Die Zeigerdarstellung in GeoGebra nutzen

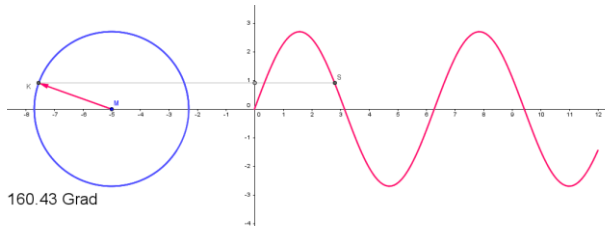
Diese Anleitung enthält die folgenden Abschnitte:

1. Einleitung

Die Zeigerdarstellung ermöglicht eine schulgerechte Darstellung von komplexen Funktionen. Sie bietet einerseits Zugänge zur Wechselstromlehre, ist aber andererseits besonders geeignet zur Beschreibung von Schwingungen, ebenen Wellen und der Psi-Funktionen in der Quantenphysik. Hierzu sagt RICHARD FEYNMAN: „Für die Beschreibung von Wellen *kann* man Zeiger benutzen, für die Arbeit in der Quantenphysik *muss* man sie heranziehen." Dies wird weiter unten, im Abschnitt „Zeiger multiplizieren", genauer ausgeführt.
Für die Beschreibung von Wellen kann man Funktionen der Art

$$\Psi(x,t) = A \cdot e^{i(\omega t - kx)} = A \cdot e^{i \cdot 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)} \text{ benutzen.}$$

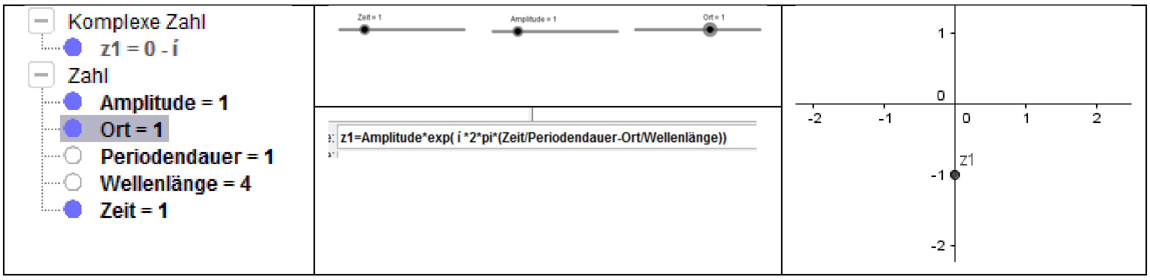
In der vorliegenden Darstellung werden solche Funktionen stets in der oben angegebenen Notierung verwendet, damit sich Zeiger mit fortschreitender Zeit gegen den Uhrzeigersinn drehen, wie es die Lernenden aus dem Mathematikunterricht von der Einführung der Sinuskurve her gewohnt sind.



(Programm Sinuskurve)

Die obige Darstellung beschreibt einen Zeiger der Länge *A*, der sich in der Zeit *T* (Periodendauer) einmal im Gegenuhrzeigersinn dreht. Bei Fortschreiten in Ausbreitungsrichtung einer Welle dreht sich der Zeiger je Wellenlänge λ einmal im Uhrzeigersinn.
In vielen Lehrbüchern der Quantenphysik (aber nicht in allen, insbesondere im nicht-deutschsprachigen Bereich!) vertauscht man die beiden Argumente im Exponenten, weil sich so zeitunabhängige Vorgänge leichter darstellen lassen. Einen inhaltlichen oder fachlichen Unterschied gibt es aber nicht. Es wird dringend von dem Vorgehen in DORN/BADER abgeraten, wo beim Übergang zur Quantenphysik unvermittelt die Drehrichtung der Zeiger geändert wird.

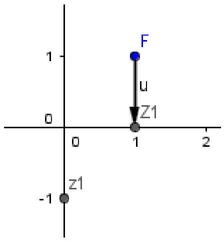
2. Zeiger in GeoGebra darstellen



Man definiert die Parameter mit Hilfe dreier Schieberegler.
Dann wird die Definition des Zeigers z1 durch Eintragen in die Befehlszeile vorgenommen.
Die komplexe Einheit wird dabei als „Alt i“ eingegeben.
z1 erscheint nun als Punkt im Koordinatensystem, bezogen auf den Ursprung.

