

Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 28 - teorema fundamental del cálculo integral

1. Sea $f(x) = \frac{\ln(x)}{2x}$ para $x > 0$. Y sea $F(x)$ la primitiva de $f(x)$, que cumple $F(1) = 2$.

a) Calcula $F'(e)$.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a $F(x)$ en el punto de abscisa $x = e$.

a) El Teorema fundamental del cálculo integral afirma: si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, la función definida por $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es una función continua y derivable, que a la vez es una primitiva de $f(x)$ y cumple la siguiente igualdad: $F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$. Es decir, la derivada de $F(x)$ coincide con la función $f(x)$.

Por lo tanto $\rightarrow F'(e) = f(e) = \frac{\ln(e)}{2e} = \frac{1}{2e}$

b) Para obtener la recta tangente a una función $F(x)$ en un valor de abscisa $x = x_0$, necesitamos el punto (x_0, y_0) y la pendiente m de la recta en dicho punto.

La pendiente coincide con el valor de la derivada de la función en el punto. Y como razonamos en el apartado anterior $F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b] \rightarrow F'(e) = f(e) = \frac{1}{2e} = m$.

El punto $(x_0, y_0) = (e, y_0) \rightarrow$ Necesitamos obtener la imagen de $x = e$.

Nos falta, en consecuencia, la imagen de $x = e$. ¿Cómo obtener la fórmula de $F(x)$ donde evaluar $x = e$? Integrando $f(x)$, ya que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.

$$F(x) = \int f(x) dx \rightarrow F(x) = \int \frac{\ln(x)}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2 \cdot \ln(x)}{x} dx = \frac{1}{4} \ln^2|x| + C$$

Donde hemos resuelto la integral inmediata recordando que la derivada de $\ln(x)$ es $\frac{1}{x}$.

De la familia de primitivas $F(x) = \frac{1}{4} \ln^2(x) + C$ elegimos la que cumple la condición del enunciado

$$F(1) = 2 \rightarrow \frac{1}{4} \ln^2(1) + C = 2 \rightarrow C = 2$$

$$F(x) = \frac{1}{4} \ln^2(x) + 2 \rightarrow \text{evaluamos } x = e \rightarrow F(e) = \frac{1}{4} \ln^2(e) + 2 = \frac{9}{4} \rightarrow \text{punto } \left(e, \frac{9}{4}\right)$$

La ecuación punto-pendiente de la recta solución resulta:

$$\frac{1}{2e} = \frac{y - \frac{9}{4}}{x - e}$$

2. Obtener una función derivable $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ y sabiendo que $f(1) = 1$

Debemos obtener una función $f(x)$ a partir de su función derivada $f'(x)$. Es decir, $f(x)$ es una primitiva de $f'(x)$.

Por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral sabemos que $f(x) = \int_a^x f'(t) dt$ con $f'(x)$ continua en $x \in [a, b]$. Es decir, la integral y la derivada son procesos inversos. Si integramos $f'(x)$ en cada intervalo, obtendremos $f(x)$.

Un detalle importante: la función $f(x)$ es derivable, por lo que también será continua. Y este detalle lo usaremos al aplicar las condiciones de continuidad en el punto frontera de la función a trozos.

La función $f'(x)$ es continua en toda la recta real, ya que en $x < 0$ la función es polinómica y en $x > 0$ la función es exponencial más polinómica. En el punto frontera $x = 0$ la función es continua, ya que $f'(0) = 0$, los límites laterales son iguales $L^+ = L^- = L = 0$ y el límite coincide con el valor de la función en el punto.

Integremos en cada tramo de la función a trozos.

$$\text{Si } x < 0 \rightarrow f(x) = \int (x^2 - 2x) dx \rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + C$$

$$\text{Si } x \geq 0 \rightarrow f(x) = \int (e^x - 1) dx \rightarrow f(x) = e^x - x + D$$

$$\text{De la condición del enunciado } f(1) = 1 \rightarrow e - 1 + D = 1 \rightarrow D = 2 - e$$

El enunciado afirma que la función $f(x)$ es derivable. Y esto implica, a su vez, que también será continua. Por lo tanto, en $x = 0$ los límites laterales en ese punto deben coincidir y ser iguales al valor de la función en ese punto (condición de continuidad de una función a trozos en un punto frontera).

$$f(0) = e^0 - 0 + 2 - e = 3 - e$$

$$L^- = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + C \right) = C, \quad L^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - x + 2 - e) = 1 + 2 - e = 3 - e$$

$$\text{Igualando ambos límites laterales } \rightarrow C = 3 - e$$

$$\text{La función solución resulta } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + 3 - e & \text{si } x < 0 \\ e^x - x + 2 - e & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[2,3]$ y $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ tal que $F(2)=1$ y $F(3)=2$. Calcular:

a) $\int_2^3 f(x) dx$

b) $\int_2^3 (5 \cdot f(x) - 7) dx$

c) $\int_2^3 F^2(x) \cdot f(x) dx$

a) Si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$, por el Teorema fundamental del cálculo integral sabemos que $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ y $F'(x) = f(x)$. Al aplicar la regla de Barrow en el intervalo $[a, b]$, se cumple $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

