

# Ruimtemeetkunde

www.karelappeltans.be

November 24, 2023

## Contents

<b>1</b>	<b>Vectoren</b>	<b>2</b>
1.1	Vectoren in 2D . . . . .	2
1.2	Punt in 3D . . . . .	4
1.3	Vectoren in 3D . . . . .	4
1.3.1	puntvector . . . . .	4
1.3.2	willekeurige vector . . . . .	4
1.4	norm en scalair product . . . . .	5
<b>2</b>	<b>vectorruimte</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>rechte</b>	<b>6</b>
3.1	vergelijking rechte in 2D . . . . .	6
3.2	situatie in 3D . . . . .	6
3.3	onderlinge stand twee rechten . . . . .	7
3.3.1	mogelijke gevallen . . . . .	7
3.3.2	snijdende rechten . . . . .	7
<b>4</b>	<b>vlak</b>	<b>8</b>
4.1	begripsvorming . . . . .	8
4.2	onderlinge stand twee vlakken . . . . .	8
4.3	vlakkenwaaier . . . . .	9
4.4	onderlinge stand rechte en vlak . . . . .	9
<b>5</b>	<b>loodrechte stand</b>	<b>10</b>
5.1	norm&scalair product van twee vectoren . . . . .	10
5.2	loodrechte stand van twee rechten . . . . .	10
5.3	normaalvectoren van vlakken . . . . .	11
5.4	loodrechte stand van twee vlakken . . . . .	11
<b>6</b>	<b>afstanden</b>	<b>11</b>
6.1	afstand tussen twee punten . . . . .	11
6.2	afstand tussen punt en rechte . . . . .	12
6.3	afstand tussen twee kruisende rechten . . . . .	12
6.4	afstand tussen punt en vlak . . . . .	13
<b>7</b>	<b>hoeken</b>	<b>13</b>
7.1	tussen 2 rechten . . . . .	13
7.2	tussen 2 snijdende vlakken . . . . .	14
7.3	tussen een rechte en een vlak . . . . .	14
<b>8</b>	<b>meetkundige plaatsen</b>	<b>15</b>
8.1	bollen . . . . .	15
8.2	middelloodvlakken . . . . .	15
8.3	bissectorvlakken . . . . .	16
8.4	zadeloppervlak . . . . .	16

<b>9 Oefeningen</b>	<b>16</b>
9.1 vectoren	16
9.2 vectorruimten	18
9.3 rechten	18
9.4 vlakken	19
9.5 loodrechte stand	20
9.6 afstanden	21
9.7 hoeken	22
9.8 Meetkundige plaatsen	22
9.9 Toepassing	22

