1/2/2025

μαθηματικά

Β΄ Λυκείου - Προσανατολισμού

Δέσμη Ευθειών

Ανάδειξη ερωτημάτων και απρόσμενες επεκτάσεις με αφορμή ένα ψηφιακό δόμημα

Μ. Τσιλπιρίδης
Μαθηματικός - Msc

Αφορμή για τα επόμενα, η **άσκηση Β2** σελ. 70 του σχολικού βιβλίου Μαθηματικών Β΄ Λυκείου Προσανατολισμού, που αντιπροσωπεύει πλήθος αντίστοιχων ασκήσεων.

2. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της μορφής

$$(2\alpha^2+\alpha+3)\,x+(\alpha^2-\alpha+1)\,y+(3\alpha+1)=0\,,\ \ \alpha\in\mathbf{R}$$

διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη:

1ος τρόπος:

Για $\alpha=0$ και $\alpha=1$ οδηγούμαστε στο σύστημα $\begin{cases}3x+y+1=0\\6x+y+4=0\end{cases}$

Η λύση του συστήματος είναι $(x,y)=(-1,2)$.

Προσοχή!

Η λύση που βρήκαμε θα πρέπει να επαληθεύει την αρχική εξίσωση για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

Οπότε αντικαθιστώντας $x=-1, y=2$, επαληθεύουμε το προηγούμενο .

*Τρόποι απόδειξης για να διέρχονται άπειρο πλήθος ευθειών από το **ίδιο σημείο!***

(Δέσμη ευθειών)

2ος τρόπος:

Κάνοντας πράξεις στην αρχική εξίσωση , αυτή μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή:

$$(2x+y)\alpha^2+(x-y+3)\alpha+(3x+y+1)=0 \qquad (1)$$

Παρατηρώντας προσεκτικά την (1), παρατηρούμε ότι είναι ένα **πολυώνυμο ως προς α**, το οποίο θα πρέπει να ισούται με 0 **για κάθε τιμή του α**. Με άλλα λόγια να είναι το **μηδενικό πολυώνυμο**.
Αυτό μπορεί να συμβαίνει αν και μόνο αν ισχύουν:

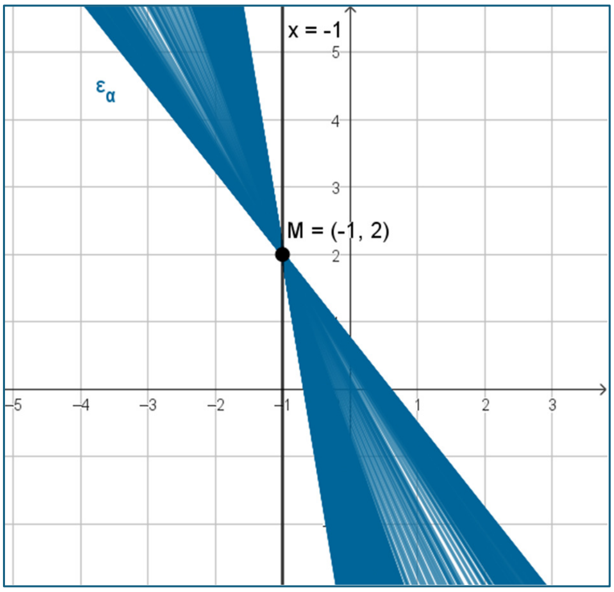
$$\begin{cases}2x+y=0\\x-y+3=0\\3x+y+1=0\end{cases}$$

Λύνουμε το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων και **(προσοχή!)** αντικαθιστούμε τη λύση $x=-1, y=2$ και στην 3η εξίσωση ώστε να διαπιστώσουμε ότι επαληθεύεται.

Επεκτάσεις

Ε1. Γραφική ερμηνεία

Στο GeoGebra δίνοντας την αρχική εξίσωση των ευθειών θα πάρουμε το επόμενο σχήμα:



Σχήμα 1

Παρατηρώντας προσεκτικά το σχήμα που σχηματίζεται από το Geogebra, εγείρονται αρκετά και ενδιαφέροντα ερωτήματα.

Πάμε λοιπόν:

Ε.1 (κλασικό ερώτημα)

Γιατί η εξίσωση $(\varepsilon_\alpha): \ (2\alpha^2+\alpha+3)x+(\alpha^2-\alpha+1)y+3\alpha+1=0, \ \alpha\in\mathbb{R}$ (2)

είναι εξίσωση ευθειών (και όχι ευθείας). Δηλαδή γιατί η εξίσωση (2) «παράγει» ευθείες για τις διάφορες τιμές του α;

Απάντηση:

Η εξίσωση (2) είναι της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$, οπότε αρκεί τα Α και Β να μην είναι **ταυτόχρονα** 0.

Για την (2) είναι απλό να δούμε ότι $2\alpha^2+\alpha+3>0$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική.

Σχόλιο: Το ίδιο ισχύει και για το τριώνυμο $\alpha^2-\alpha+1$, δηλαδή $\alpha^2-\alpha+1>0$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$. Αυτό θα χρειαστεί στα παρακάτω.

