Ein faires Glücksrad mit unterschiedlich großen Sektoren

Erscheint in MU 6/2019

Judith Schilling   Prof. Norbert Henze

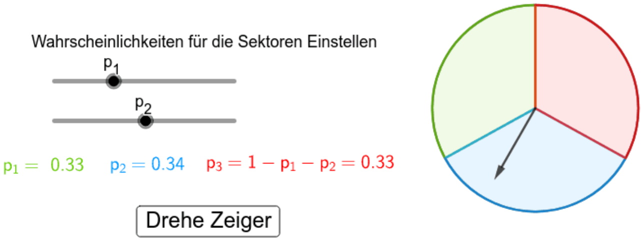
Institut für Stochastik

28.09.2019

Karlsruher Institut für Technologie

Selbstversuch mit GeoGebra

Ein faires Glücksrad für drei Spieler



- Drei Spieler drehen Glücksrad mit Sektoren 1, 2 und 3
- Ziel (und Ende) des Spiels: Als Erster den eigenen Sektor treffen

Für welche Wahl der Werte p_1, p_2 und p_3 ist das Spiel fair?

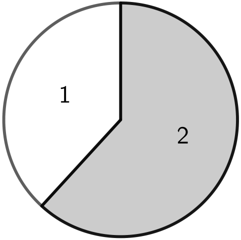
https://www.geogebra.org/m/mcxt9san

Sei S_i das Ereignis, dass Spieler i gewinnt. Dann soll gelten

$$\mathbb{P}(S_1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(S_2)$$

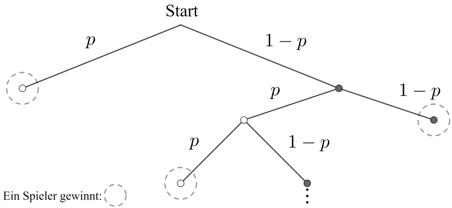
Lösungsstrategie 1

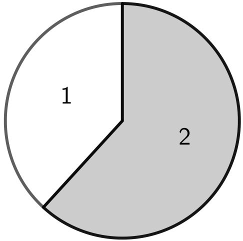
- Eine Spielrunde = Spieler 1 und 2 drehen jeweils einmal
- Das Spiel ist fair, wenn beide Spieler in der ersten Runde die gleiche Gewinnw' haben
- Spieler 1 gewinnt mit W' $p := p_1$ und Spieler 2 mit W' $p_2 = (1-p)^2$ in der ersten Runde!



$\Rightarrow$ Es muss gelten $p = (1-p)^2 \Leftrightarrow p^2 - 3p + 1 = 0$

Lösungsstrategie 2

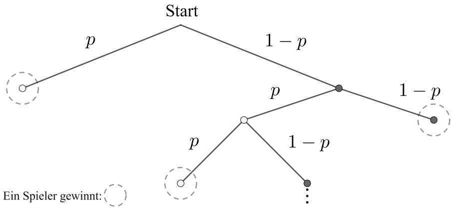


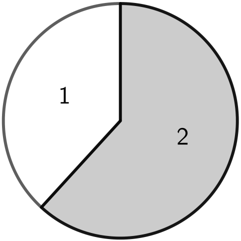


- Spieler 1 gewinnt mit W' p in der ersten Runde
- Die W', dass er nochmal an der Reihe ist, beträgt $(1-p)p$
- Es gilt: $\mathbb{P}(S_1) = p + (1-p)p \cdot \mathbb{P}(S_1)$
- Analog: $\mathbb{P}(S_2) = (1-p)^2 + (1-p)p \cdot \mathbb{P}(S_2)$

Theoretische Lösungswege für zwei Spieler

Lösungsstrategie 3

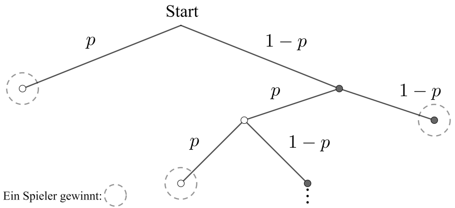


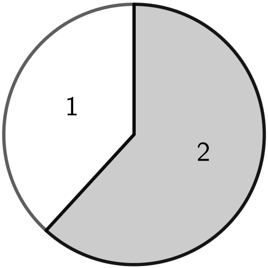


$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_1) &= p + (1-p)\cdot p^2 + (1-p)p(1-p)p^2 + \ldots \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} p^{j+1}(1-p)^j = \frac{p}{1-p(1-p)}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Es muss gelten $\frac{p}{1-p(1-p)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow p^2 - 3p + 1 = 0$