# 1 Vectoren

## 1.1 Vectoren in 2D

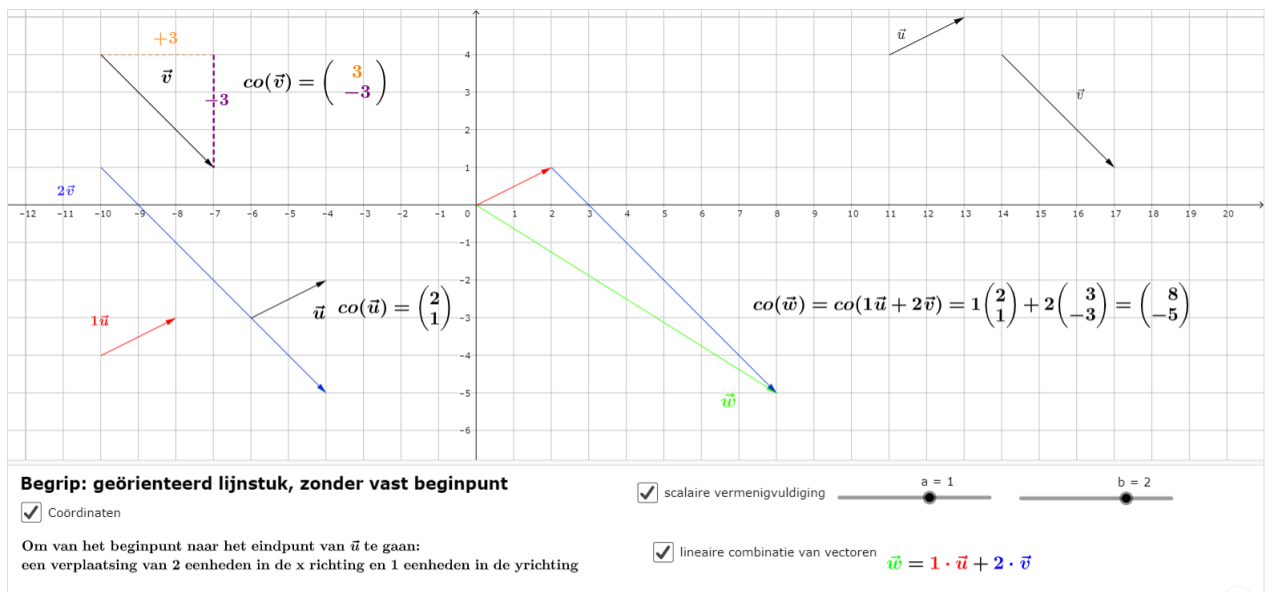


Figure 1: <https://www.geogebra.org/m/cRmm4Ez4>

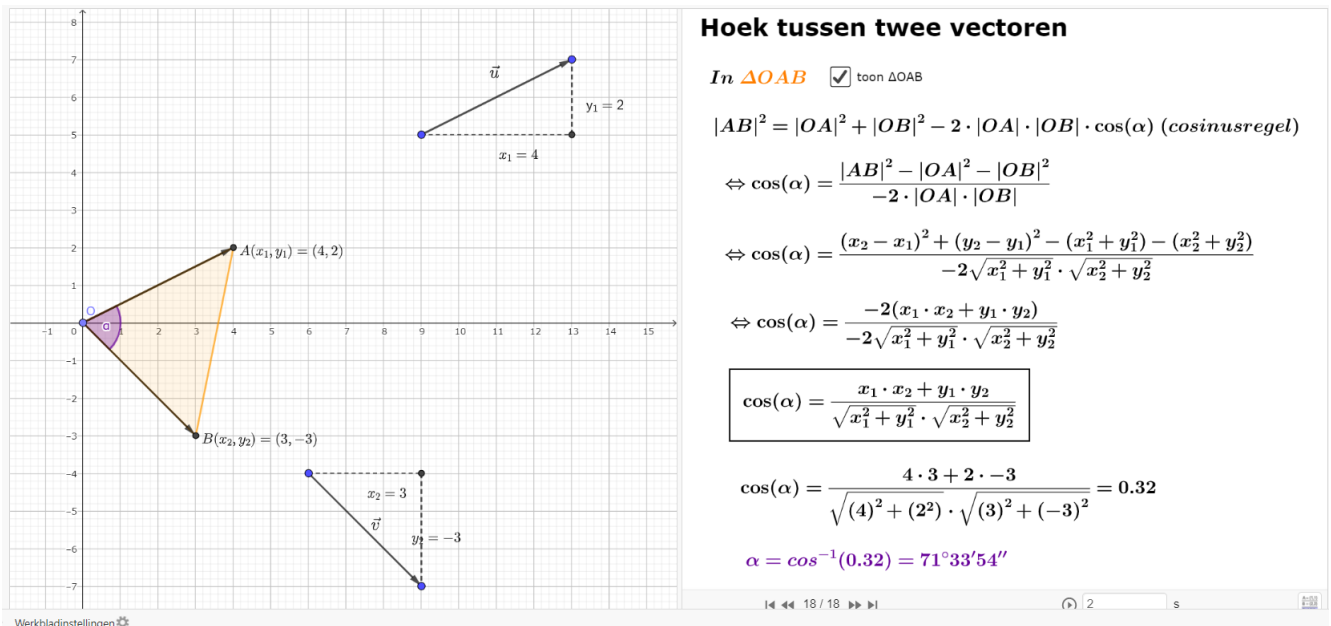


Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/cRmm4Ez4>

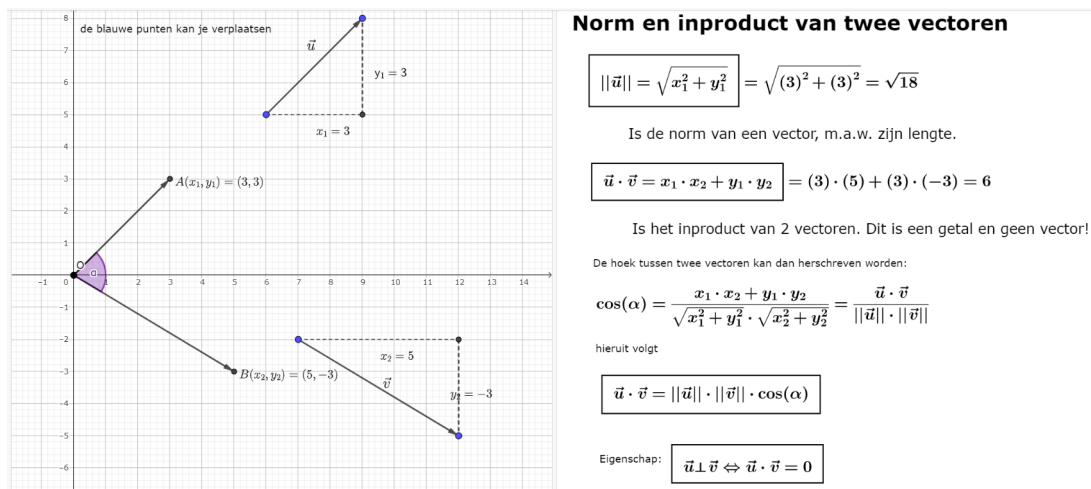


Figure 3: <https://www.geogebra.org/m/cRmm4Ez4>

## 1.2 Punt in 3D

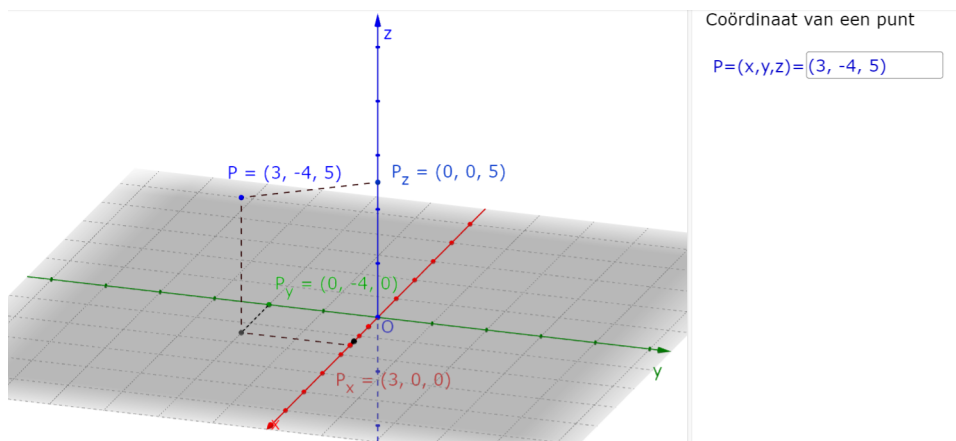


Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/Up7HKEmg>

## 1.3 Vectoren in 3D

### 1.3.1 puntvector

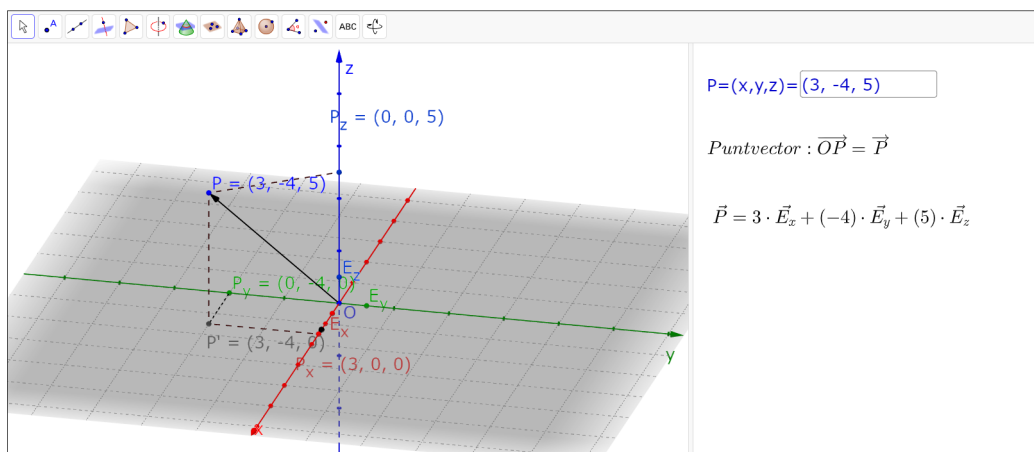


Figure 5: <https://www.geogebra.org/m/Up7HKEmg>

### 1.3.2 willekeurige vector

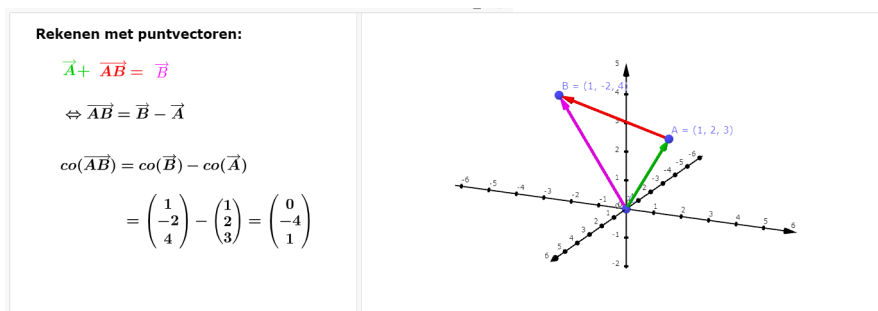


Figure 6: <https://www.geogebra.org/m/msnt9fvp>

## 1.4 norm en scalair product

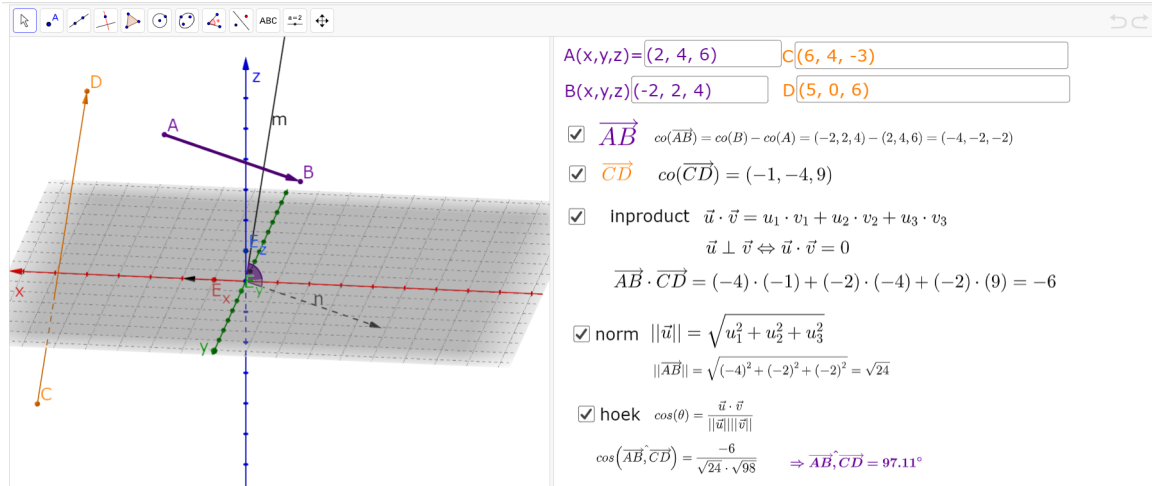


Figure 7: <https://www.geogebra.org/m/Up7HKEmg>

## 2 vectorruimte

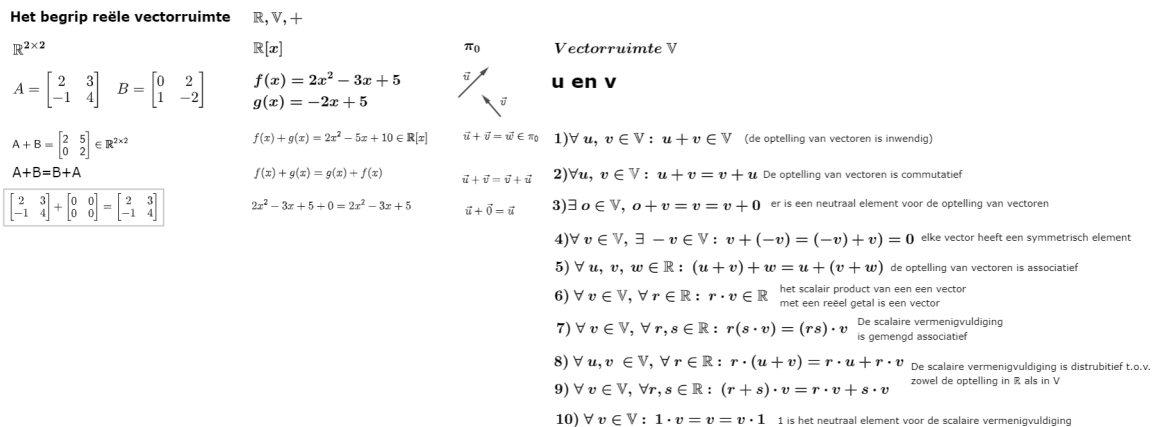


Figure 8: <https://www.geogebra.org/m/fgsz7ma5>

### 3 rechte

#### 3.1 vergelijking rechte in 2D

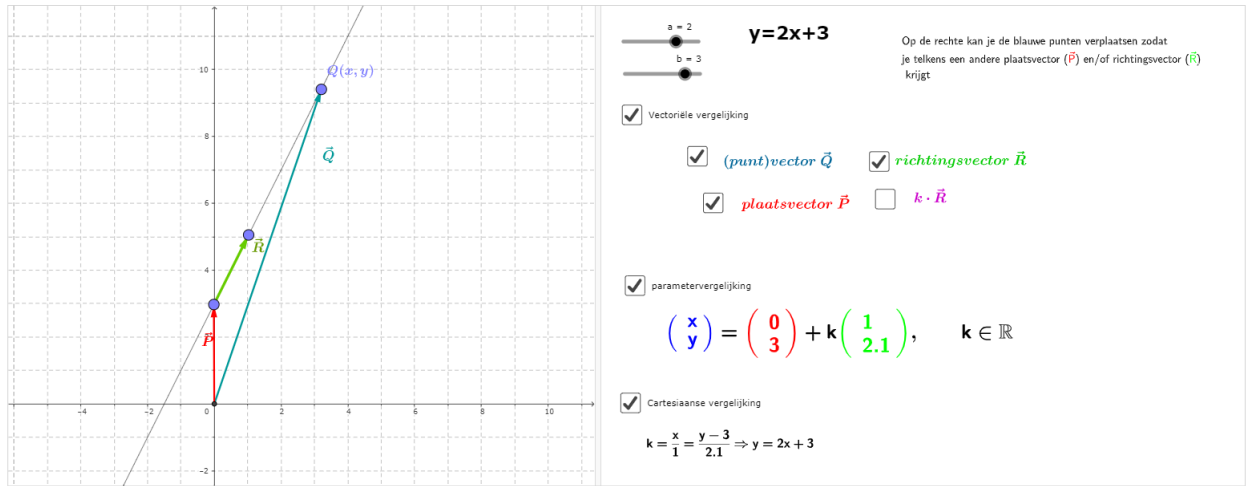


Figure 9: <https://www.geogebra.org/m/vzmgsnny>

#### 3.2 situatie in 3D

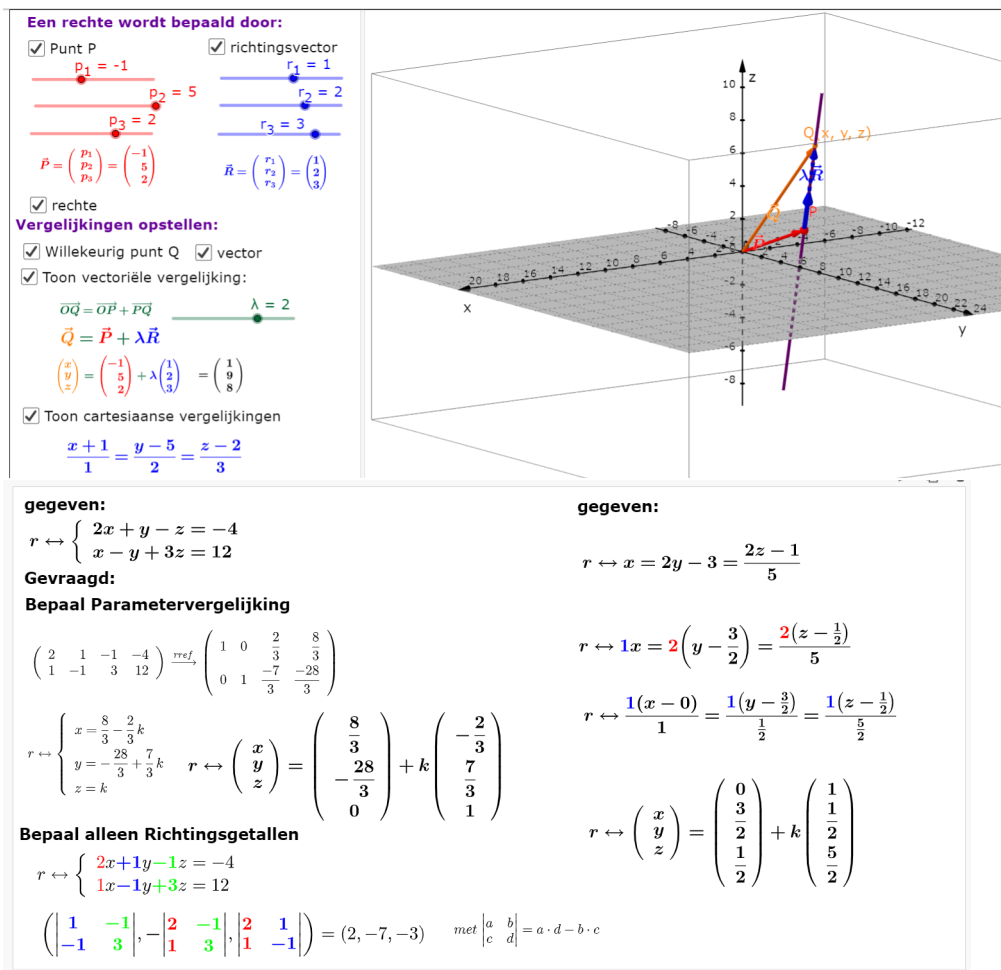


Figure 10: <https://www.geogebra.org/m/h2NSnEu4>

### 3.3 onderlinge stand twee rechten

#### 3.3.1 mogelijke gevallen

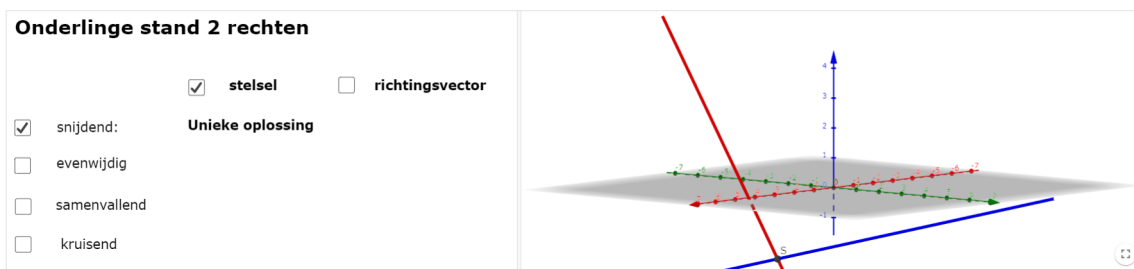


Figure 11: <https://www.geogebra.org/m/tmzxrbbh>

#### 3.3.2 snijdende rechten

$r_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 
 $r_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

snijpunt:
 
$$\begin{cases} 6 + \lambda = 5 - \mu \\ -1 - \lambda = -3 + 4\mu \\ 4 + 3\lambda = -3 + \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = -1 \\ -\lambda - 4\mu = -2 \\ 3\lambda - \mu = -7 \end{cases}$$

