden Geraden und gib – falls vorhanden – den gemeinsamen Schnittpunkt an.

(3) Begründe mit Hilfe von (2), ob es zu einem Zusammenstoß kommt!

(4) Kontrolliere deine Ergebnisse mit der GeoGebra-Datei *„Crash_Version_B.ggb“*. Tausche dich auch mit einem/r anderen Analysten/in aus!

(5) <u>Sprinteraufgabe</u>: Bestimme die Uhrzeiten, wann die jeweiligen Flugzeuge den gemeinsamen Schnittpunkt durchfliegen.

Flugüberwachung: Analyse II

Du bestimmst die Abstände zwischen den Flugzeugen. Dabei wirst du eine spannende Verbindung zur Analysis entdecken!

(Abstände zwischen Punkten im Raum.)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -11.4 \\ 15.9 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

t bzw. s geben die Zeit (im 2-min-Takt) an.
t = 0 entspricht also 10:28,
t = 1 entspricht 10:30

Eine Analystin aus der Flugüberwachung hat aus den gegebenen Geradengleichungen ermittelt, dass es zu keinem Zusammenstoß kommt. Zwar fliegen die Flugzeuge durch einen gemeinsamen Schnittpunkt, dies jedoch zu unterschiedlichen Zeiten.

Dennoch ist es interessant zu erfahren, wie weit die Flugzeuge zu den unterschiedlichen Zeiten voneinander entfernt sind.

(1) Mach dich zunächst mit der GeoGebra-Datei „Crash_Version_C.ggb" vertraut. Experimentiere mit dem Schieberegler, mit dem du den Parameter *t* verändern kannst.

(2) Die Punkte $R = \begin{pmatrix} 10-2t \\ 5+15t \\ 10 \end{pmatrix}$ und $F = \begin{pmatrix} 24-11.4t \\ 16+15.9t \\ 9+0.6t \end{pmatrix}$ geben die Positionen der beiden Flugzeuge bezüglich des Zeitparameters *t* an. Zeige, dass der Verbindungsvektor $\overrightarrow{d_t} = \overrightarrow{RF} = \begin{pmatrix} 14-9.4t \\ 11+0.9t \\ 0.6t-1 \end{pmatrix}$ ist. Erzeuge diesen auch mit GeoGebra.

(3) Begründe, dass die Länge des Vektors $\overrightarrow{d_t}$ der Entfernung der beiden Flugzeuge zum Zeitpunkt t entspricht. Berechne diese anschließend für $t = 0$.

(4) Erzeuge den Punkt *P = (t, Länge[a])*, wobei a der Name des Verbindungsvektors $\overrightarrow{RF}$ ist. Schalte die Spur des Punktes P ein (rechte Maustaste auf den Punkt). Bestimme nun mit dem Schieberegler, für welchen Wert von *t* der Abstand der Flugzeuge minimal ist. Wie groß dort der Abstand in Metern?

(5) Sprinteraufgabe: Die Flugsicherung möchte exakte Werte des minimalen Abstands! Glücklicherweise hilft uns dabei die Differentialrechnung (Analysis).

Die Länge des Vektors d_t ist $|d_t| = \left|\begin{pmatrix} 14-9.4t \\ 11+0.9t \\ 0.6t-1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{89{,}53t^2 - 244{,}6t + 318}$ = d(t). Das ist eine Funktion, die wir mit Hilfe der Differentialrechnung untersuchen können ☺

Erinnerung: Will man das Minimum einer Funktion bestimmen, muss man die Nullstellen der Ableitungsfunktion ermitteln. Da die Wurzel aus dem Minimum immer noch das Minimum bleibt (man sagt auch, die Wurzelfunktion ist monoton), genügt es, das Minimum des Terms unter der Wurzel zu bestimmen.

Bestimme das Minimum von $f(t) = 89{,}53t^2 - 244{,}6t + 318$ und ermittle so exakte Werte für Aufgabe (4)!