En nuestro ejercicio, al aplicar la regla de Barrow en el intervalo $[2,3]$:

$$\int_2^3 f(x) dx = [F(x)]_2^3 = F(3) - F(2) = 2 - 1 = 1$$

b) $I = \int_2^3 (5 \cdot f(x) - 7) dx = 5 \int_2^3 f(x) dx - 7 \int_2^3 dx = 5[F(x)]_2^3 - 7[x]_2^3 = 5 \cdot (F(3) - F(2)) - 7 \cdot (3 - 2)$
 $I = 5 \cdot (2 - 1) - 7 \cdot 1 = 5 - 7 = -2$

Donde hemos utilizado la aplicación de la regla de Barrow del apartado anterior.

c) Del Teorema Fundamental sabemos que se cumple: $F'(x) = f(x)$. Por lo tanto:

$$I = \int_2^3 F^2(x) \cdot f(x) dx = \int_2^3 F^2(x) \cdot F'(x) dx = \left[\frac{1}{3} F^3(x) \right]_2^3$$

Donde nos damos cuenta que dentro de la integral definida tenemos la potencia de una función por la derivada de esa función. Aplicamos Barrow nuevamente en el intervalo $[2,3]$:

$$I = \frac{1}{3} \cdot (F^3(3) - F^3(2)) = \frac{1}{3} \cdot (2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}$$

4. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$ sabiendo que $f(0)=0$ y $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$ para $x>-1$.

La ecuación punto-pendiente de una recta de pendiente m que pasa por el punto (x_0, y_0) es:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Como la recta buscada es tangente a la función en $x=1$, la pendiente de la recta será igual a la derivada de la función evaluada en $x=1 \rightarrow f'(1) = \frac{(1-1)^2}{1+1} = 0 \rightarrow m=0$.

Si $x_0=1$ entonces $y_0=f(1)$, ya que la función y la recta tangente coinciden en el punto $(1, f(1))$.

Para obtener el valor de la imagen $f(1)$ debemos integrar la función derivada $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$, para conseguir la función primitiva $f(x)$. La constante de integración inherente al proceso de integración podemos determinarla gracias a la condición del enunciado $f(0)=0$.

Si $f(x)$ una primitiva de $f'(x)$ podemos aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo Integral. Es decir, $f(x)$ es una primitiva de $f'(x)$, cumpliendo que $f(x)$ es continua y derivable en $x \in [a, b]$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral sabemos que $f(x) = \int_a^x f'(t) dt$ con $x \in [a, b]$.

Es decir, la integral y la derivada son procesos inversos. Si integramos $f'(x)$, obtendremos $f(x)$.

$$f(x) = \int \frac{(x-1)^2}{x+1} dx = \int \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} dx$$

Tenemos un cociente de polinomios. Al ser el grado del numerador mayor que el grado del denominador, realizamos la división.

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{divisor}} = \text{Cociente} + \frac{\text{Resto}}{\text{divisor}} \rightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} = x - 3 + \frac{4}{x+1}$$

$$f(x) = \int (x-3) dx + \int \frac{4}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 4 \ln|x+1| + C$$

La constante de integración queda definida de manera única con la condición $f(0)=0 \rightarrow C=0$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 4 \ln|x+1|$$

Una vez obtenida la función primitiva, podemos calcular $f(1)$

$$f(1) = \frac{1}{2} - 3 + 4 \ln|2| = \frac{-5}{2} + 4 \ln(2) \simeq 0,27$$

La recta tangente a la función en $x = 1$ resulta una recta horizontal (pendiente nula).

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \rightarrow 0 = \frac{y - f(1)}{x - 1} \rightarrow y = f(1) \rightarrow y \simeq 0,27$$

5. Considera la función $F : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ definida por $F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt$. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x=1$.

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente a la función F en el punto $x=1$ es:

$$F'(1) = \frac{y - F(1)}{x - 1}$$

El Teorema fundamental del cálculo integral afirma: si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, la función definida por $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es una función continua y derivable, que a la vez es una primitiva de $f(x)$ y cumple la siguiente igualdad: $F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$. Es decir, la derivada de $F(x)$ coincide con la función $f(x)$.

En nuestro ejercicio, $f(t) = 2t + \sqrt{t}$ y $F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt$.