$rref \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -7 & -7 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \mu = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 6 + (-2)1 = 4 \\ y = -1 + (-2)(-1) = 1 \\ z = 4 + (-2)3 = -2 \end{cases} \quad \mathbf{P(4, 1, -2)}$$

Bepaal hoek:

Figure 12: <https://www.geogebra.org/m/tmzxrbbh>

## 4 vlak

### 4.1 begripsvorming

**Vergelijking vlak**

Een vlak wordt bepaald door 3 niet collineaire punten

$A(-4, -12, 5)$   
 $B(-4, -6, 4)$   
 $C(4, -6, 3)$

toon vlak

**Vectoriële vergelijking vlak**

vector AB  
 vector AC  
 vector AQ

$\vec{AQ} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$

toon vergelijking

$\vec{OQ} = \vec{OA} + \vec{AQ}$   
 $\vec{Q} = \vec{A} + \vec{AQ}$   
 $\vec{Q} = \vec{A} + \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$

Parametervergelijk vlak

$\alpha : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Cartesiaanse vergelijking vlak

$\alpha \leftrightarrow \begin{vmatrix} x+4 & 0 & 8 \\ y+12 & 6 & 6 \\ z-5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$   
 $\alpha \leftrightarrow -6x - 8y - 48z = -120$

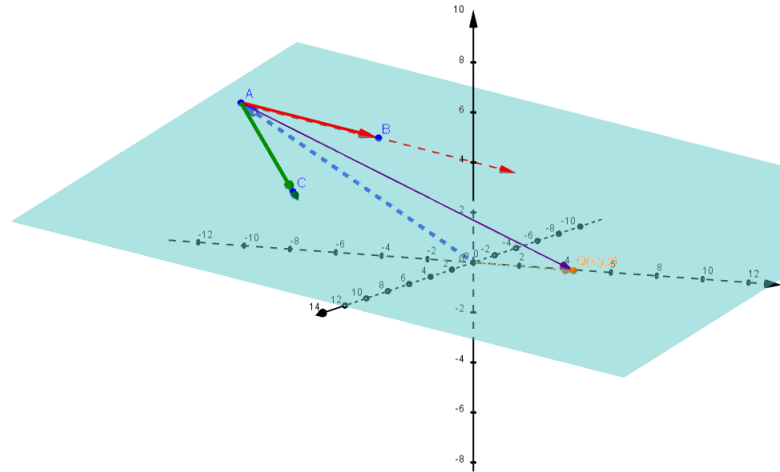


Figure 13: <https://www.geogebra.org/m/tyxzar6k>

### 4.2 onderlinge stand twee vlakken

**Onderlinge stand twee vlakken**

wat valt op

snijgend  $\alpha \leftrightarrow 2x + 3y + z = 4$   
 $\beta \leftrightarrow x - y + z = 5$   $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{4}{5}$

evenwijdig  $\alpha \leftrightarrow 2x + 3y + z = 4$   
 $\beta \leftrightarrow 4x + 6y + 2z = 5$   $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \neq \frac{4}{5}$

samenvallend  $\alpha \leftrightarrow 2x + 3y + z = 4$   
 $\beta \leftrightarrow -4x - 6y - 2z = -8$   $\frac{2}{-4} = \frac{3}{-6} = \frac{1}{-2} = \frac{4}{-8}$