Theoretische Lösungswege für zwei Spieler



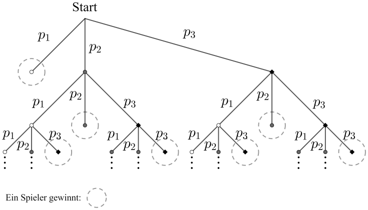


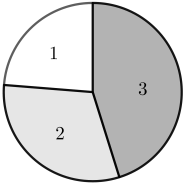
- Alle Strategien führen zu der quadratischen Gleichung $p^2 - 3p + 1 = 0$
- Lösung im Einheitsintervall: $p = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,382 \Rightarrow 1 - p = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
- Es gilt

$$\frac{1-p}{p} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

- Ein „goldener Schnitt" sorgt für Gerechtigkeit

Verallgemeinerung auf mehr als zwei Spieler?





- Das Spiel ist fair, falls $p_1 = (1-p_1)p_2 = (1-p_1)(1-p_2)p_3$

$$\Leftrightarrow p_2 = \frac{p_1}{1-p_1}, \quad p_3 = \frac{p_2}{1-p_2} = \frac{p_1}{1-2p_1}$$

- Mit $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ und $p := p_1$ folgt

$$p + \frac{p}{1-p} + \frac{p}{1-2p} = 1 \Leftrightarrow 2p^3 - 8p^2 + 6p - 1 = 0$$

- $p_1 \approx 0,237, \quad p_2 \approx 0,311, \quad p_3 \approx 0,452$

Verallgemeinerung auf mehr als zwei Spieler?

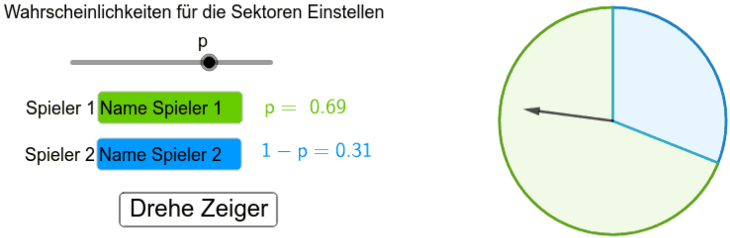
- Das Spiel ist fair, falls

$$p_1 = (1-p_1)p_2 = (1-p_1)(1-p_2)p_3 = ... = (1-p_1)\cdots(1-p_{n-1})p_n$$

$$\Leftrightarrow p_2 = \frac{p_1}{1-p_1}, \quad p_3 = \frac{p_1}{1-2p_1}, \quad \ldots, \quad p_n = \frac{1}{1-(n-1)p_1}$$

- Mit $p_1 + \cdots + p_n = 1$ ergibt sich Gleichung n-ten Grades

Umsetzung im Unterricht



Spielt zu zweit das folgende Spiel:

Jeder Spieler wählt eine Sektor.
Ihr dreht abwechselnd den Zeiger (durch Drücken auf "Drehe Zeiger").
Es gewinnt derjenige, der zuerst seinen eigenen Sektor trifft.
Spieler 1 beginnt.
Die Wahrscheinlichkeiten für die Sektoren könnt ihr frei wählen.

Wie müssen die Wahrscheinlichkeiten gewählt werden, sodass kein Spieler im Vorteil ist?

Arbeitsblatt zum Glücksrad

Bearbeitet die Aufgaben zu zweit! Ihr dürft euch mit anderen Zweiergruppen austauschen!

1. Spielen

a) Öffnet auf www.geogebra.org die Datei „Ein faires Glücksrad mit unterschiedlich großen Sektoren?" und spielt je 2 Minuten mit p=1/2, p=1/3, p=2/3 und einem selbst gewählten Wert. Notiert euch für jedes p wer wie oft gewonnen hat (Strichliste).

