Modellierung der Gestalt von Kristallen

Hans-Jürgen Elschenbroich

Raum und Form ist eine der Leitideen der Bildungsstandards. Dennoch spielt die klassische Raumgeometrie in der Sekundarstufe I nur ein Schattendasein. Hier wird eine wenig bekannte elementare Anwendung der Raumgeometrie vorgestellt, die auch fachübergreifend mit Chemie thematisiert werden kann, nämlich die Modellierung der Gestalt von Kristallen. Kristallographen setzen dazu in der Regel spezielle Software ein. In diesem Beitrag wird die Durchdringung zweier Körper mit dem Programm GeoGebra dynamisch visualisiert, mit elementaren raumgeometrischen Überlegungen mathematisiert und kristallographisch illustriert.

Die deutsche Post veröffentlichte 2015 eine Briefmarke zum 250-jährigen Jubiläum der Technischen Universität Bergakademie Freiberg (Abb. 1).

Dort ist neben den Fluorit-Kristallen eine Zeichnung zweier sich durchdringender Würfel zu sehen, die die Gestalt des daneben abgebildeten Fluorit-Kristalls modellhaft erklären soll (Abb. 2). Dieses geometrische Modell des ›Zwillingswürfels‹ findet sich auch in der kristallographischen Fachliteratur, so z. B. in der Fachzeitschrift Lapis (Offermann, 1992, 44).

Abb. 1. Briefmarke 250 Jahre Technische Universität Bergakademie Freiberg, © Deutsche Post, Bundesministerium der Finanzen, Elisabeth Hau, Martin Haubenreißer

1 Mathematische Modellierung

Die Durchdringung zweier Würfel ist ein wichtiges und zugleich elementares mathematisches Modell zur Erklärung der *Gestalt* bestimmter Kristalle. Hier haben wir eine morphologische Sicht auf die äußere Gestalt, die raumgeometrisch modelliert werden kann (d. h. keine molekulare Sicht auf das innere Kristallgitter, es wird *nicht das Wachstum* im molekularen Sinne modelliert).

Die dynamische Visualisierung wird mit der schulüblichen Software GeoGebra durchgeführt, nicht mit spezieller Kristallographie-Software wie z. B. SHAPE. Alle GeoGebra-Konstruktionen können im Internet heruntergeladen werden (Elschenbroich, 2018).

Als erstes konstruiert man dazu im 3D Fenster einen Würfel der Kantenlänge *a* samt einer Raumdiagonalen, um die dann der

MNU Journal – Ausgabe 2.2019 – ISSN 0025-5866 – © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