Por lo tanto, $F'(1) = f(1) \rightarrow F'(1) = 2 \cdot 1 + \sqrt{1} = 3$

La recta queda:

$$3 = \frac{y - F(1)}{x - 1}$$

Nos falta obtener la imagen de $F(x)$ en el punto de abscisa $x=1$. Es decir:

$F(1) = \int_0^1 (2t + \sqrt{t}) dt \rightarrow$ Aplicamos Barrow a la integral definida.

$$F(1) = \left[\frac{2t^2}{2} + \frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^1 \rightarrow F(1) = \left[1 + \frac{2}{3} - (0 + 0) \right] = \frac{5}{3}$$

Quedando la recta:

$$3 = \frac{y - \frac{5}{3}}{x - 1} \rightarrow 3x - 3 = y - \frac{5}{3} \rightarrow y = 3x - \frac{4}{3}$$

6. Sea la función $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x (\text{sen}(t^2)) dt$. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x F(x)}{\text{sen}(x^2)}$.

Al evaluar en el límite, obtenemos indeterminación 0/0. Por lo que podemos aplicar la regla de L'Hôpital. Derivamos numerador y denominador por separado, y volvemos a evaluar.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) + x \cdot F'(x)}{\cos(x^2) \cdot (2x)}$$

En el numerador, debemos evaluar la función F(x) en x=0. Como esta función está definida a partir de una integral definida, al hacer x=0, tendremos la integral definida entre x=0 y x=0. Y eso es igual a 0 (la integral definida en un intervalo formado por un punto, vale 0).

Por lo tanto, al evaluar, obtenemos nuevamente la indeterminación 0/0. Por lo que aplicamos otra vez L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x) + F'(x) + x \cdot F''(x)}{-\text{sen}(x^2) \cdot (2x) \cdot (2x) + \cos(x^2) \cdot 2}$$

Si evaluamos nuevamente, llegamos a la siguiente expresión entre numerador y denominador.

$$\frac{2 \cdot F'(0)}{2} = F'(0)$$

Es decir, tras evaluar, el límite se resume a evaluar la derivada de la función F(x) en el punto x=0.

Aquí entra el Teorema fundamental del cálculo integral, que nos afirma que la integral es el proceso inverso de la derivada. Y se cumple que si F(x) es una primitiva de la función $f(t) = \text{sen}(t^2)$, la derivada de F(x) resulta:

$$F'(x) = \text{sen}(x^2)$$

Que al evaluar en x=0, tendremos:

$$F'(0) = \text{sen}(0) = 0$$

7. Sea la función $f(x) = 1 + \int_0^x t \cdot e^t dt$. Estudiar su curvatura.

Podemos operar de dos maneras.

Primero, resolviendo la integral definida en el intervalo $[0, x]$ con ayuda de la regla de Barrow.

$$\int_0^x t \cdot e^t dt \rightarrow \text{aplicamos partes}$$

$$u = t \rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^t \rightarrow v = e^t$$

$$\int_0^x t \cdot e^t dt = [t \cdot e^t]_0^x - \int_0^x e^t dt = [x \cdot e^x - 0] - [e^x - e^0] = x \cdot e^x - e^x = (x-1) \cdot e^x$$

Por lo tanto:

$$f(x) = 1 + \int_0^x t \cdot e^t dt = 1 + (x-1) \cdot e^x \rightarrow \text{dominio toda la recta real}$$

Obtenemos la segunda derivada.

$$f'(x) = 0 + 1 \cdot e^x + (x-1) \cdot e^x = x \cdot e^x$$

$$f''(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x$$

Condición necesaria de punto de inflexión: segunda derivada igual a cero. Así obtenemos los candidatos a puntos de inflexión.

$$f''(x) = 0 \rightarrow (x+1) \cdot e^x = 0 \rightarrow x = -1 \text{ ya que la exponencial nunca se anula.}$$

Evaluamos la segunda derivada a la izquierda y a la derecha del candidato a punto de inflexión.

$$f''(-10) < 0 \rightarrow f(x) \text{ cóncava}$$

$$f''(+10) > 0 \rightarrow f(x) \text{ convexa}$$

Una **segunda forma de razonar** es aplicando el Teorema Fundamental del cálculo integral, ya que al derivar la función original nos encontramos con la derivada de un integral definida.

$$f(x) = 1 + \int_0^x t \cdot e^t dt \rightarrow f'(x) = 0 + \frac{d}{dx} \left[\int_0^x t \cdot e^t dt \right]$$

Por el Teorema fundamental, la derivada de la integral de una función en un intervalo $[0, x]$, donde la función es continua, coincide con el valor de la función que estamos integrando evaluada en el límite superior del intervalo.

$$f'(x) = x \cdot e^x$$

Y a partir de aquí hemos llegado a la misma derivada que en el razonamiento anterior, por lo que el resto del ejercicio se resolvería exactamente igual.