Szigorú algebrai levezetés

A megoldandó egyenlet a pozitív egészek halmazán:

$$a^3 + b^3 = 19 \cdot 31 \cdot 47 = 27683$$

Alakítsuk szorzattá a bal oldalt:

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = 19 \cdot 31 \cdot 47$$

Legyen $m = a + b$ és $k = a^2 - ab + b^2$. Tudjuk, hogy $m, k \in \mathbb{Z}^+$ és $m \cdot k = 27683$.

1. lépés: Korlátok felállítása (Becslési tétel)

Mivel a és b pozitív egészek, felírható az alábbi ismert egyenlőtlenség (a számtani és négyzetes középből, vagy az $(a-b)^2 \geq 0$ ekvivalens átalakításából):

$$a^2 - ab + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{4}$$

Egyenlőség csak $a = b$ esetén állna fenn, de $2a^3 = 27683$ nem ad egész megoldást.

Mivel $k = \frac{27683}{m}$, helyettesítsünk be az egyenlőtlenségbe:

$$\frac{27683}{m} > \frac{m^2}{4} \Longrightarrow m^3 < 4 \cdot 27683 = 110732$$

Köbgyököt vonva megkapjuk m felső korlátját:

$$m < \sqrt[3]{110732} \approx 47,998$$

Tehát az $m = a + b$ összeg egy olyan osztója a 27683-nak, amelyre teljesül, hogy $\boldsymbol{m \leq 47}$. Mathematics Stack Exchange

2. lépés: Az oszthatóság vizsgálata (A lehetséges m értékek)

A 27683 prímtényezői: $19, 31, 47$.
Keressük meg az összes olyan osztót, amely kisebb vagy egyenlő 47-nél:

- $m = 1$ (nem ad pozitív megoldást)
- $m = 19$
- $m = 31$
- $m = 47$

(A következő legkisebb osztó a $19 \cdot 31 > 500$ lenne, ami már messze túlmutat a korláton.)

3. lépés: A négyzetes diszkrimináns-teszt

Fejezzük ki k-t az m lehetséges értékeivel az $a^2 - ab + b^2 = \frac{27683}{m}$ egyenletből.
Tudjuk, hogy $b = m - a$. Helyettesítsük ezt vissza:

$$a^2 - a(m - a) + (m - a)^2 = k$$

$$3a^2 - 3ma + (m^2 - k) = 0$$

Ahhoz, hogy a-ra egész (egyáltalán valós) megoldást kapjunk, e másodfokú egyenlet **diszkriminánsának (D) teljes négyzetnek kell lennie**:

$$D = (-3m)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (m^2 - k) = 9m^2 - 12m^2 + 12k = 12k - 3m^2$$

Futtassuk le ezt a strukturális tesztet a 3 megmaradt jelöltre:

1. **Ha $m = 19$:**
   - $k = 27683/19 = 1457$
   - $D = 12 \cdot 1457 - 3 \cdot 19^2 = 17484 - 1083 = 16401$
   - $\sqrt{16401} \approx 128,06 \rightarrow$ **Nem teljes négyzet.**
2. **Ha $m = 31$:**
   - $k = 27683/31 = 893$
   - $D = 12 \cdot 893 - 3 \cdot 31^2 = 10716 - 2883 = 7833$
   - $\sqrt{7833} \approx 88,50 \rightarrow$ **Nem teljes négyzet.**
3. **Ha $m = 47$:**
   - $k = 27683/47 = 589$
   - $D = 12 \cdot 589 - 3 \cdot 47^2 = 7068 - 6627 = 441$
   - $441 = 21^2 \rightarrow$ **Teljes négyzet!**

4. lépés: A megoldás kiszámítása

Mivel $m = 47$ esetén a diszkrimináns teljes négyzet (21^2), számoljuk ki a értékét a másodfokú egyenlet megoldóképletével:

$$a = \frac{3m \pm \sqrt{D}}{6} = \frac{3 \cdot 47 \pm 21}{6} = \frac{141 \pm 21}{6}$$

- $a_1 = \frac{141+21}{6} = \frac{162}{6} = 27$
- $a_2 = \frac{141-21}{6} = \frac{120}{6} = 20$

Mivel $b = m - a$, ha $a = 27$, akkor $b = 20$ (és fordítva).

Összegzés a diákok számára

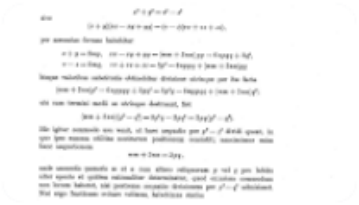
Ez a levezetés azért szép, mert a diákoknak nem kell 1-től 30-ig végigköbözniük a számokat. A **becslés ($m \leq 47$)** drasztikusan leredukálja a teret, a **diszkriminánsmódszer** pedig elegáns hidat képez a diofantoszi egyenletek és a középiskolás másodfokú egyenlet megoldóképlete között.

Számelméleti háttéranyagok

Characterizing the Sum of Two Cubes

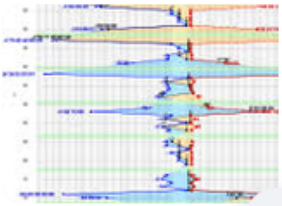
* Definition 4.1. Let n ∈ N. Then θ(n) is the least positive integer such that the Dio- phantine equation. nθ(n) = ... + y3. has a solution with x ≥ 0 and y ≥ 0. Be...

University of Waterloo
cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/\



Numbers that can be expressed as the sum of two cubes in exactly ...

Mathematics Stack Exchange
11 évvel ezelőtt



Sums of three cube. Wikipedia

Wikipedia
en.wikipedia.org/wiki/Sums_