3. Zeiger an einen Fußpunkt binden

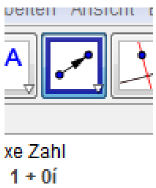
Man legt einen geeigneten Fußpunkt fest, z.B. F=(1,1) und berechnet die Zeigerspitze durch Z1=F+z1.
Es hat sich bewährt, die Zeiger selbst mit kleinen, die Zeigerspitzen mit großen Buchstaben zu bezeichnen.



Mit Klick auf ein Objekt mittels der rechten Maustaste kann man Objekte verbergen („Objekt anzeigen“) oder die Beschriftung verbergen („Beschriftung anzeigen“).

4. Zeiger als Pfeil darstellen

Von Hand: Schaltfläche betätigen, Pfeilsymbol wählen, Anfangs- und Endpunkt anklicken.



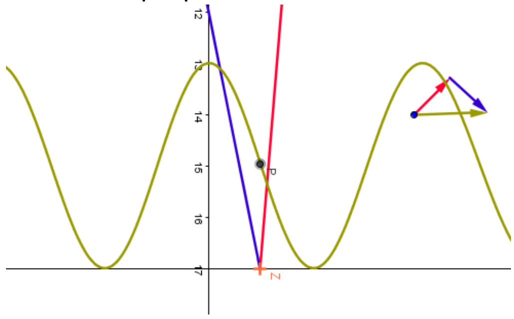
Mittels Befehlszeile: Vektor definieren v=Vektor[F,Z1]

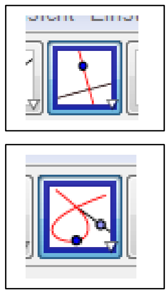
5. Zeiger addieren

Man wendet das Verfahren aus 3. sukzessive auf alle zu addierenden Zeiger an:
Z1=F+z1; Z2=Z1+z2; Z3=...
Die Summe wird dann durch einen Pfeil von F zu Zn dargestellt.
Die zugehörige Länge ist *l*=Abstand[F,Zn].

6. Betragsquadrat und Ortslinie

Zur Bestimmung von Intensitäten oder Nachweiswahrscheinlichkeiten benötigt man das Quadrat der Zeigerlänge, in meinen Programmen oft psiq genannt.
Oft ist es erwünscht, dieses Quadrat psiq über einem Ort darzustellen:

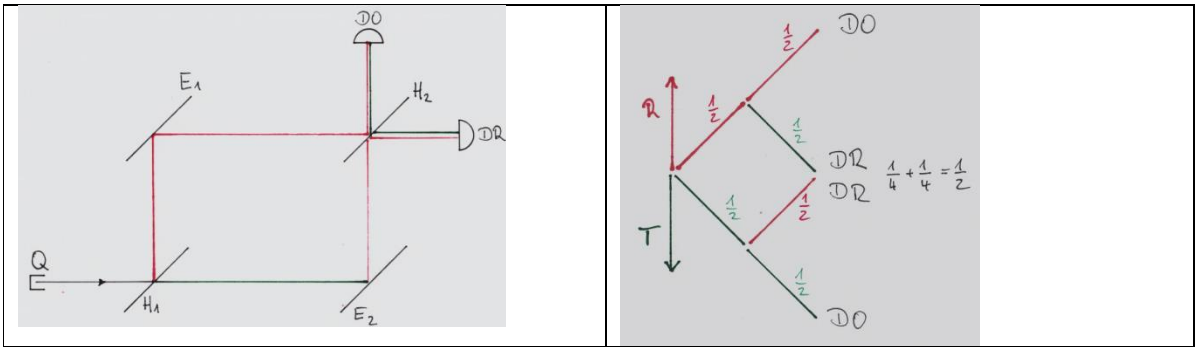




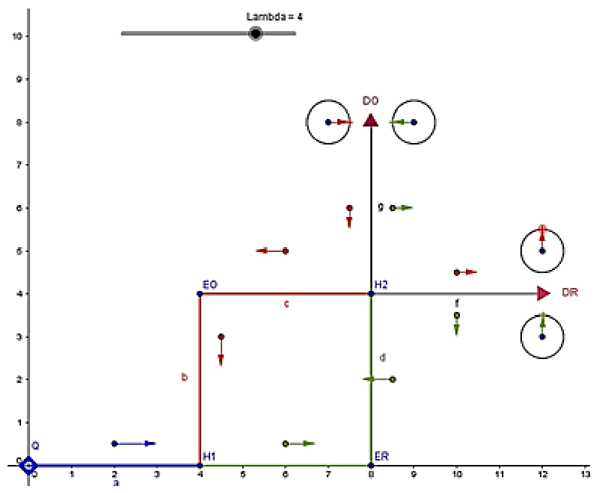
(Programm Doppelspalt)
Dazu kann man einen Punkt P definieren, der sich aus Z ableiten lässt z.B. durch P=Z+(0,psiq). Die Ortslinie erzeugt man durch die Schaltflächenfolge, die am rechten Bildrand dargestellt ist. Man klickt dann nacheinander den Punkt P an („von ihm soll eine Ortslinie gezeichnet werden“) und den Punkt Z („abhängig von diesem Punkt“).

7. Zeiger multiplizieren

Die Zeigerdarstellung eignet sich in besonderer Weise, den „Dualismus“ aufzulösen. Wenn man z.B. ein MACH-ZEHNDER-Interferometer durch einen Wahrscheinlichkeitsbaum beschreibt („klassische Teilchensicht“), findet man unter Verwendung der beiden Alternativen *Transmission* bzw. *Reflexion* den rechts gezeichneten Baum. Die Anwendung der gewohnten Pfadregeln (Multiplikation längs eines Pfades; UND-Ereignis, Addition bei mehreren Pfaden zum selben Ereignis: ODER) führt auf die Wahrscheinlichkeit 1/2 für den Nachweis eines Objektes im rechten Detektor, im Widerspruch zu den Beobachtungen, die Interferenz zeigen.

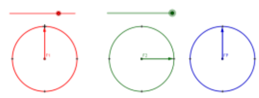


Die falsche Vorhersage löst sich auf, wenn man die Wahrscheinlichkeiten durch Wahrscheinlichkeitsamplituden ersetzt.
Man arbeitet zeitunabhängig. Die Zeigerstellungen werden für jeden Abschnitt im Interferometer zunächst einzeln bestimmt. Für jeden Abschnitt startet die Drehung in der Drei-Uhr-Position! Phasensprünge werden stets dem folgenden Abschnitt zugerechnet. Die Länge der Zeiger wird passend verkürzt, für einen 50%-Strahlteiler z.B. auf 1/√2 der vorangehenden Länge.



Längs eines Pfades muss nun multipliziert werden. Das geschieht nach der Regel „vorangehenden Zeiger um so viel weiterdrehen, wie der Nachfolger angibt".

Beispiele (stets *rot * grün = blau*): (Programm Zeigermultiplikation)

Man kann nun die Pfadmultiplikationsregel und die Pfadadditionsregel auf die so erhaltenen Wahrscheinlichkeitsamplituden (Zeiger) anwenden und erhält Ergebnisse, die mit dem schon vorher verwendeten Verfahren (Programm MachZehnder) übereinstimmen.

Mit dem neu gewonnenen Verfahren kann man nun andere UND-Ereignisse, insbesondere rund um die Verschränkung, bearbeiten und verstehen.

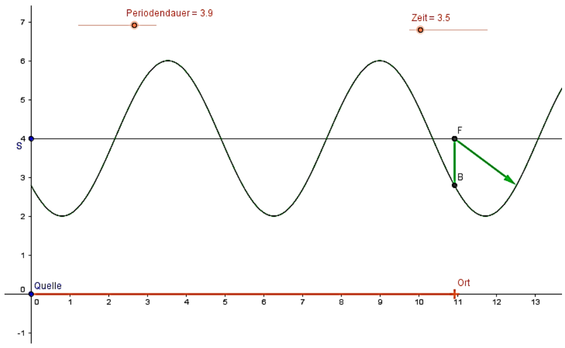
Auch das in Abschnitt 1 angegebene FEYNMAN-Zitat lässt sich nun verstehen:
Eine angemessene Beschreibung quantenphysikalischer Situationen erfordert in Raum und Zeit periodische Funktionen. Diese sollen hier zeitunabhängig mit f (x) bezeichnet werden. In Experimenten, in denen eine Verbindung Quelle – Detektor über mindestens eine Zwischenstufe verläuft (z.B. einen Spiegel: $Quelle \overset{a}{\rightarrow} Spiegel \overset{b}{\rightarrow} Detektor$, mit a und b für die beiden Distanzen), müssen diese Funktionen die Bedingung $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ erfüllen, wie man in Analogie zu den aus der Stochastik bekannten Pfadregeln fordern muss. Eine solche Eigenschaft erfüllen reelle Funktionen und insbesondere die Sinusfunktionen nicht, sie ist aber erfüllbar mit Funktionen vom Typ $\psi(x) = A \cdot e^{-ikx}$, also mit Funktionen, die in der Schule – und nicht nur dort – als Zeiger angemessen dargestellt werden.