Ε.1.1

Από το Σχήμα 1, «φαίνεται» ότι η **κατακόρυφη** ευθεία $x=-1$ δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_α. Να ελέγξετε αν αυτός ο ισχυρισμός είναι σωστός.

Απάντηση

Η κατακόρυφη ευθεία $x=-1$ θα ανήκει στην οικογένεια ε_α, αν και μόνο αν ο συντελεστής του y είναι 0. Άρα θα πρέπει: $\alpha^2-\alpha+1=0$ που αυτό είναι αδύνατο αφού η διακρίνουσα $\Delta=-3$ είναι αρνητική.

Άρα η κατακόρυφη ευθεία $x=-1$ όντως δεν ανήκει στην οικογένεια ε_α

Ε.2

Από το σχήμα 1 προκύπτει ο ισχυρισμός ότι **«όλες οι ευθείες** ε_α **σχηματίζουν αμβλεία γωνία με τον άξονα x'x»**.
Είναι Αληθής ή Ψευδής;

Απάντηση

Αρκεί οι ευθείες (ε_α): $(2\alpha^2+\alpha+3)x+(\alpha^2-\alpha+1)y+3\alpha+1=0,\ \alpha\in\mathbb{R}$ να έχουν **αρνητική κλίση**.
Οι κλίσεις των ευθειών ε_α είναι:

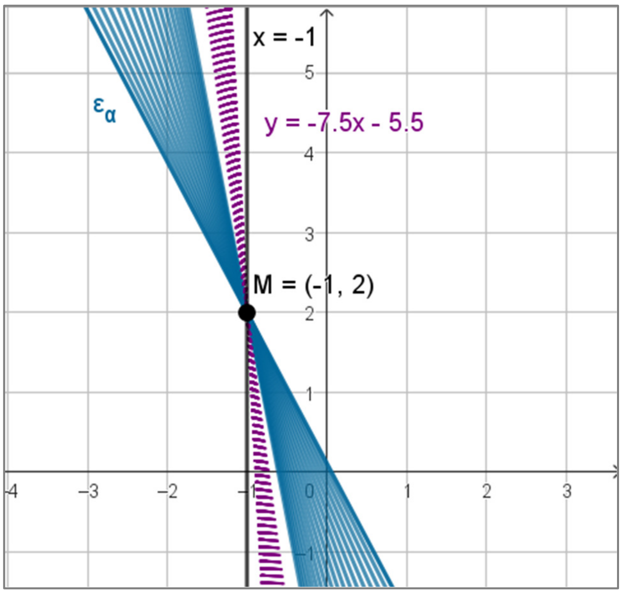
$$\lambda_{\varepsilon_\alpha}=-\frac{2\alpha^2+\alpha+3}{\alpha^2-\alpha+1}$$

Οπότε από το Ε.1.1 επειδή τα δύο τριώνυμα είναι **μόνιμα θετικά**, άρα $\lambda_{\varepsilon_\alpha}<0$ και επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.

Ε.3

Από το σχήμα 2 προκύπτει «**ότι υπάρχουν ευθείες που ενώ διέρχονται από το σημείο** $M(-1,2)$ **και έχουν αρνητική κλίση, εν τούτοις δεν ανήκουν στην οικογένεια** ε_α».
Για παράδειγμα, η ευθεία $y=-13x-11$ δεν ανήκει στην ε_α, ενώ η ευθεία $y=-5x-3$ ανήκει στην ε_α.

Το ερώτημα που προκύπτει είναι **«πως μπορούμε να βρούμε συνθήκες ώστε μία ευθεία που περνάει από το σημείο Μ, να ανήκει στην οικογένεια ευθειών** ε_α**»;**



Σχήμα 2

Απάντηση:

Μια οποιαδήποτε ευθεία ε_λ με κλίση λ που περνάει από το σημείο $M(-1,2)$, θα έχει εξίσωση:

$$y-2=\lambda(x+1)\Leftrightarrow \lambda x-y+\lambda+2=0 \quad (3)$$

Για να ανήκει μια ευθεία ε_λ στην οικογένεια

$$(\varepsilon_\alpha):\ (2\alpha^2+\alpha+3)x+(\alpha^2-\alpha+1)y+3\alpha+1=0,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

αρκεί και πρέπει να ισχύουν:

$$\frac{2\alpha^2+\alpha+3}{\lambda}=\frac{\alpha^2-\alpha+1}{-1}=\frac{3\alpha+1}{\lambda+2},\ \lambda\neq -2,\ 0 \quad (4)$$

Οι ευθείες:

$$\begin{cases} Ax+By+\Gamma=0 \\ A'x+B'y+\Gamma'=0 \end{cases}$$

ταυτίζονται, *αν και μόνο αν:*

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{\Gamma}{\Gamma'}$$

Από την 1^η ισότητα της (4) παίρνουμε ότι: $\lambda=\dfrac{2\alpha^2+\alpha+3}{-\alpha^2+\alpha-1}$ (5)

ενώ από την 2^η ισότητα της (4) παίρνουμε ότι: $\lambda+2=\dfrac{-3\alpha-1}{\alpha^2-\alpha+1}$ (6)

Ο συνδυασμός των (5) & (6) οδηγεί σε μία ταυτοτική σχέση που ισχύει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$. Επομένως το πρόβλημα ανάγεται στο να μπορέσουμε να βρούμε ποιες τιμές παίρνει το κλάσμα στη σχέση (4)[1].

