Mathematik

Meinung / Ergänzung

Wie ist nun T, die Summe der Binomialverteilten Zufallsgrößen, verteilt?

Unter der Annahme, dass die X_i stochastisch unabhängig voneinander ~~wären~~ sind, ist auch die Summe Binomialverteilt.

natürlich nicht! Aber.... nun gut....

Aus der Faltungsformel für Wahrscheinlichkeiten lässt sich herleiten

$$\mathbf{T} \sim Bin(14 \cdot 550; 0{,}000138)$$

implizit ist auch hier nicht korrekte Annahme von konstanter Inzidenz von 96,7 in HH über den Zeitraum der vorhergehenden 14 Tage enthalten

also gesucht:

$$P(89 \leq T \leq 98)$$

$$= \sum_{k=89}^{98} \binom{7700}{k} \cdot 0{,}000138^{k} \cdot 0{,}999862^{7700-k}$$

[TI-NSpire CAS App liefert „0."]

Da hier bei der Berechnung der Binomialkoeffizienten viele Tools an ihre Grenzen kommen, erscheint es sinnvoll alternative, approximative Verteilungen zu werden:

Ansatz 1b: Approximation mit Normalverteilung

Die häufigste Approximation der $Bin(n,p)$ Verteilung ist die $N(\mu,\sigma)$ Verteilung. Als Faustformel gilt aber, dass diese nur bei $npq > 9$ bzw. $\sqrt{npq} > 3$ gute Approximationen liefert.

Dies ist hier NICHT gegeben.

Ansatz 1c: Approximation mit Poissonverteilung

Für seltene Ereignisse und „n groß, p klein" bietet sich die Poisson-Verteilung an.

Für $T \sim Poi(\lambda)$ ist $E(T) = \lambda$

Für λ wird daher $\lambda = n \cdot p = 7700 \cdot 0{,}000138 \approx 1{,}0626$ verwendet

Die Prüfung der Voraussetzg. des Poisson-Grenzwertsatzes ist hier natürlich fraglich, nicht nur wegen fraglicher Bedeutung von $n \to \infty$ bei endlicher Anzahl Menschen (in HH/auf Welt...)

Anmerkung: Dies entspricht: Der Erwartungswert für die Anzahl an Schülern, die sich bei einer Schule von 550 Schülern innerhalb von 14 Tagen infiziert, von 1,06?

Mathematik

Meinung/Anmerkung

Nun ist mit $P(T=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion auf $\mathbb{N}_0$ definiert.

$$P(T=94) \approx e^{-1{,}0626} \cdot \frac{1{,}0626^{94}}{94!}$$

$$\approx 9{,}57 \cdot 10^{-145}$$

Für alle nicht-Mathematiker: Null Komma 144 Nullen 957.

bzw.

$$P(89 \leq T \leq 98)$$

$$\approx \sum_{k=89}^{98} P(T=k)$$

$$\approx \sum_{k=89}^{98} e^{-1{,}0626} \cdot \frac{1{,}0626^k}{k!}$$

$$\approx \underline{\underline{4{,}709 \cdot 10^{-135}}}$$

WOW, nur noch 134 Nullen direkt hinterm Komma!

Spaßeshalber:

Wie gros ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 50 und 100 positive Testergebnisse „gleichzeitig & unabhängig" voneinander eingeschleppt werden:

$$P(50 \leq T \leq 100)$$

$$= \sum_{k=50}^{100} P(T=k)$$

$$\approx 2{,}416 \cdot 10^{-64}$$

Wahnsinn, nur noch 63 Nullen direkt hinterm Komma!

Übrigens: Schon die Wahrscheinlichkeit für mehr als 5 positive Tests unter der Annahme des „unabhängigen Einschleppung" beträgt nur 0,000812!

$$P(T>5) = 1 - \sum_{k=0}^{5} P(T=k) \approx 0{,}000812$$

Oder im Politiker Sprech: Nicht einmal im Promille Bereich!