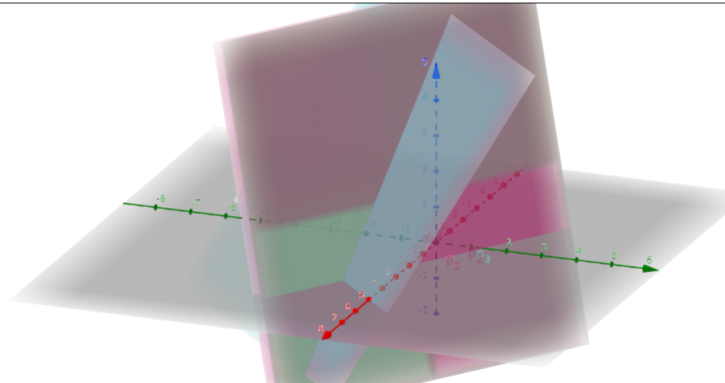


Figure 14: <https://www.geogebra.org/m/r3tjnhga>



### 4.3 vlakkenwaaier

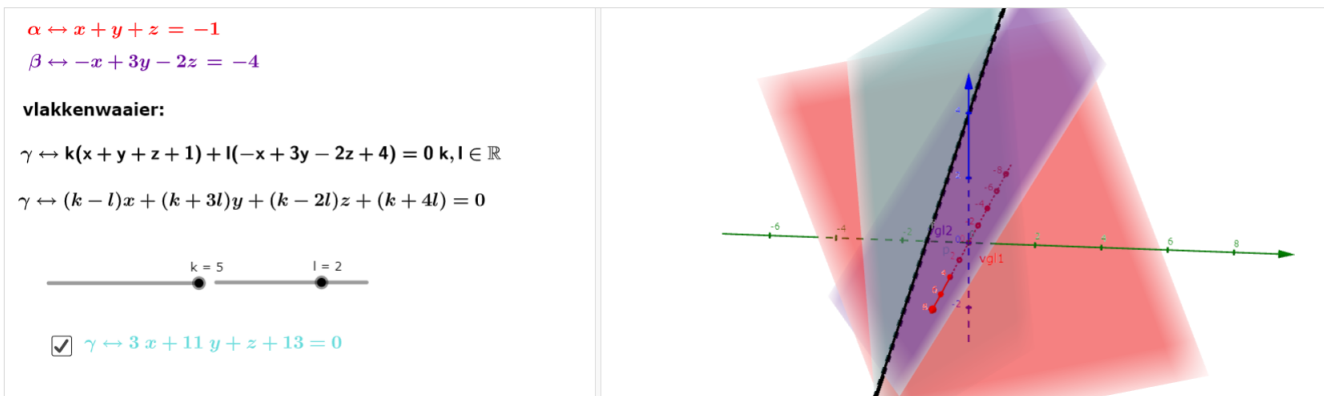


Figure 15: <https://www.geogebra.org/m/zkqecuwg>

### 4.4 onderlinge stand rechte en vlak

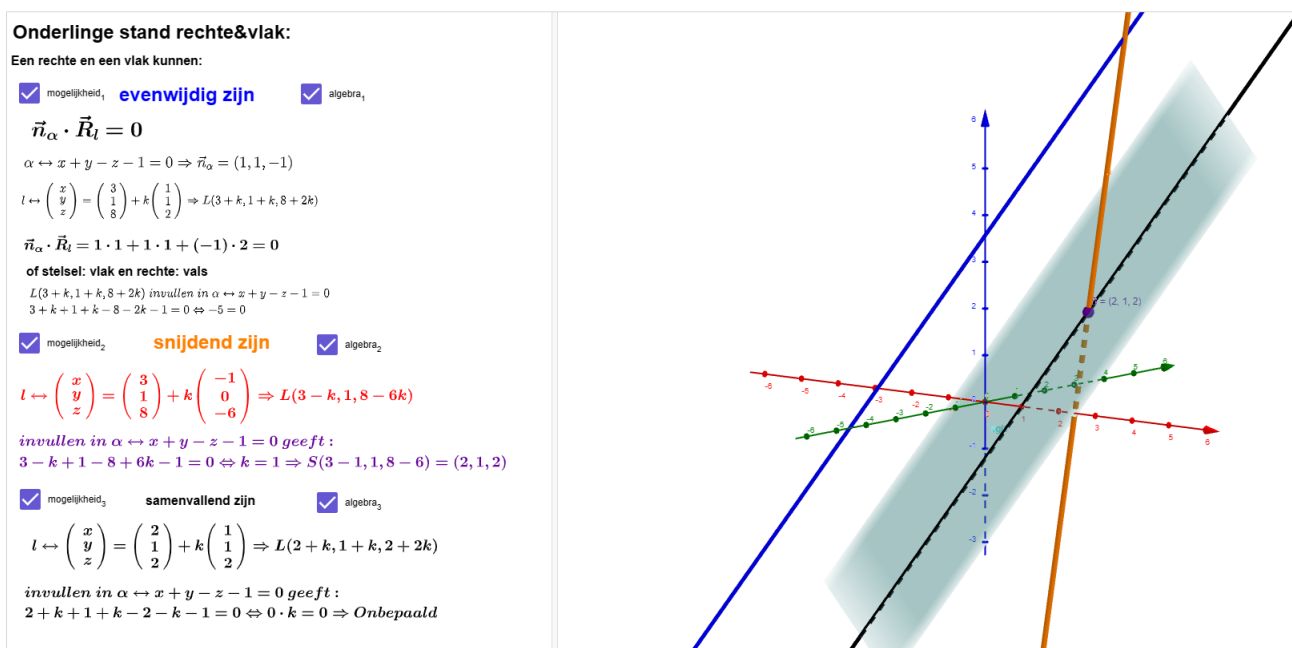
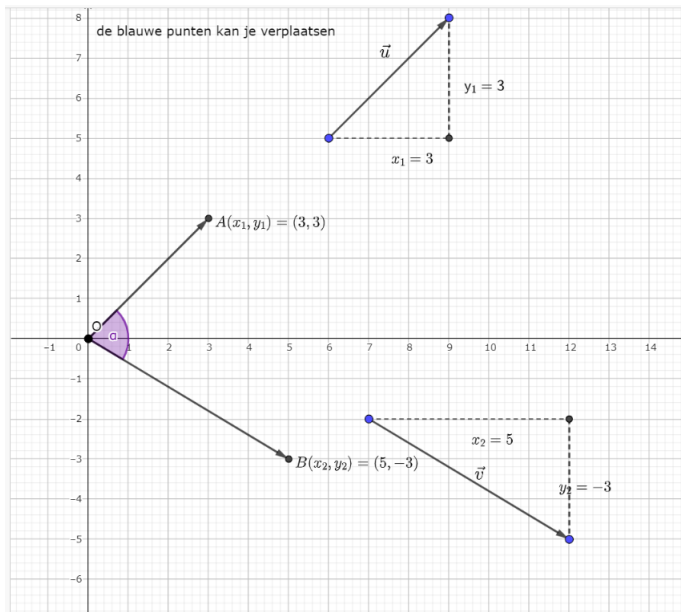


Figure 16: <https://www.geogebra.org/m/qpjszrty>

## 5 loodrechte stand

### 5.1 norm&scalair product van twee vectoren



#### Norm en inproduct van twee vectoren

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{18}$$

Is de norm van een vector, m.a.w. zijn lengte.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = (3) \cdot (5) + (3) \cdot (-3) = 6$$

Is het inproduct van 2 vectoren. Dit is een getal en geen vector!

De hoek tussen twee vectoren kan dan herschreven worden:

$$\cos(\alpha) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

hieruit volgt

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$$

Eigenschap:  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Figure 17: <https://www.geogebra.org/m/Up7HKEmg>

### 5.2 loodrechte stand van twee rechten

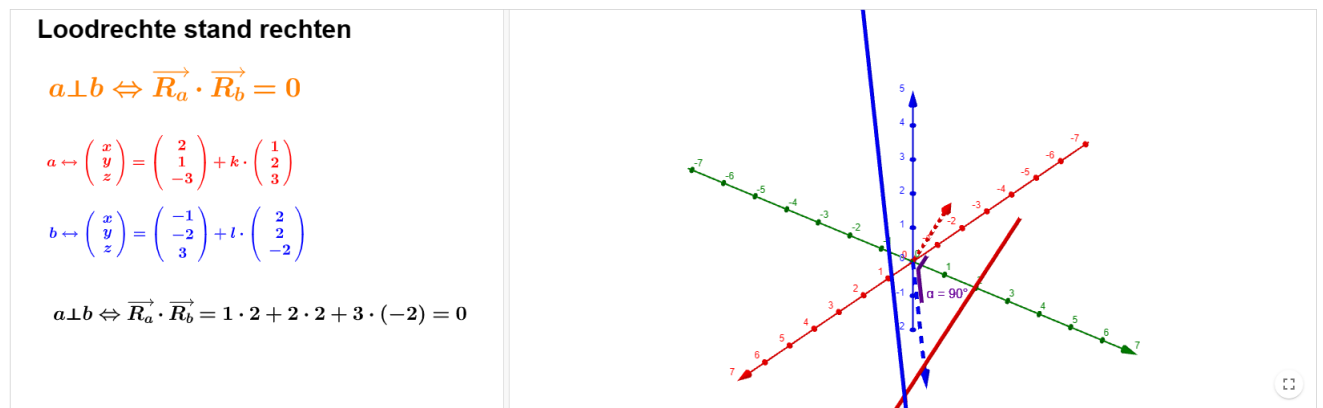
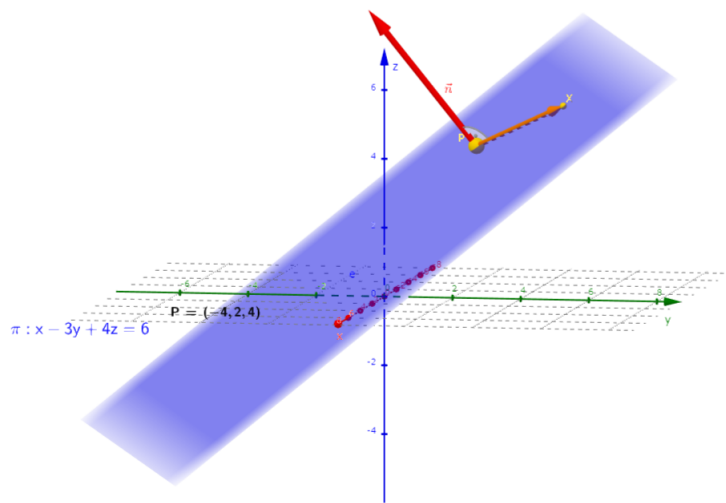


Figure 18: <https://www.geogebra.org/m/furru9tk>

### 5.3 normaalvectoren van vlakken



**Normaalvector van een vlak:**

$$vb : \pi \leftrightarrow 1x - 3y + 4z = 6$$

$$\vec{n}(1, -3, 4)$$

wordt de normaalvector van n genoemd. Dit is de vector die loodrecht op het vlak staat

m.a.w.  $\vec{n}$  staat loodrecht op elke willekeurige *vector* die in het vlak ligt

willekeurige vector in het vlak :  $\overrightarrow{PX}$

met  $P(-4, 2, 4) \in \pi$  en  $X(x, y, z)$

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PX} &= 0 \\ \vec{n} \cdot (X - P) &= 0 \\ \vec{n} \cdot X &= \vec{n} \cdot P \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ (1) \cdot x + (-3) \cdot y + (4) \cdot z &= 6 \quad | : (1) \\ x - 3y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

Figure 19: <https://www.geogebra.org/m/tyxzar6k>

### 5.4 loodrechte stand van twee vlakken



**Loodrechte stand van twee vlakken**

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta$$

verplaats vlakken

Figure 20: <https://www.geogebra.org/m/r3tjnhga>

## 6 afstanden

### 6.1 afstand tussen twee punten

Afstand tussen twee punten

**Afstand tussen twee punten:**

$$A = (2, 3, 1)$$

$$B = (-1, 2, 5)$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{((-1) - (2))^2 + ((2) - (3))^2 + ((5) - (1))^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 1 + 16}$$