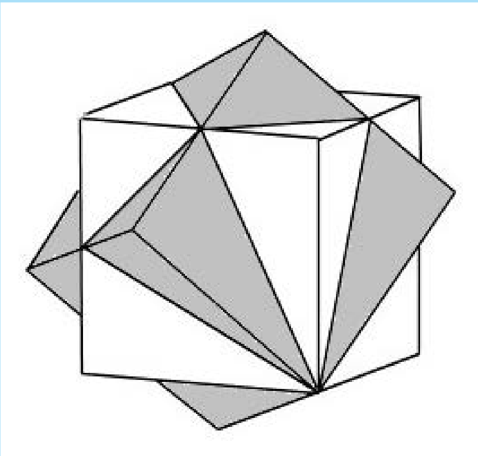

Abb. 2. Zwillingswürfel, © Elisabeth Hau

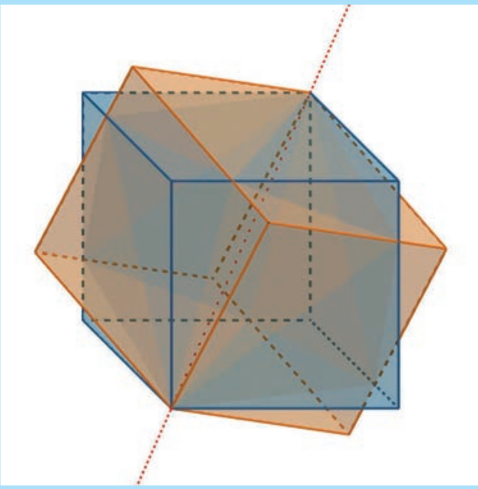

Abb. 3. Zwillingswürfel, Drehwinkel $\alpha = 30^\circ$

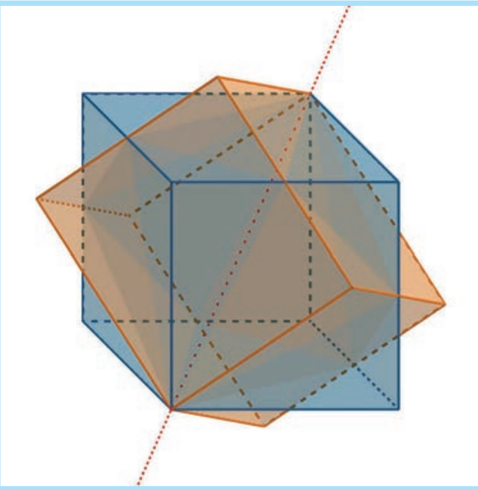

Abb. 4. Zwillingswürfel, Drehwinkel $\alpha = 60^\circ$

ursprüngliche Würfel mit einem Drehwinkel α gedreht wird. Zunächst wird die Vereinigung beider Würfel betrachtet. Der Drehwinkel α kann über einen Schieberegler variiert werden (Abb. 3). So kann man dann im wahrsten Sinne des Wortes ›einsehen‹, dass für $\alpha = 60^\circ$ ein symmetrischer Sonderfall (Abb. 4) vorliegt (ebenso für 180° und 300°), der im Folgenden weiter untersucht wird.

Es wird nun ein ›überstehendes‹ Teil markiert (Abb. 5), eine Differenzmenge. Es handelt sich dabei offensichtlich um eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche.

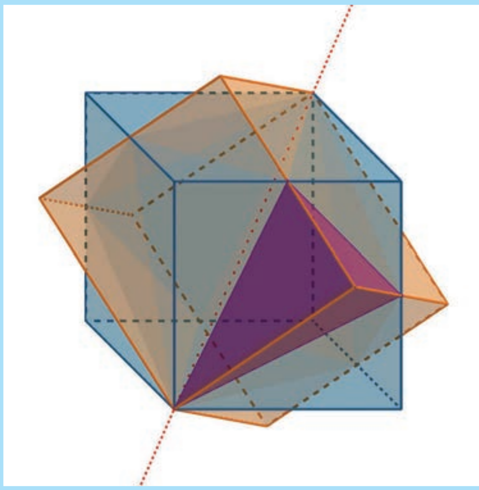

Abb. 5. Zwillingswürfel, überstehende Pyramide

Aufgabe 1

Bestimmen Sie Grundfläche und Volumen einer ›überstehenden‹ Pyramide.

Tipp: Beim Volumen bietet es sich an, als Grundfläche das kleine rechtwinklig gleichschenklige Dreieck mit den Katheten $\frac{a}{2}$ zu wählen. Dann hat man als Höhe die Kantenlänge a des Würfels.

Lösung

Bei der Grundfläche ist es sinnvoll, subtraktiv vorzugehen.

$G_{Py} = a^2 - \frac{a^2}{8} - 2\frac{a^2}{4} = \frac{3}{8}a^2.$

Beim Volumen ergibt sich: $V_{Py} = \frac{1}{3}\frac{a^2}{8}a = \frac{a^3}{24}.$

Kasten 1. Aufgabe ›überstehende‹ Pyramide

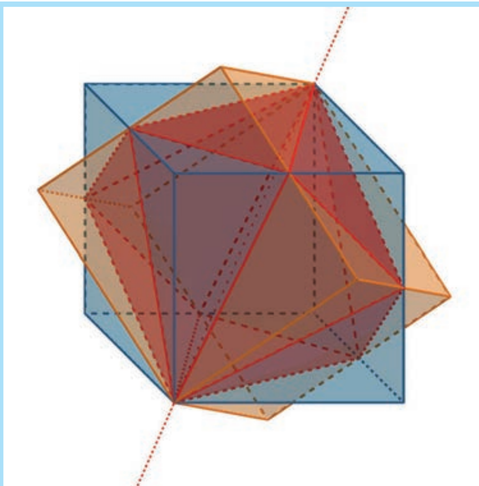

Abb. 6. Zwillingswürfel mit Doppelpyramide

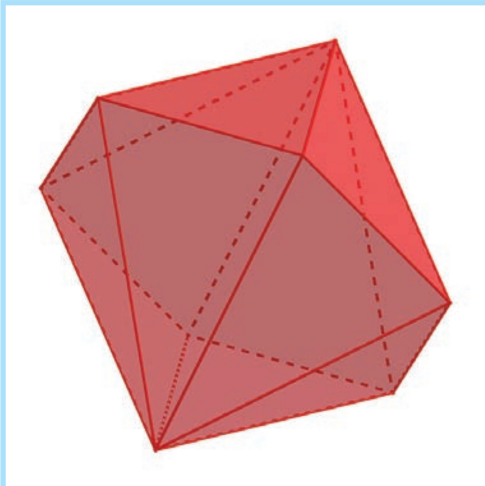

Abb. 7. Innere Doppelpyramide

Aufgabe 2

Bestimmen Sie Oberfläche, Volumen und Höhe der inneren Doppelpyramide.

