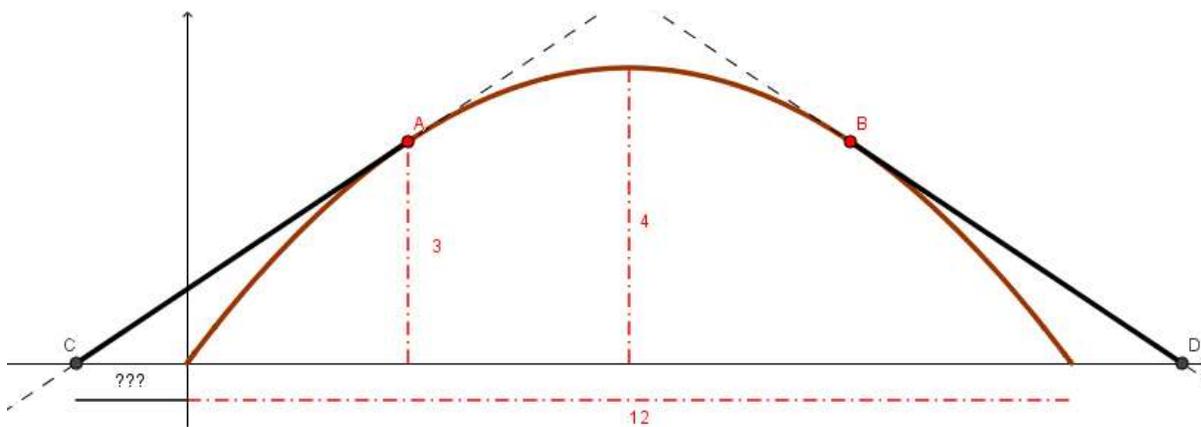


Esercizi su posizione reciproca tra parabola e retta

Trova le rette che soddisfino le seguenti condizioni. Verifica i tuoi risultati disegnando gli elementi sul piano a mano e/o con DESMOS/Geogebra.

- 1) Passano per $A\left(\frac{5}{2}, 2\right)$ e sono TANGENTI a $y = 2x^2 - 12x + 20$. Calcola le coordinate del punto di tangenza di ogni retta. [s: $y = 2$, tangente nel punto $S(3,2)$ e t: $y = -4x + 12$, tangente in $T(2,4)$]
- 2) Sono parallele a $\frac{1}{2}y - 2x + 3 = 0$ e TANGENTI a $y = x^2 + 4x + 5$. Calcola le coordinate del punto di tangenza di ogni retta. [s: $y = 4x + 5$, tangente nel punto $S(0,5)$]
- 3) Passano per $A(-3,7)$ e sono TANGENTI a $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$. Calcola le coordinate del punto di tangenza di ogni retta. [s: $y = 4x + 19$, tangente nel punto $S(-6, -5)$ e t: $y = -2x + 1$, tangente in $T(0,1)$]
- 4) Sono TANGENTI alla parabola $y = 3x^2 - 18x + 26$ e passano per il suo punto A che ha ascissa uguale a 4. Calcola le coordinate del punto di tangenza di ogni retta. [A(4,2); s: $y = 6x - 22$, tangente appunto in ... A!]
- 5) Considera la parabola $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 2$. Calcola le equazioni delle seguenti rette:
 - a) Tangenti alla parabola e passa per il punto A in cui la parabola incontra l'asse y
[A(0, -2); s: $y = 2x - 2$]
 - b) Perpendicolari alla retta $2y - x - 4 = 0$ e SECANTI la parabola
[s: $y = -2x + q$ con $q < 10$]
- 6) Considera la parabola $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$. Calcola le equazioni delle seguenti rette:
 - a) ESTERNE alla parabola e passanti per il punto $A(2,4)$
[$y = m(x - 2) + 4$ con $-1 < m < 2$]
 - b) TANGENTI alla parabola nel suo punto B con $y = -2$ ed ascissa positiva
[B(7, -2) s: $y = -2x + 12$]
- 7) Considera la parabola $y = 8x - x^2 + 20$. Calcola le equazioni delle rette SECANTI alla parabola e passanti per il punto $A(0,24)$. [$y = mx + 24$ con $m < 4 \vee m > 12$]
- 8) Costruisci un ponte di forma parabolica largo 12 metri e alto 4m nel suo punto di **massima** altezza. **DISEGNA UNO SCHIZZO DEL PONTE PER AIUTARTI NEI VARI PASSAGGI**
 - a) Calcola l'equazione del ponte ponendo uno dei suoi piedi **nell'origine degli assi**.
[$y = \frac{1}{9}(12x - x^2)$]
 - b) Vuoi aggiungere due tiranti di rinforzo al ponte, **nei suoi due punti che hanno altezza 3 metri**; saranno cavi di acciaio TANGENTI al ponte nel punto di aggancio e fissati a terra. A quale distanza dal rispettivo piede del ponte andrà piantato il tirante? Una volta risolto il problema per il primo tirante, si può dedurre la soluzione anche per il secondo? Perché?