$$|AB| = \sqrt{26}$$

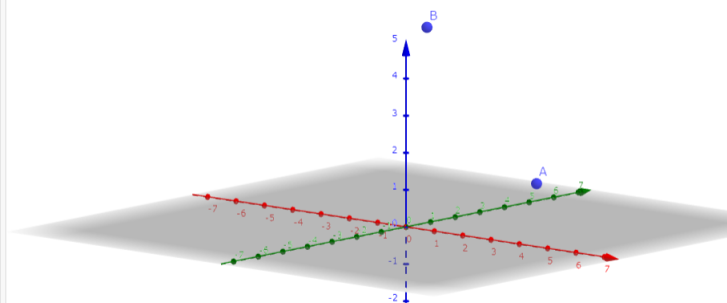


Figure 21: <https://www.geogebra.org/m/a7fx9aqv>

## 6.2 afstand tussen punt en rechte

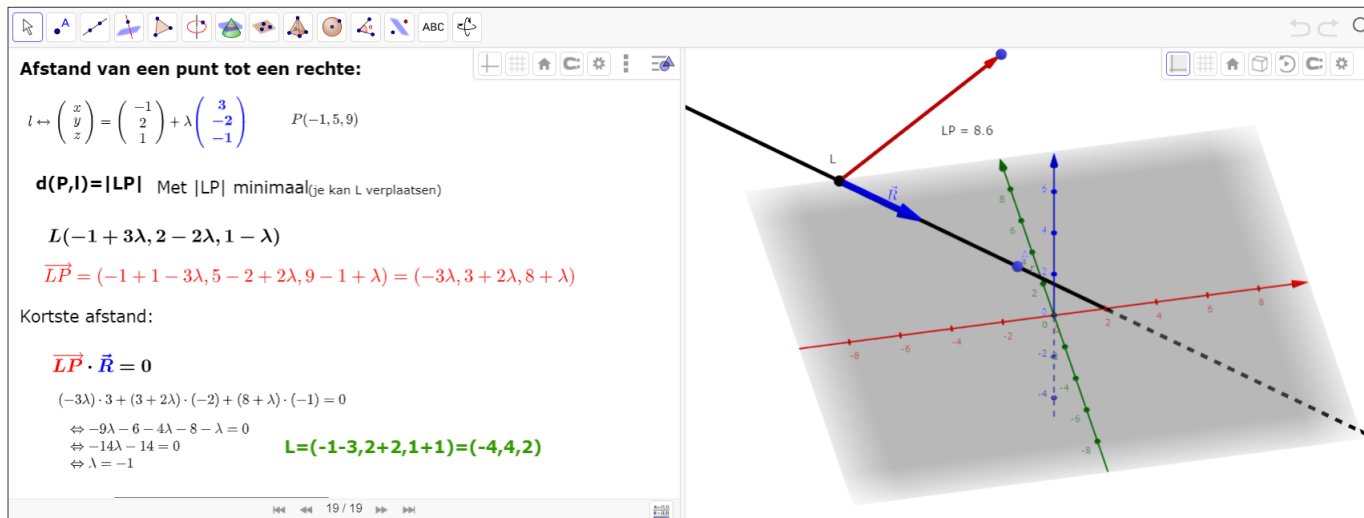


Figure 22: <https://www.geogebra.org/m/a7fx9aqv>

## 6.3 afstand tussen twee kruisende rechten

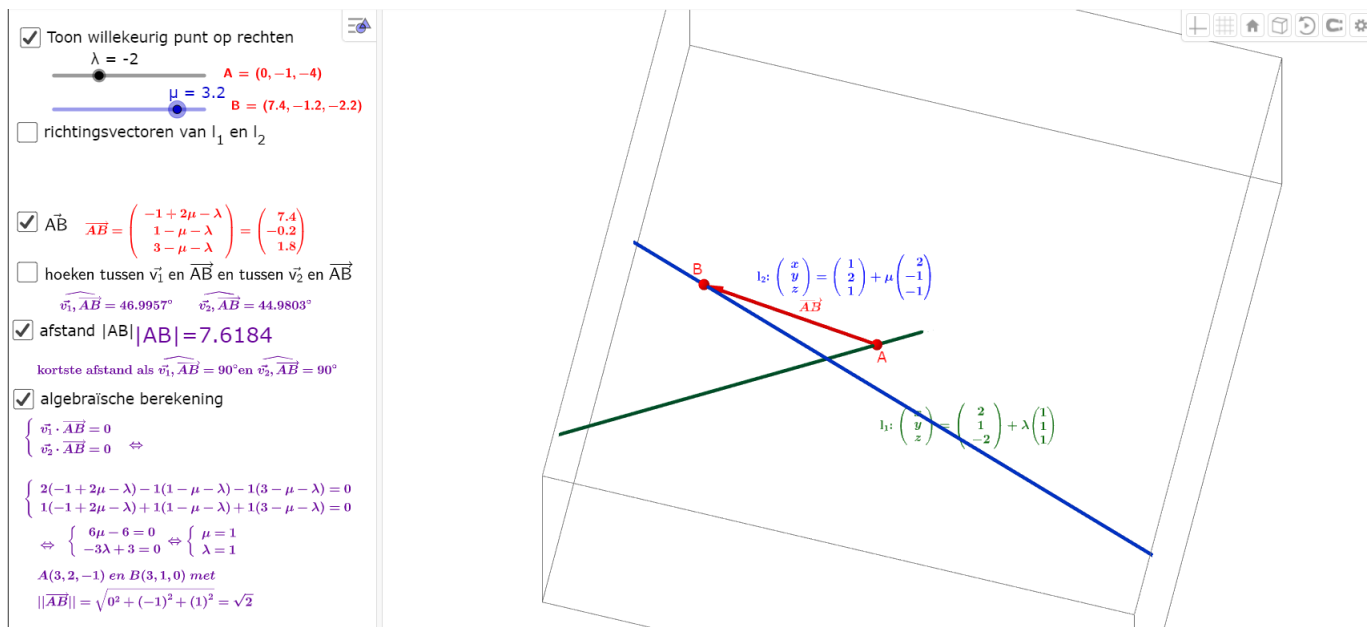


Figure 23: <https://www.geogebra.org/m/a7fx9aqv>

## 6.4 afstand tussen punt en vlak

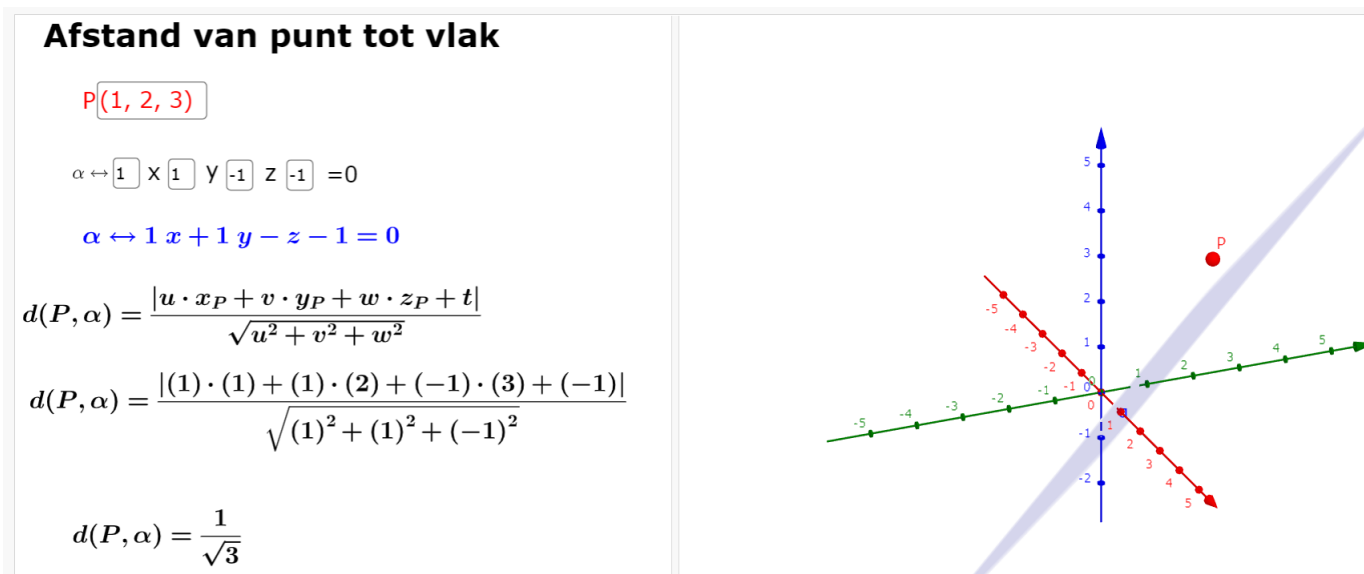


Figure 24: <https://www.geogebra.org/m/a7fx9aqv>

## 7 hoeken

### 7.1 tussen 2 rechten

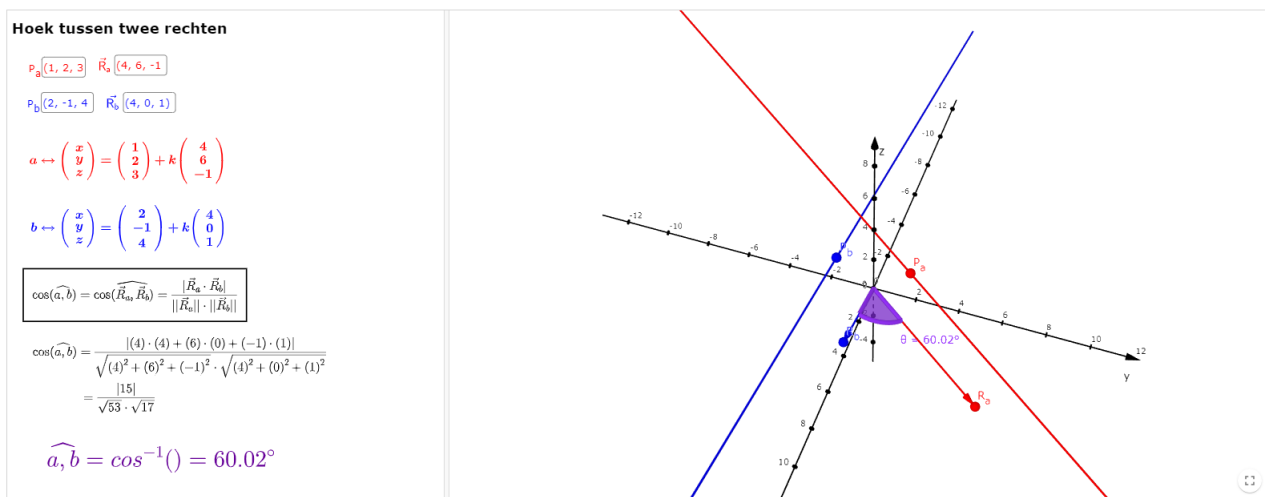


Figure 25: <https://www.geogebra.org/m/furru9tk>

## 7.2 tussen 2 snijdende vlakken

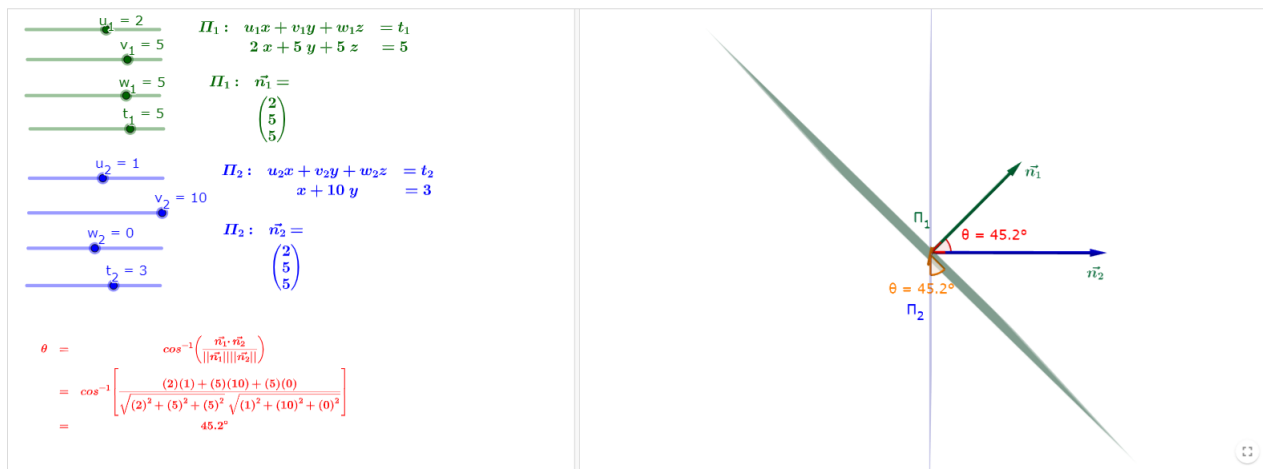


Figure 26: <https://www.geogebra.org/m/r3tjnhga>

## 7.3 tussen een rechte en een vlak

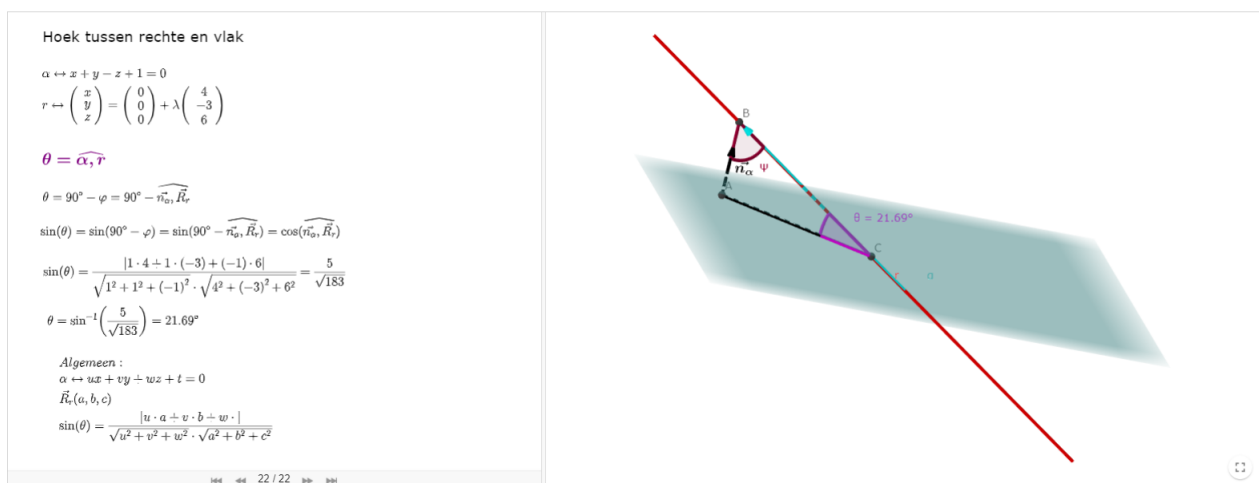


Figure 27: <https://www.geogebra.org/m/qpjszrty>

## 8 meetkundige plaatsen

### 8.1 bollen



Figure 28: <https://www.geogebra.org/m/jsffxvqd>

### 8.2 middelloodvlakken

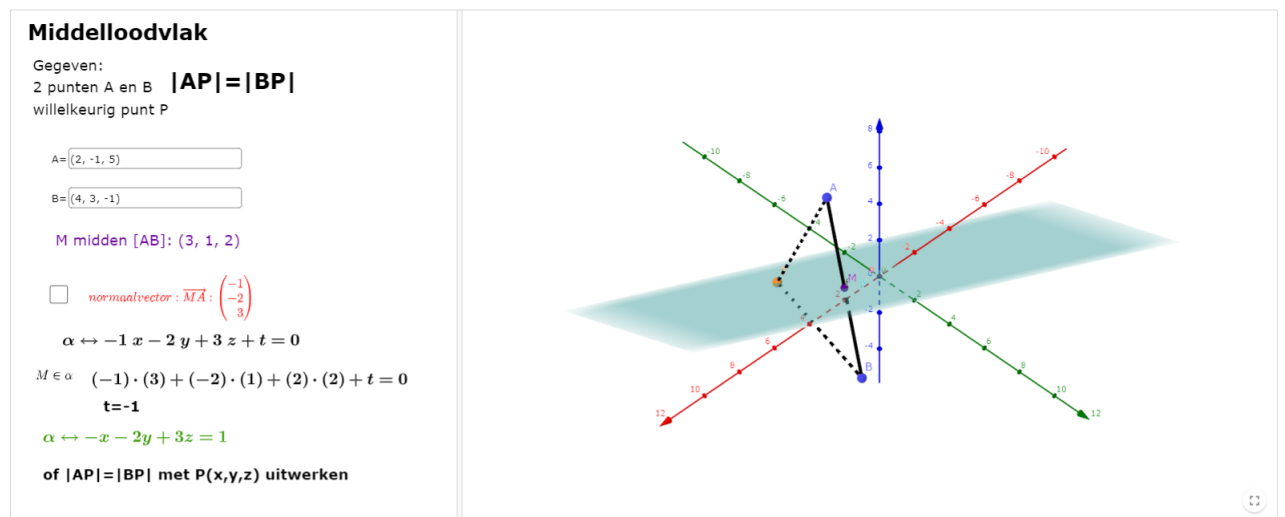


Figure 29: <https://www.geogebra.org/m/jsffxvqd>

## 8.3 bisectorvlakken

### Bisector (deel)vlakken:

Gegeven zijn twee snijdende vlakken:

$$\alpha \leftrightarrow 4x - 3z + 1 = 0$$

$$\beta \leftrightarrow 2x + 2y - z - 3 = 0$$

$$P(x, y, z) \in \text{deelvlak}\{\alpha, \beta\} : d(P, \alpha) = d(P, \beta)$$

$$\frac{|4x + 0y - 3z + 1|}{\sqrt{(4)^2 + (0)^2 + (-3)^2}} = \frac{|2x + 2y - 1 - 3|}{\sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9} \cdot (4x + 0y - 3z) = \sqrt{25} \cdot (2x + 2y - 3)$$

$$\sqrt{9} \cdot (4x + 0y - 3z + 1) = -\sqrt{25} \cdot (2x + 2y - z - 3)$$

$$\Leftrightarrow \checkmark d_1 \leftrightarrow 2x - 10y - 4z + 18 = 0$$