Lösung

Oberfläche: $O = 12\frac{3}{8}a^2 = \frac{9}{2}a^2$.

Volumen: $V = a^3 - 6\frac{a^3}{24} = \frac{3}{4}a^3$.

Höhe: Identisch mit der Raumdiagonalen im Würfel, $h = \sqrt{3}\,a$.

Kasten 2. Aufgabe innere Doppelpyramide

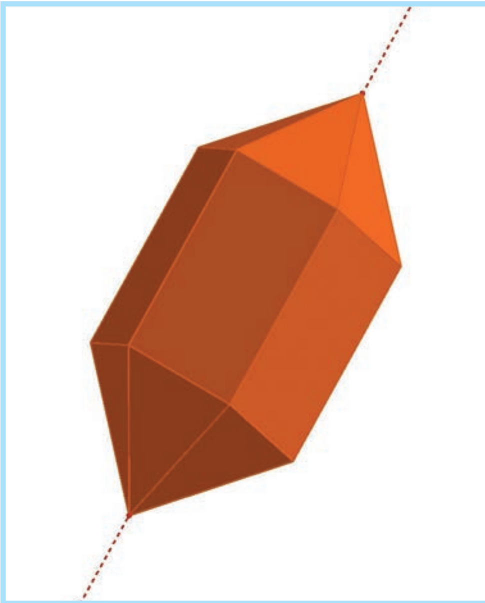

Abb. 8. Doppelender, Bipyramide mit Prisma geschnitten

Im Unterricht bietet sich an dieser Stelle als erste Aufgabe die Berechnung von Grundfläche und Volumen einer derartigen überstehenden Pyramide an (Kasten 1).

Schneidet man nun alle überstehenden Teile ab, so erhält man (für $\alpha = 60°$) als Durchschnitt beider Würfel eine sechsseitige Doppelpyramide (Abb. 6, 7).

Im Unterricht bietet sich an dieser Stelle als zweite Aufgabe die Berechnung von Oberfläche und Volumen der inneren Doppelpyramide an (Kasten 2).

Schneidet man nun noch die Doppelpyramide längs der Diagonalen mit einem sechsseitigem Prisma (Abb. 8), so erhält man eine Gestalt, die in der Kristallographie als ›Doppelender‹ bekannt ist (Abb. 11).

2 Galerie

In den Abbildungen 9–11 werden Bilder realer Kristalle gezeigt, die deutlich machen, dass die betrachteten Figuren tatsächlich in der Natur vorkommen, auch wenn sie in dieser idealtypischen Form selten zu finden sind.

Abb. 9. Vereinigung zweier Würfel, Kristall: Loparit, © Chinellato Matteo, *https://www.mindat.org/photo-281436.html*

Abb. 10. Durchschnitt zweier Würfel, Bipyramide. Kristall: Blauquarz, © Chinellato Matteo, *https://www.mindat.org/photo-121070.html*

Abb. 11. Durchschnitt von zwei Würfeln und Prisma, Doppelender, Kristall Quarzit

3 Vorteile und Beschränkungen des digitalen Werkzeugs

Die Vorteile der dynamischen Visualisierung sind offensichtlich: Man kann im Modell einfach experimentieren, indem man mit einem Schieberegler den Drehwinkel α variiert. Dies wäre weder mit Zeichnungen noch mit Realmodellen so leicht und einsichtig möglich.

Des Weiteren ist es so möglich, den Urbild-Würfel und den gedrehten Würfel in einem Bild zusammen zu betrachten. Arbeitet man im engeren Sinne handlungsorientiert, so hat man nur einen Würfel, den man zwar um eine Diagonale drehen kann, dabei das Urbild aus dem Blick verliert. Die gleichzeitige Ansicht beider Würfel ist ein großer anschaulicher Gewinn für die Untersuchung auf Vereinigung, Differenz und Durchschnitt.

Eine gewisse Beschränkung ergibt sich bei der aktuellen Version von GeoGebra gegenüber statischen CAD-Programmen oder speziellen Kristallographie-Programmen, weil in GeoGebra 3D die Werkzeuge zum Erzeugen von Körpern noch limitiert sind. Das dynamische Geometrie-Programm Cabri 3D hat zwar schon mächtige Werkzeuge zur Konstruktion von komplizierteren Schnittkörpern (SCHUMANN, 2005), ist aber in Deutschland kaum verbreitet.