Σκεφτόμαστε ως εξής:

---

[1] Στην ουσία χρειάζεται να βρούμε το **σύνολο τιμών** της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{2x^2+x+3}{-x^2+x-1}$. Το συγκεκριμένο όμως θέμα επιλύεται με χρήση μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου, οπότε απαιτείται να σκεφτούμε διαφορετικά.

Η σχέση (5) οδηγεί στην εξίσωση: $(\lambda+2)\alpha^2+(1-\lambda)\alpha+3+\lambda=0$ (7)

που επειδή πρέπει $\lambda\neq-2$, είναι μία **εξίσωση 2^{ου} βαθμού ως προς α**. Επομένως αφού $\alpha\in\mathbb{R}$, θα πρέπει η διακρίνουσα Δ να είναι μη αρνητική.

Άρα: $\Delta\geq0\Leftrightarrow...\Leftrightarrow3\lambda^2+22\lambda+23\leq0$

Η τελευταία σχέση θα ισχύει αν και μόνο αν: $\underbrace{\dfrac{-11-2\sqrt{3}}{3}}_{\approx-6,1}\leq\lambda\leq\underbrace{\dfrac{-11+2\sqrt{3}}{3}}_{\simeq-1,3}$

Τέλος για $\lambda=-2$ από την (7) παίρνουμε $\alpha=-\dfrac{1}{3}$ οπότε η ευθεία $y=-2x$ ανήκει επίσης στην οικογένεια ε_α.

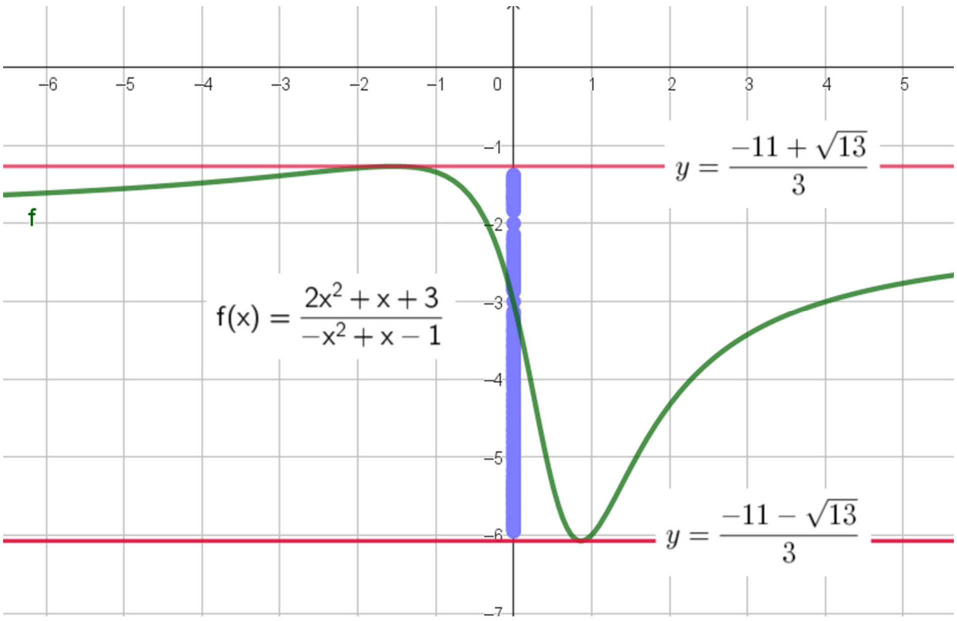
Ε.4

Με τη βοήθεια του Geogebra να ερμηνεύσετε γραφικά τα προηγούμενα αποτελέσματα.

Απάντηση:

Ορίζουμε στο Geogebra τον τύπο της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{2x^2+x+3}{-x^2+x-1}, x\in\mathbb{R}$ και των οριζόντιων ευθειών $y=\dfrac{-11\pm2\sqrt{13}}{3}$.

Το αποτέλεσμα είναι αυτό που φαίνεται στο επόμενο σχήμα από το οποίο διακρίνουμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.



Το συγκεκριμένο διάστημα είναι αυτό που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα για τις τιμές του λ!

E.5 (ρητορικό…)

Πόσο καθοριστική ήταν η συμβολή του λογισμικού **Geogebra** στην ανάδειξη των προηγούμενων ερωτημάτων;

Ματθαίος Τσιλπιρίδης
Μαθηματικός MSc