$$\checkmark d_2 \leftrightarrow 22x + 10y - 14z - 12 = 0$$

Merk op:

$$d_1 \perp d_2 \text{ want } \vec{n}_{d_1} \cdot \vec{n}_{d_2} = 0$$

$$(2)(22) + (-10)(10) + (-4)(-14) = 0$$

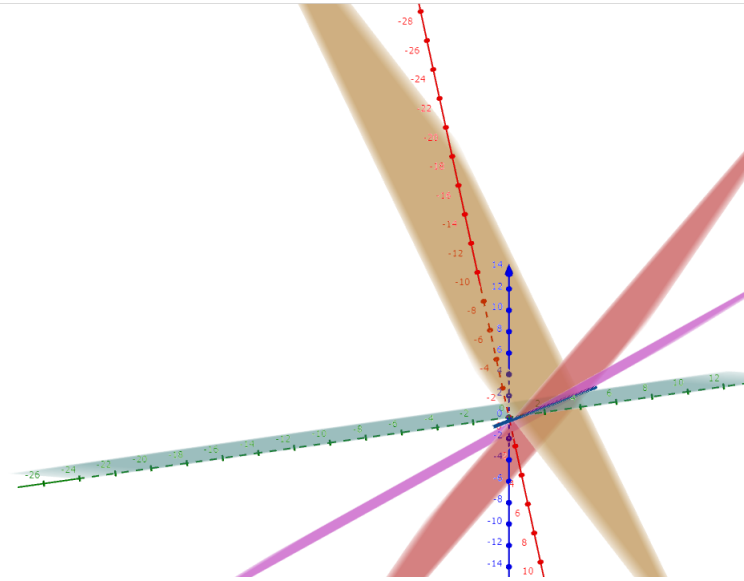


Figure 30: <https://www.geogebra.org/m/jsffxvqd>

## 8.4 zadeloppervlak

### Meetkundige plaats

Bepaal de meetkundige plaats van de punten  $P(x,y,z)$  die op gelijke afstand liggen van de kruisende rechten

$$l \leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = r \\ z = -1 \end{cases} \text{ en } m \leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = -s \\ z = 1 \end{cases}$$

Oplossing:

Stel  $L(r,r,-1)$ ,  $M(s,-s,1)$  respectievelijke punten van  $l$  en  $m$

$$|PL|^2 = (x-r)^2 + (y-r)^2 + (z+1)^2$$

$$|PM|^2 = (x-s)^2 + (y+s)^2 + (z-1)^2$$

$$PL \perp l \Leftrightarrow (x-r, y-r, z+1) \cdot (1, 1, 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-r + y-r = 0$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{x+y}{2}$$

$$PM \perp m \Leftrightarrow (x-s, y+s, z-1) \cdot (1, -1, 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-s - y - s = 0$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{x-y}{2}$$

$$|PL|^2 = |PM|^2 \Leftrightarrow z = \frac{x+y}{2}$$

Toon meetkundige plaats

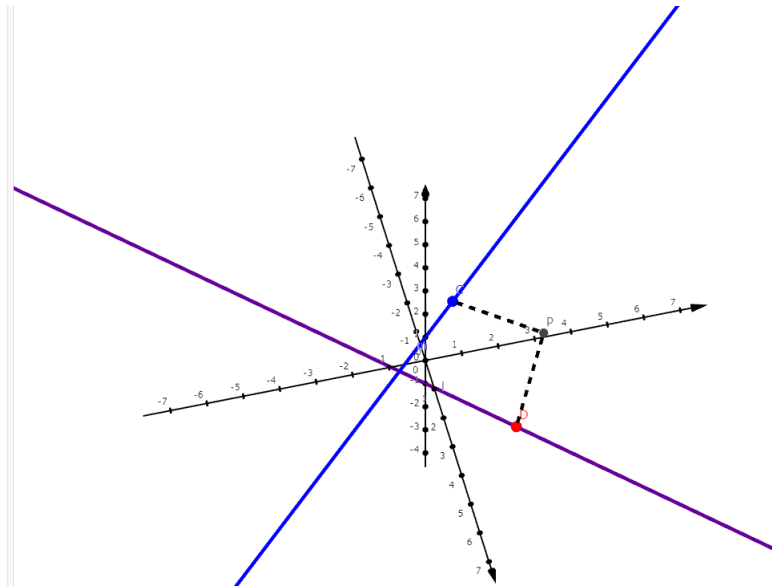


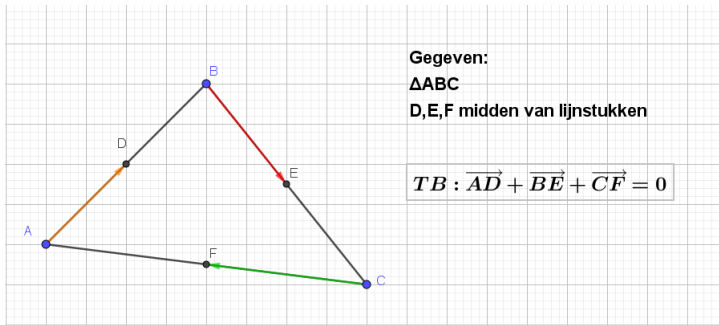
Figure 31: <https://www.geogebra.org/m/jsffxvqd>

## 9 Oefeningen

### 9.1 vectoren

1. Bewijs:





2. midden van een lijnstuk

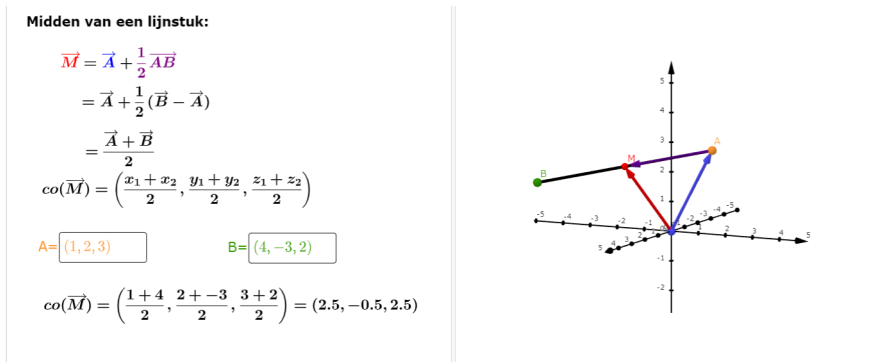


Figure 32: <https://www.geogebra.org/m/msnt9fvp>

3. zwaartepunt van een driehoek

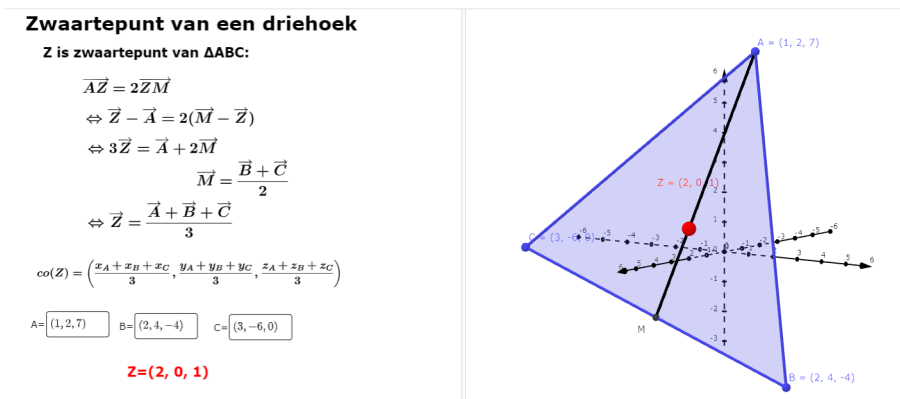


Figure 33: <https://www.geogebra.org/m/msnt9fvp>

4. Bewijs

VABCD is a pyramid with a rectangular base ABCD.