8. Ein vollständiges Beispiel: Modellieren einer transversalen Welle

Eine Welle kann man modellieren, indem man einen Zeiger darstellt, dessen Fußpunkt entlang eines Wellenträgers verschoben wird und dessen Stellung abhängig von Zeit und Ort gemäß

$$\Psi(x,t) = A \cdot e^{i(\omega t - kx)} = A \cdot e^{i \cdot 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})}$$

beschrieben wird.
Gezeigt ist der Bildschirmausdruck einer fertig gestellten Datei.



Die Arbeitsschritte im Einzelnen – eine Modellier- Anleitung:

- Festlegen der Punkte Quelle=(0,0) und R=(20,0), Verbindungsstrecke zeichnen, beweglichen Punkt “Ort“ an diese Strecke binden (zweite Schalfläche von links, Punkt auf Objekt), Strecke dann verbergen (Rechte Maus auf Objekt, Objekt anzeigen wählen).
- Verbindungsstrecke Quelle-Ort zeichnen. (Auf Wunsch einfärben: rechte Maustaste auf das Objekt, Eigenschaften...)
- Der Abstand Quelle...Ort taucht in der Liste der Objekte am linken Bildschirmrand automatisch auf. Er möge für dieses Beispiel c heißen.
- Parallele Gerade zur x-Achse z.B. durch S=(0,4) konstruieren, Festlegen des Zeigerfußpunktes F durch (Ort,4).
- Definieren der beiden Zahlobjekte (Schieberegler) am oberen Bildrand
- Definieren der Ausbreitungsgeschwindigkeit=1
- Berechnen der Wellenlänge=Ausbreitungsgeschwindigkeit*Periodendauer
- Erzeugen des Terms (Achtung: imaginäre Einheit durch Alt i eingeben)
  z=2*exp(i*2*pi*(Zeit/Periodendauer - c/Wellenlänge)).
  Das Minuszeichen in der Klammer ergibt sich aus der Annahme einer rechtslaufenden Welle.
- Beschreiben des rotierenden Zeigers durch Addition von z zu F: Z=F+z.
  Verbinden von F und Z durch einen Vektor (dritte Schaltfläche von links).
- Konstruieren des Punktes B mit Hilfe der geometrischen Schaltflächen am oberen Bildrand:
  - Senkrechte zur Rechtsachse durch F,
  - Parallele durch Zeigerspitze zur x-Achse,
  - Schnittpunkt beider Geraden ist B,
  - beide Geraden und nicht benötigte andere Objekte verbergen (anklicken mit rechter Maus, „Objekt anzeigen“).
- Aufzeichnen der Ortslinie (vierte Schaltfläche von links) von B in Abhängigkeit von Ort: Schaltfläche anklicken, Ortslinie wählen, B anklicken, Ort anklicken.
- Nach Wunsch Animation auswählen: Schieberegler für Zeit mit rechter Maustaste anklicken, dann Animation ein wählen.

- Wenn man den Ort mit der Maus nach rechts zieht, sieht man zu einem festen Zeitpunkt die einzelnen Elongationen an verschiedenen Orten nebeneinander, also eine Momentaufnahme der Welle.
- Wenn man den Schieberegler für die Zeit von links nach rechts bewegt, sieht man am fest eingestellten Ort die einzelnen Elongationen zu verschiedenen Zeitpunkten, also eine Schwingung wie in einem ablaufenden Film.

Der Zustand einer Welle zu jedem Zeitpunkt und zu jedem Ort lässt sich damit reproduzieren.

Auf vergleichbare Weise kann man mit einiger Übung alle angegebenen Situationen selbst modellieren.