In den hier vorliegenden GeoGebra-Konstruktionen werden 3D-Gebilde ggf. aus Flächen und Strecken erzeugt. Das sieht dann zwar aus wie ein dreidimensionaler Körper, ist es aber als Objekt in GeoGebra nicht. Das ist nicht unwesentlich.

Zum einen kann eine solche Konstruktion ziemlich aufwändig und zeitraubend sein. Zum anderen hat man dadurch nicht ein 3D-Objekt in der Algebra-Liste der Objekte, sondern ein Konglomerat diverser Punkte, Strecken und Flächen. Deswegen kann man dann nicht auf Eigenschaften von 3D Objekten wie Volumen und Oberfläche zugreifen, sondern solche Werte müssen separat berechnet werden.

So besteht hier die Bipyramide in Abbildung 5 aus zwei separaten Pyramiden und der Doppelender in Abbildung 8 nur aus einzelnen Flächen mit zugehörigen Eckpunkten und Kanten im Raum.

Es ist aber davon auszugehen, dass mit der weiteren Entwicklung von GeoGebra es möglich wird, diese Schnittkörper auch als 3D-Objekte mit Oberfläche und Volumen zu konstruieren.

4 Realmodell

Sicher ist der betrachtete symmetrische Fall mit $\alpha = 60^\circ$ ein Sonderfall, quasi eine glückliche Fügung der Natur. Mit einer dynamischen Visualisierung lassen sich in gewissem Maße auch andere Fälle betrachten, was hier nicht weiter vertieft wird.

Für eine Thematisierung im Rahmen des raumgeometrischen Unterrichts dürfte der symmetrische Fall ausreichen, er ist mathematisch genügend reichhaltig. Auch bieten sich dann klassisch handlungsorientierte Zugänge an wie das Basteln eines Modells aus Karton oder Strohhalmen, das man dann tatsächlich in die Hand nehmen, auseinandernehmen und zusammensetzen kann (Abb. 12).

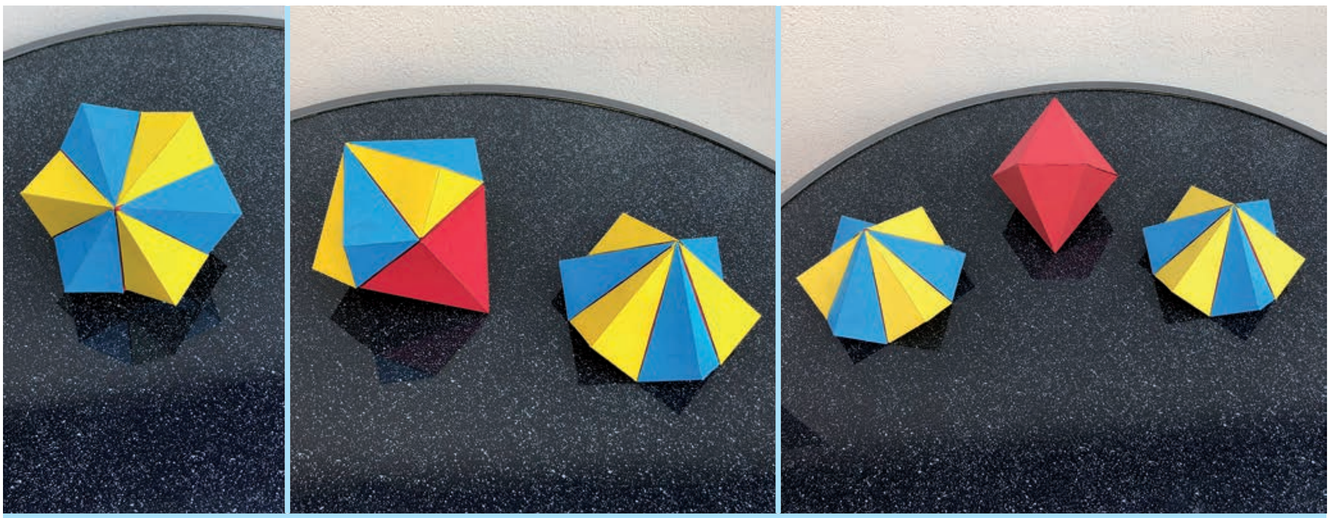

Abb. 12. Explosionsmodell: Innere Bipyramide und überstehende Teile als ›Dach‹

5 Vertiefungen

Eine mögliche Weiterführung, die sich auch in der Kristallographie findet, ist die symmetrische Durchdringung zweier gleich großer Tetraeder. Dabei erhält man als Vereinigung den Keplerstern ›stella octangula‹ (Abb. 13).