Relative to some appropriate axes,

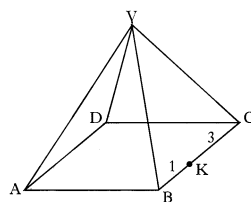
$\vec{VA}$  represents  $-7\mathbf{i} - 13\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$

$\vec{AB}$  represents  $6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

$\vec{AD}$  represents  $8\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ .

K divides BC in the ratio 1:3.

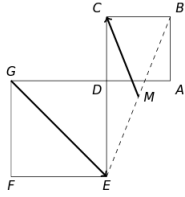
Find  $\vec{VK}$  in component form.



3

5. Bereken

Onderstaande figuur toont twee vierkanten  $ABCD$  en  $DEFG$ . De lengtes van de zijden zijn  $|AB| = 4$  en  $|GD| = 6$ . Het punt  $M$  is het midden van het lijnstuk  $[EB]$ . Welke waarde heeft het scalaire product (ook wel inproduct genoemd)  $\vec{MC} \cdot \vec{GE}$ ?

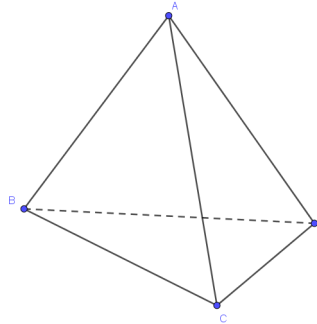


- (A) -45      (B) -42      (C) -40      (D) -36

6. Onderzoek of de vierhoeken  $ABCD$  parallellogrammen zijn.

- (a)  $A(1, 2, 4), B(0, -3, 2), C(1, 0, -1), D(4, 3, -2)$   
 (b)  $A(1, 1, 1), B(2, 2, 0), C(1, 0, 1), D(4, 3, -2)$

7. Gegeven is de tetraëder  $ABCD$ . De punten  $I, J, K$  en  $L$  worden gedefinieerd door  $\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ ,  $\vec{BJ} = \frac{1}{3}\vec{BC}$ ,  $\vec{CK} = \frac{2}{3}\vec{CD}$  en  $\vec{DL} = \frac{1}{3}\vec{DA}$



- (a) Plaats de punten  $I, J, K$  en  $L$  op de tetraëder  
 (b) Toon aan  $\vec{IJ} = \vec{LK} = \frac{1}{3}\vec{AC}$

## 9.2 vectorruimten

### 9.3 rechten

- Geef  $VV$ ,  $PV$  van  $CV$   $y = -x + 4$
- Schrijf een parametervoorstelling en de cartesiaanse vergelijkingen van de rechte  $l$  met richtingsvector  $\vec{A}(-1, 0, 1)$  en waarvan  $P(2, 1, 4)$  een steunpunt is. Zoek ook de snijpunten van deze rechte met de coördinaatvlakken.
- Bepaal een parametervoorstelling en de cartesiaanse vergelijkingen van de rechte die de  $A(1, 2, 3)$  en  $B(2, 3, 4)$  bevat. Behoort  $C(3, 4, 5)$  tot de rechte  $AB$ ?
- Gegeven zijn de rechten:

$$a \leftrightarrow \frac{x-9}{2} = y-6 = \frac{z}{-2}$$

$$b \leftrightarrow \begin{cases} x+y+3=0 \\ z+5=0 \end{cases}$$

$$c \leftrightarrow x = \frac{y+8}{4} = \frac{2z+3}{-7}$$

$$d \leftrightarrow \frac{x+7}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-4}$$

Onderzoek de onderlinge ligging (snijdend, kruisend, evenwijdig) van de rechten

- (a) a en b

- (b) a en c
- (c) a en d
- (d) b en c
- (e) b en d
- (f) c en d

5. Onderzoek de onderlinge stand van de rechten  $a \leftrightarrow \frac{x+3}{-4} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z-7}{8}$  en  $b \leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = 2 - s \\ z = 3 + 2s \end{cases}$

6. Gegeven zijn de rechten  $a \leftrightarrow \frac{2x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{2z+1}{6}$  en  $b \leftrightarrow \begin{cases} 3x = 5 \\ 3y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$

- (a) Ga na dat a en b kruisend zijn
- (b) Schrijf een parametervoorstelling van de rechte a en b
- (c) Zoek een punt A op a en een punt B op b zodat AB evenwijdig is met  $c \leftrightarrow x = \frac{y}{6} = \frac{z}{2}$

7. Beschouw de driedimensionale ruimte met cartesiaans assenstelsel en de rechte r met parametervergelijking  $r \leftrightarrow \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = 2 \\ z = -3t + 2, t \in \mathbb{R} \end{cases}$ . Welk van de onderstaande vectoren is evenwijdig met de rechte r?

(a)  $(1, -1, 1)$   
 (b)  $(1, 0, 1)$   
 (c)  $(1, 1, 1)$   
 (d)  $(1, 2, 1)$

(antw. b)

8. gegeven zijn de rechten  $d_1 \leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$ ,  $d_2 \leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 1 \end{cases}$  en  $d_3 \leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ x = -z \end{cases}$ . Bepaal de CV van de rechte die  $d_1$  en  $d_2$  snijdt en die evenwijdig met  $d_3$  is.

## 9.4 vlakken

1. Bepaal een parametervoorstelling en de cartesiaanse vergelijking van het vlak  $\alpha$  met richtingsvectoren  $\vec{A}(1, -1, 0)$  en  $\vec{B}(0, 3, -1)$  en dat het punt  $P(-1, -5, 2)$  bevat.
2. Bepaal de cartesiaanse vergelijking van het vlak  $\alpha$  dat de punten  $A(2, 3, 1)$  en  $B(0, 1, -1)$  bevat en evenwijdig is met de z-as.
3. Bepaal de cartesiaanse vergelijking van het vlak  $\alpha$  dat de snijlijn van de vlakken  $\gamma \leftrightarrow x + y + z + 1 = 0$  en  $\beta \leftrightarrow 2x - y + 4z + 1 = 0$  omvat en door het punt  $P(1, 1, 1)$  gaat.
4. Ga na of de volgende punten coplanair zijn:
  - (a)  $A(2, 0, 1), B(-1, 2, 1), C(2, 1, -1), D(2, 3, -1)$
  - (b)  $A(2, -1, -2), B(2, 3, 1), C(3, -1, 4), D(7, 1, 3)$
5. In een driedimensionale ruimte beschouwen we het vlak door het punt  $(1, 0, 0)$  evenwijdig met het vlak met vergelijking  $2x + 3y + z = 0$ . Ligt het punt  $(0, 1, -1)$  in dit vlak? (A. ja)
6. Gegeven:

$$d \leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z + 4 = 0 \\ 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha \leftrightarrow x + 2y - 5z - 7 = 0$$

$$P(2, 1, -1)$$

- (a) Bepaal de projectie  $P'$  van  $P$  op  $\alpha$  volgens de richting  $d$
- (b) Schrijf een stelsel cartesiaanse vergelijkingen van de rechte  $a$  die door  $P$  gaat en evenwijdig is met  $b \leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{3}$
- (c) Bepaal een stelsel cartesiaanse vergelijkingen van de projectie  $a'$  van  $a$  op  $\alpha$  volgens richting  $d$ .
7. Onderzoek in de volgende gevallen de onderlinge ligging van de vlakken  $\alpha$  en  $\beta$  (samenvallend, parallel of snijdend):
- (a)  $\alpha \leftrightarrow x + 2y + z - 3 = 0$  en  $\beta \leftrightarrow 2x + 4y + 2z + 1 = 0$
- (b)  $\alpha \leftrightarrow x - y + z - 2 = 0$  en  $\beta \leftrightarrow 2x - 2y + z - 3 = 0$
- (c)  $\alpha \leftrightarrow x - 2y + 3z - 1 = 0$  en  $\beta \leftrightarrow -3x + 6y - 9z + 3 = 0$
8. Onderzoek in de volgende gevallen de onderlinge ligging van de rechte  $a$  en het vlak  $\alpha$ . Bepaal het eventuele snijpunt
- (a)  $\alpha \leftrightarrow x + y + z - 3 = 0$  en  $a \leftrightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-2}$
- (b)  $l \leftrightarrow (x, y, z) = (1, 2, -1) + k(1, -1, 3)$  en  $\alpha \leftrightarrow 2x - y - 7 + 1 = 0$
9. Gegeven:

$$b \leftrightarrow \frac{x - 4a - 1}{a} = \frac{y - 2a - 2}{1} = \frac{z}{-a} \quad (a \in \mathbf{R}_0)$$

$$c \leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2a - 1 = 0 \\ z + a + 3 = 0 \end{cases} \quad (a \in \mathbf{R}_0)$$

$$d \leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{a} = \frac{z}{a+1} \quad (a \in \mathbf{R}_0) \setminus 1$$

- (a) Toon aan:  $b$  en  $c$  zijn kruisend
- (b) Bepaal de cartesiaanse vergelijking van het vlak  $\alpha$  dat rechte  $b$  omvat en evenwijdig is met de rechte  $d$
- (c) Bepaal de cartesiaanse vergelijking van het vlak  $\beta$  dat rechte  $c$  omvat en evenwijdig is met de rechte  $d$
- (d) Toon aan dat de vlakken  $\alpha$  en  $\beta$  altijd snijden zijn en dat de snijlijn altijd door een vast punt gaat. Welk is dat punt?