[Punti di aggancio: $P_1(3,3)$ e $P_2(9,3)$. Equazione tirante tangente in P_1 : $y = \frac{2}{3}x + 1$, che ha $y = 0$ in $C\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$, cioè a 1,5m dal piede in $O(0,0)$. Sì, per simmetria sarà 1,5m *dopo* il secondo piede- vedi figura]



9) Il profilo di un monte è dato dall'equazione $y = -x^2 + 12x - 20$. Tu sei su un albero che si trova 2 metri PRIMA del monte, e ti trovi a 5 metri d'altezza. **DISEGNA UNO SCHIZZO PER AIUTARTI.**

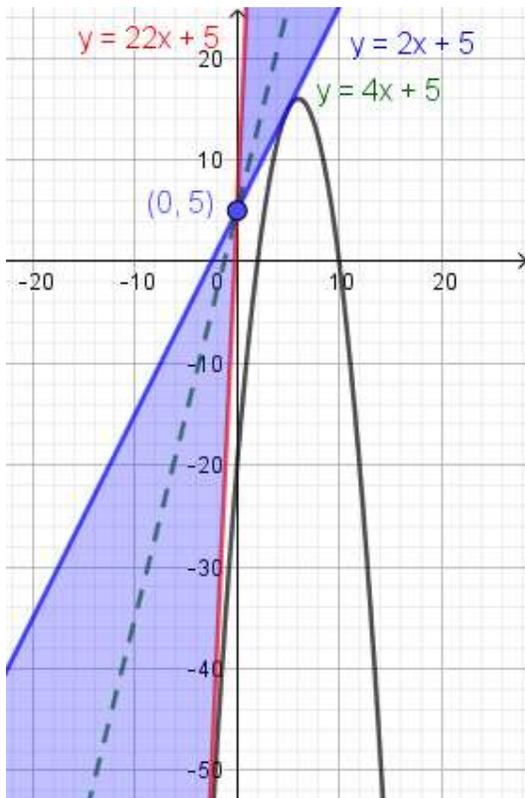
- a) Determina le coordinate cartesiane del punto in cui ti trovi [P(0,5)]
 b) Quale parte del monte è più alta di 10m?

$$[-x^2 + 12x - 20 > 10 \rightarrow 6 - \sqrt{6} < x < 6 + \sqrt{6}]$$

- c) Vuoi sparare un proiettile in modo che NON si conficchi nel monte e possa proseguire. Con quale inclinazione devi lanciarlo? (coefficiente angolare della retta)

[$2 < m < 22$; in questo problema ha senso la parte $m > 2$ (vedi figura)]

- d) Sei su una mongolfiera collocata nell'origine. Se hai un cannocchiale che può inclinarsi solo di 45° verso il basso (quindi ogni metro di avanzamento scende di un metro) a che altezza devi mettere perché il monte non ti sbarri la visuale? A che distanza è il punto a terra più vicino al monte che riesci a vedere? $[y = -x + q$ con $\Delta = 0 \rightarrow q = \frac{89}{4} = 22.25 \rightarrow y = -x + \frac{89}{4}$ Il punto cercato è quello della retta con $y = 0 \rightarrow x = \frac{89}{4} = 22.55$ dall'origine, quindi a $22,25 - 10 = 12,25$ metri dal monte]

