

Título

Demostración gráfica del teorema de Pitágoras mediante sustracción del cuadrado de la hipotenusa o los cuadrados de los catetos, del cuadrado de la suma de los catetos, respectivamente.

Resumen

En el presente trabajo, una vez especificada su intención y fundamentado sobre los postulados teóricos pertinentes, tanto de educativos como disciplinares, se presentará una aplicación desarrollada para la plataforma GeoGebra, para ilustrar y demostrar de manera algebraica y gráfica, el teorema de Pitágoras, como una estrategia instruccional alternativa para encuadrar en el las clases de trigonometría de bachillerato.

Propósito

Que los alumnos de bachillerato puedan verificar la equivalencia variacional entre las representaciones algebraicas y gráficas, mediante una aplicación visual interactiva que les resulte atractiva e intuitiva.

Referentes teóricos

Teoría de las representaciones semióticas de Duval.

Los objetos matemáticos no pueden ser percibidos ni observados directamente por lo que los sistemas de representaciones semióticas están para designar, comunicar y trabajar en objetos matemáticos y con ellos, es decir, la denotación.

La actividad matemática necesita tener diferentes sistemas de representación que proporciona posibilidades muy específicas y siempre implica la sustitución de un sistema de representación semiótica por otro.

Consiste pues en la transformación de las representaciones y se dividen en dos categorías:

Tratamientos: Son las transformaciones de representaciones que aparecen dentro del mismo registro.

Conversiones: Son las transformaciones de representaciones que consisten en cambiar un registro a otro diferente, sin modificar los objetos matemáticos denotados desde un principio.

La comprensión conceptual en matemáticas conlleva sinergia cognitiva de registros por lo que se requiere fuertemente la coordinación de ellos.

Teorema de Pitágoras

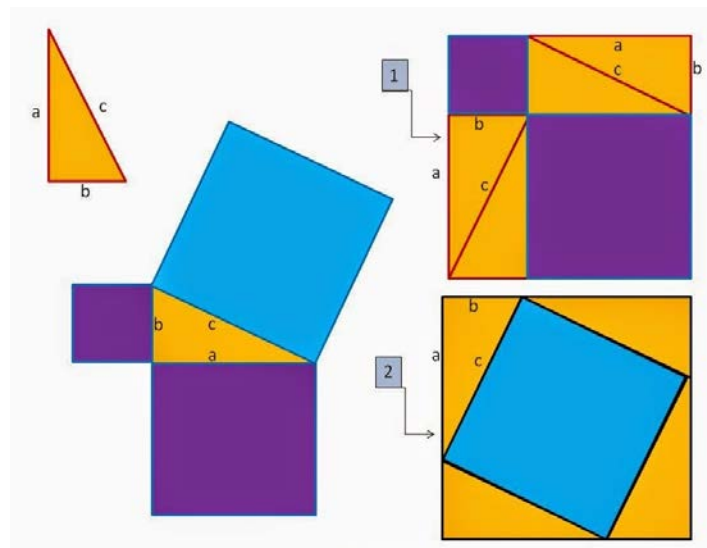
El teorema de Pitágoras establece que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos.

El Teorema de Pitágoras puede haberse conocido mucho antes del nacimiento de Pitágoras, pero fue comprobado en el siglo VI a.C. por el matemático Pitágoras.

El teorema de Pitágoras es de los que cuenta con un mayor número de demostraciones diferentes, utilizando métodos muy diversos.

Demostración gráfica del teorema.

Partiendo de la configuración inicial, con el triángulo rectángulo de lados a , b , c , y los cuadrados correspondientes a catetos e hipotenusa, se construyen dos cuadrados diferentes:



Uno de ellos está formado por los cuadrados de los catetos, más cuatro triángulos rectángulos iguales al triángulo inicial.

El otro cuadrado lo conforman los mismos cuatro triángulos, y el cuadrado de la hipotenusa.

Si a cada uno de estos cuadrados les quitamos los triángulos, evidentemente el área del cuadrado de la hipotenusa equivale a la de los cuadrados de los catetos.

Desarrollo de la aplicación

Se generará una aplicación abierta, gráfica e interactiva, que ilustrará las equivalencias que propone el teorema de Pitágoras, entre el cuadrado de la hipotenusa y los cuadrados de los catetos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

que se evidenciarán visualmente mediante el contraste de sustraer aquel y estos del cuadrado de la suma de los catetos.

$$4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = (a + b)^2 - c^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 + b^2) = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2 = 2(a \cdot b)$$

al observarse que para ambos casos las diferencias son iguales al cuádruplo del propio triángulo equilátero.

Conservando la escala homogénea para ambas ventanas, los polígonos codificados por colores mantendrán sus posiciones relativas para relacionarlos fácilmente, a razón de ser identificadas sus equivalencias, y se ajustarán de manera automática para mantener las proporciones, prestando un escenario visual, amigable y sencillo para comprobar lo que algebraicamente se postula.

Estrategia didáctica

Se pedirá a los alumnos que jueguen con la aplicación, deslizando los puntos de control A y B que determinan el largo de cada cateto en un triángulo rectángulo, mientras dan cuenta en tiempo real de como los cálculos de los cuadrados se corresponden.

Por otro lado, podrán observar, alternativamente apagando o encendiendo su visualización correspondiente, que tanto el cuadrado de la hipotenusa como los de los catetos, sustraídos de la construcción del cuadrado de la suma de los catetos, generan áreas residuales equivalentes a cuatro veces la del propio triángulo rectángulo, que también podrán ajustar en sus dimensiones con los mismos puntos de control.

Será sencillo entonces solicitar que se prueben diversas combinaciones a discreción y se obtengan conclusiones reflexivas, inclusive de tipo metacognitivo, al respeto de la asimilación de los esquemas novedosos asociados entre ambos registros semióticos.

Encuadre

En el bachillerato, como en muchas situaciones de la de la vida cotidiana y profesional, un problema común es la relación entre los lados de cualquier construcción geométrica que pueda ser reducida a triángulos con alguno de sus ángulos recto, de modo que un tópico recurrente en los programas de estudios de los currículos escolares es indudablemente el del teorema tradicionalmente adjudicado al matemático griego Pitágoras.

No obstante su utilidad práctica, este tema suele ser bastante sórdido desde el punto de vista teórico, pues no es, ni mucho menos, obvia su proposición, que en el mejor de los casos pueda ser ilustrada con un ejemplo o dos de triadas pitagóricas de enteros que se corresponden, dejando oscuros cualesquiera valores fraccionarios intermedios.

Proveer al alumno con una herramienta sencilla, amigable, visual, interactiva y automática que le ahorrará múltiples cálculos monótonos para hacer corroboraciones sucesivas de incontables combinaciones para valores diversos de catetos, será sin duda una motivación evidente y una estrategia disuasoria ante la reticencia que tradicionalmente se presenta ante esta temática.