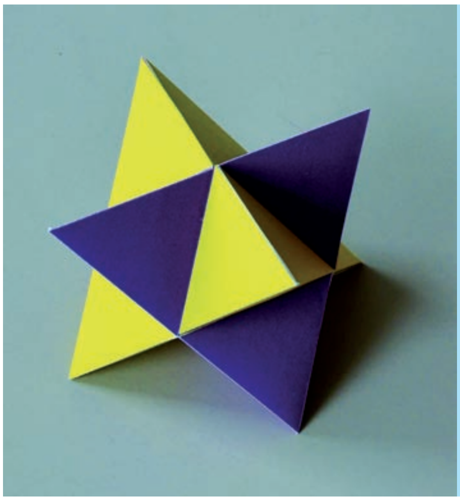

Abb. 13. Symmetrische Durchdringung zweier Tetraeder (PÖPPE, 2018)

Mögliche raumgeometrische Aufgabenstellungen dazu sind:
- Wie kann man aus dem Ursprungs-Tetraeder das zweite Tetraeder konstruieren?
- Welche Gestalt hat dann der Durchschnitt, von welchen Flächen wird er begrenzt?
- Wie groß ist sein Volumen im Vergleich zum Tetraeder-Volumen?

Als zweite Vertiefung könnte entsprechend die Durchdringung von Würfel und Oktaeder konstruiert und untersucht werden (Abb. 14):
- Wie kann man aus dem Ursprungs-Würfel das Oktaeder konstruieren?

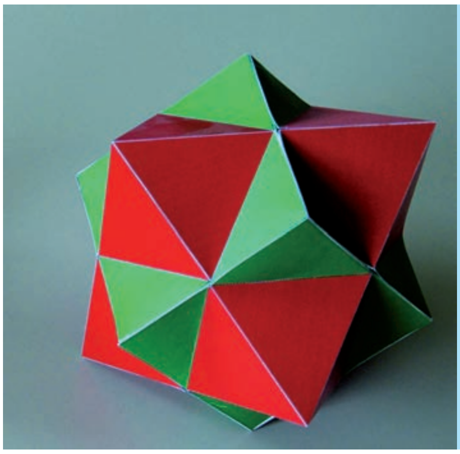

Abb. 14. Durchdringung von Würfel und Oktaeder (PÖPPE, 2018)

- Welche Gestalt hat dann der Durchschnitt, von welchen Flächen wird er begrenzt?
- Wie groß ist sein Volumen im Vergleich zum Tetraeder-Volumen bzw. Würfel-Volumen?

6 Fazit

Die Untersuchung von Durchdringungen und Schnittkörpern ist ein schönes, anschauliches und elementares Thema der Raumgeometrie, das (bei geeigneten einfachen Grundkörpern) in der Sekundarstufe I für handlungsorientiertes Erzeugen, für dynamisches Visualisieren und für elementare Berechnungen von Oberflächen und Volumina der Vereinigungs- und Schnittkörper genutzt werden kann und mit der Anwendung auf Kristalle eine Anwendungsorientierung und einen fächerübergreifenden Ansatz zur Chemie bietet. Die Beschränkung auf symmetrische Fälle ist mathematisch völlig ausreichend und berücksichtigt die knappe zur Verfügung stehende Zeit.

Literatur

ELSCHENBROICH, H.-J. (2018). Modellierung von Kristallen. *www.geogebra.org/m/ekEJVwvd* (1.2.2018).

OFFERMANN, E. (1992). Bergkristalle besser verstehen. *extraLapis, 3*, 42–51.

PÖPPE, C. (2018). Kartonbausätze für geometrische Körper. *www.poeppe-online.de* (1.2.2018).

SCHUMANN, H. (2005). Die interaktive Konstruktion von Durchdringungsobjekten mit Cabri 3D. *www.mathe-schumann.de/veroeffentlichungen/dynamische_raumgeometrie_3/SchumannDurchdringungsobjekteCabri3D.pdf* (1.2.2018).

HANS-JÜRGEN ELSCHENBROICH, Korschenbroich, hans-juergen.elschenbroich@mnu.de, war Lehrer für Mathematik und Informatik, Fachleiter am Studienseminar, Medienberater sowie Fachreferent Mathematik im MNU-Bundesvorstand.