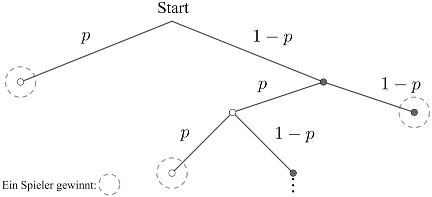
p	Spieler 1 gewinnt	Spieler 2 gewinnt
1/2		
1/3		
2/3		

b) Notiert eure Beobachtungen und Vermutungen.

c) Entscheidungsrunde: Einigt euch auf einen Wert p. Spielt das Spiel 2 Minuten. Derjenige, der häufiger gewonnen hat bekommt einen Preis.

p	Spieler 1 gewinnt	Spieler 2 gewinnt

- **Ziel:** fairen Wert p ermitteln
- **Hilfestellung:** Baumdiagramm



$p = (1-p)^2 \qquad p = 0{,}382$

$p = 1 - 2p + p^2 \quad | +2p$

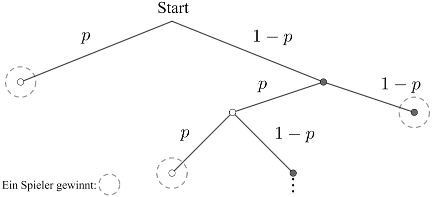
$3p = 1 + p^2 \quad | -1$

$3p - 1 = p^2$

$$\mathbb{P}(S_1) = p + (1-p)p \cdot \mathbb{P}(S_1)$$

$$\mathbb{P}(S_2) = (1-p)^2 + (1-p)p \cdot \mathbb{P}(S_2)$$

- **Ziel:** fairen Wert p ermitteln
- **Hilfestellung:** Baumdiagramm

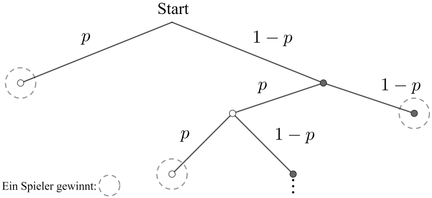


- Je nach Lerngruppe sind verschiedene Lösungswege zu erwarten

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_1) &= p + (1-p)p^2 + (1-p)p(1-p)p^2 + \ldots \\ &= p[1 + (1-p)p + (1-p)^2p^2 + \ldots]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_2) &= (1-p)^2 + (1-p)p(1-p)^2 + (1-p)p(1-p)p(1-p)^2 + \ldots \\ &= (1-p)^2[1 + (1-p)p + (1-p)^2p^2 + \ldots]\end{aligned}$$

- **Ziel:** fairen Wert p ermitteln
- **Hilfestellung:** Baumdiagramm



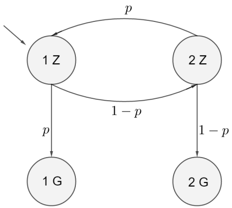
- Je nach Lerngruppe sind verschiedene Lösungswege zu erwarten

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_1) &= p + (1-p)p^2 + (1-p)p(1-p)p^2 + \ldots \\ &= p[1 + (1-p)p + (1-p)^2p^2 + \ldots]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_2) &= (1-p)^2 + (1-p)p(1-p)^2 + (1-p)p(1-p)p(1-p)^2 + \ldots \\ &= (1-p)^2[1 + (1-p)p + (1-p)^2p^2 + \ldots]\end{aligned}$$

Potenzial der Aufgabe

- Aufgabe ist schnell erklärt und weckt „Forscher(innen)-Geist"
- Exkurs zum „goldenen Schnitt"
- In Mathe-AG's oder Vertiefungskursen kann eine Einheit zur Konvergenz von Reihen vorausgehen
- Auch der Fall $n = 3$ kann behandelt werden
- Lösbarkeit von Gleichungen dritten oder höheren Grades kann thematisiert werden
- Bezug zur geometrischen Reihe: $X =$ „Anzahl der Runden bis einer der Spieler gewinnt". Trefferw' ist $w = p + (1-p)^2$. Dann ist $\mathbb{E}(X) = 1/\left(p + (1-p)^2\right)$
- Bezug zu Markov-Ketten möglich



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

https://www.geogebra.org/m/zz5sgwa9