## 9.5 loodrechte stand

1. Bepaal de cartesiaanse vergelijking van het loodvlak  $\pi$  uit het punt  $P$  op de rechte  $a$  als  $P(1, 0, 5)$  en  $a \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. Onderzoek of  $\alpha \leftrightarrow x + 2y - 3z + 7 = 0$  en  $\beta \leftrightarrow 2x + 3y + z - 3 = 0$  loodrecht op elkaar staan
3. Gegeven zijn de punten  $A(2, 3, 4)$  en  $B(9, 0, 10)$  alsook de rechte  $a \leftrightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{7}$ . Bepaal de punten  $P$  van  $a$  waarvoor de driehoek  $PAB$  rechthoekig is in  $P$ .
4. Bepaal de cartesiaanse vergelijking van het vlak  $\pi$  dat het punt  $A(1, 2, 0)$  bevat en loodrecht staat op de vlakken  $\alpha \leftrightarrow x - 2y + z = 5$  en  $\beta \leftrightarrow 2x + 3y - 2z = 1$
5. Gegeven zijn de rechte  $a \leftrightarrow x - p = \frac{y+2}{q} = 3 - z$  en het vlak  $\alpha \leftrightarrow x - y - 2z = -3$ . Bepaal de waarden van  $p$  en  $q$  als je weet dat de rechte volledig in het vlak ligt.
6. Gegeven:

$$\alpha \leftrightarrow 4x - 5y + 4z - 3 = 0$$

$$a \leftrightarrow \begin{cases} 11x - 2y - 9 = 0 \\ 9x - 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

$$P(5, 2, 1)$$

- (a) Bepaal een stelsel cartesiaanse vergelijkingen van de rechte  $l$  die door  $P$  gaat, evenwijdig is met  $\alpha$  en  $a$  snijdt.
- (b) Zoek het snijpunt  $S$  van  $l$  en  $a$ .
7. Bepaal de orthogonale projectie  $P'$  van punt  $P(4, 0, 5)$  op  $\alpha \leftrightarrow 2x - 3y + 4z - 57 = 0$ . Bepaal ook het symmetrisch punt  $Q$  van  $P$  t.o.v.  $\alpha$
8. Beschouw de driedimensionale ruimte met cartesiaans assenstelsel en de rechte  $r$  met parametervergelijking  $r \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$ . Verder hebben we twee vlakken  $v_1$  en  $v_2$  met vergelijkingen  $v_1 \leftrightarrow x + 2y + 3z = 3$  en  $v_2 \leftrightarrow x + y + z = 6$ . Welk van de volgende uitspraken is waar?
- (a) de rechte  $r$  is evenwijdig met het vlak  $v_1$
- (b) de rechte  $r$  is evenwijdig met het vlak  $v_2$
- (c) de rechte  $r$  staat loodrecht op het vlak  $v_1$
- (d) de rechte  $r$  staat loodrecht op het vlak  $v_2$
- (antw: d)
9. Beschouw de driedimensionale ruimte met cartesiaans assenstelsel, het punt  $P(0,1,-1)$  en de rechte  $r$  met parametervergelijking  $r \leftrightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 2t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$ . Wat is de  $x$ -coördinaat van het punt op de rechte  $r$  dat het dichtst bij het punt  $P$  ligt?
- (a)  $\frac{1}{14}$
- (b)  $\frac{3}{14}$
- (c) 1
- (d) 3
- (antw.b)

## 9.6 afstanden

1. Bepaal de afstand van het punt  $P(3, -1, 2)$  tot het vlak  $\alpha \leftrightarrow x - 2y + 3z + 5 = 0$
2. Bepaal de afstand van het punt  $P(2, -3, -5)$  tot de rechte  $l \leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$
3. Gegeven zijn de kruisende rechten  $a$  en  $b$ . Bepaal een stelsel cartesiaanse vergelijkingen van hun gemeenschappelijke loodlijn  $l$ . Zoek de snijpunten  $A$  van  $l$  met  $a$  en  $B$  van  $l$  met  $b$  en bereken de afstand  $|AB|$
- (a)  $a \leftrightarrow \frac{x+1}{-2} = \frac{y-6}{-2} = z - 4$  en  $b \leftrightarrow \frac{x+1}{2} = y - 3 = \frac{z-3}{-2}$
- (b)  $a = CD$  met  $C(1, -1, 1)$  en  $D(2, 1, -1)$  en  $b \leftrightarrow \begin{cases} y + 2 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$
4. Bepaal de vergelijking van een vlak  $\pi$  dat door de rechte  $a \leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + 2y + 7z + 6 = 0 \end{cases}$  gaat en op een afstand 2 van het punt  $P(1, 1, 1)$  gelegen is.
5. Gegeven zijn de punten  $A(2, 1, 3)$ ,  $B(1, 1, -2)$  en  $C(2, -1, 1)$ . Bepaal de oppervlakte van de  $\triangle ABC$

6. Gegeven: het vlak  $\alpha \leftrightarrow 4x - 2y + 4z = 1$  en het punt  $P(1, 1, 1)$ . Er zijn twee vlakken  $\beta$  evenwijdig met  $\alpha$  zodat de afstand van het vlak  $\alpha$  tot het vlak  $\beta$  gelijk is aan de afstand tussen het punt P en het vlak  $\alpha$ . Welk van de onderstaande vergelijkingen is een cartesiaanse vergelijking van één van deze vlakken  $\beta$ ?

(a)  $4x - 2y + 4z = -8$

(b)  $4x - 2y + 4z = -4$

(c)  $4x - 2y + 4z = \frac{1}{6}$

(d)  $4x - 2y + 4z = \frac{11}{6}$

(antw: b)

## 9.7 hoeken

1. Bepaal in de volgende gevallen de hoek tussen de rechten a en b

(a)  $a \leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$  en  $b \leftrightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$

2. Bepaal in de volgende gevallen de hoek tussen de vlakken  $\alpha$  en  $\beta$

(a)  $\alpha \leftrightarrow x - y - 3 = 0$  en  $\beta \leftrightarrow x - z + 1 = 0$

3. Bepaal in de volgende gevallen de hoek tussen de rechten a en het vlak  $\alpha$

(a)  $a \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \quad \alpha \leftrightarrow xy - \text{vlak}$

4. Het vlak  $\alpha \leftrightarrow \frac{x}{100} + \frac{y}{75} + \frac{z}{60} = 1$  snijdt de x-as, y-as en z-as van het orthonormale assenstelsel respectievelijk in de punten A, B en C. Het punt P doorloopt de rechte AB. De hoek die de rechte PC insluit met het xy-vlak varieert met de stand van P. Bereken de coördinaten van P waarvoor die hoek maximaal is

## 9.8 Meetkundige plaatsen

1. Bepaal de cartesiaanse vergelijking van het middelloodvlak  $\pi$  van lijnstuk  $[AB]$  als  $A(2, 1, 4)$  en  $B(0, 1, 2)$

2. Bepaal de bissectorvlakken van  $\alpha \leftrightarrow x + 2y + 2z - 1 = 0$  en  $\beta \leftrightarrow 2x - 6y + 3z - 3 = 0$

3. Bepaal de verzameling van punten even ver van de kruisende rechten  $r \leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = r \\ z = -r, r \in \mathbb{R} \end{cases}$

en  $r \leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = s \\ z = s, s \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{A. } z = \frac{xy}{2})$

## 9.9 Toepassing

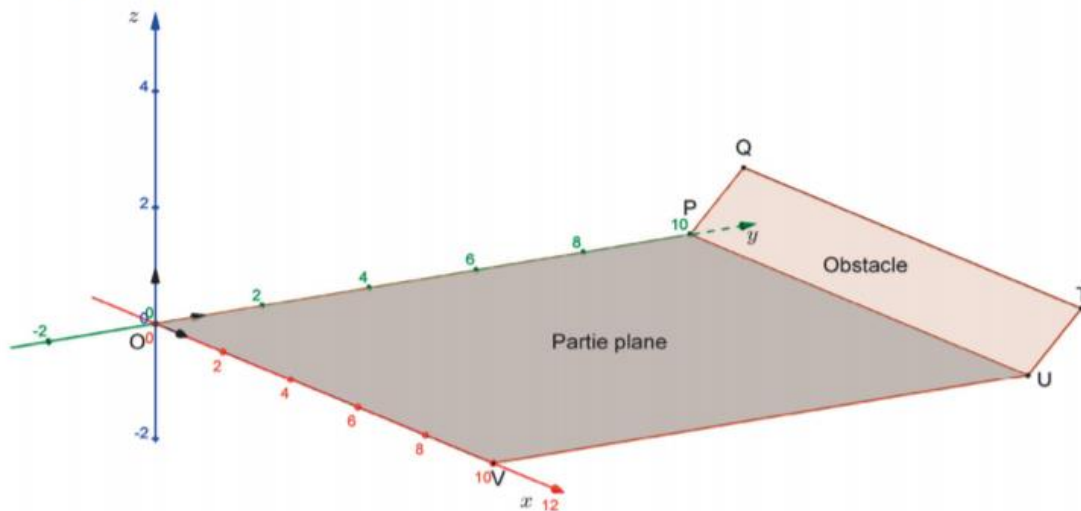
## Meetkundig probleem met diverse hulpmiddelen voorstellen en oplossen

Alex et Élixa, deux pilotes de drones, s'entraînent sur un terrain constitué d'une partie plane qui est bordée par un obstacle.

On considère un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , une unité correspondant à dix mètres. Pour modéliser le relief de la zone, on définit six points O, P, Q, T, U et V par leurs coordonnées dans ce repère :

$O(0; 0; 0)$ ,  $P(0; 10; 0)$ ,  $Q(0; 11; 1)$ ,  $T(10; 11; 1)$ ,  $U(10; 10; 0)$  et  $V(10; 0; 0)$

La partie plane est délimitée par le rectangle OPUV et l'obstacle par le rectangle PQTU.



Les deux drones sont assimilables à deux points et on suppose qu'ils suivent des trajectoires rectilignes :

- le drone d'Alex suit la trajectoire portée par la droite (AB) avec  $A(2; 4; 0,25)$  et  $B(2; 6; 0,75)$  ;
- le drone d'Élixa suit la trajectoire portée par la droite (CD) avec  $C(4; 6; 0,25)$  et  $D(2; 6; 0,25)$ .

### Partie A : Étude de la trajectoire du drone d'Alex

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2.
  - a. Justifier que le vecteur  $\vec{n}(0; 1; -1)$  est un vecteur normal au plan (PQU).
  - b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQU).

3. Démontrer que la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants au point I de coordonnées  $\left(2; \frac{37}{3}; \frac{7}{3}\right)$ .
4. Expliquer pourquoi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

### Partie B : Distance minimale entre les deux trajectoires

Pour éviter une collision entre leurs deux appareils, Alex et Élixa imposent une distance minimale de 4 mètres entre les trajectoires de leurs drones.

L'objectif de cette partie est de vérifier si cette consigne est respectée.

Pour cela, on considère un point M de la droite (AB) et un point N de la droite (CD).

Il existe alors deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\overrightarrow{AM} = a \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CN} = b \overrightarrow{CD}$ .

On s'intéresse donc à la distance MN.

1. Démontrer que les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{MN}$  sont  $(2 - 2b; 2 - 2a; -0,5a)$ .
2. On admet que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires. On admet également que la distance MN est minimale lorsque la droite (MN) est perpendiculaire à la fois à la droite (AB) et à la droite (CD).  
Démontrer alors que la distance MN est minimale lorsque  $a = \frac{16}{17}$  et  $b = 1$ .
3. En déduire la valeur minimale de la distance MN puis conclure.