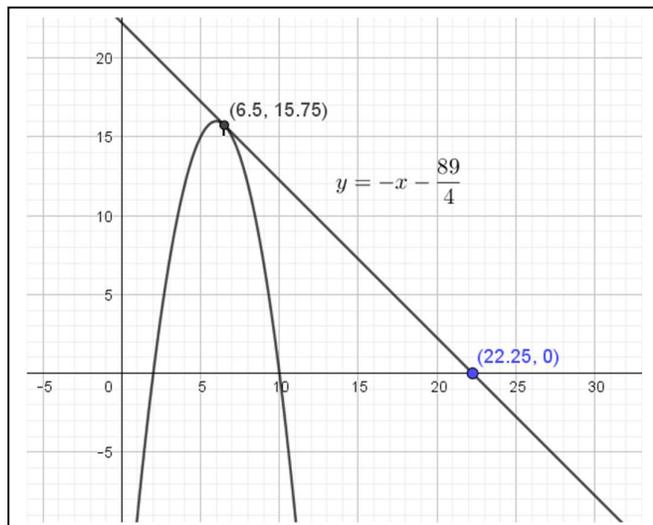


Le rette che passano per (0,5) e NON toccano la parabola-monte sono quelle con m compreso tra 2 (retta blu) e 22 (retta rossa), che sono le due tangenti, quindi $2 < m < 22$

Ad esempio la retta tratteggiata verde a $m = 4$

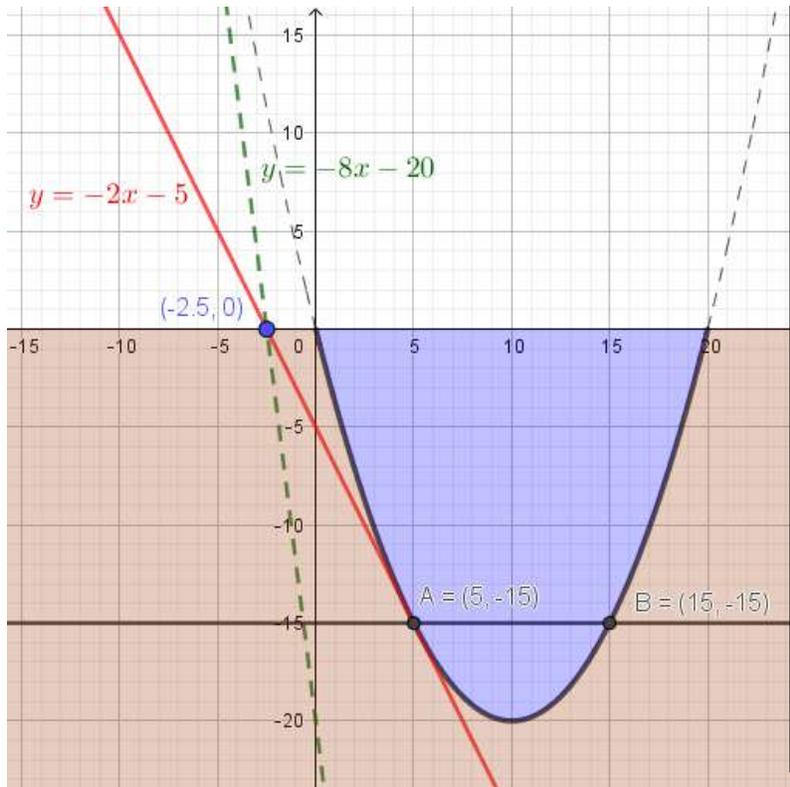
Se prendo una retta con $m > 22$ sale così rapidamente che si inclina troppo e taglia la parabola in fondo in basso. Ovviamente questo problema nel caso del monte non si pone, e quindi possiamo togliere questo vincolo: rimane $2 < m$, quindi a noi qualunque $m > 2$ va bene.

Sulla destra il disegno relativo alla domanda d.



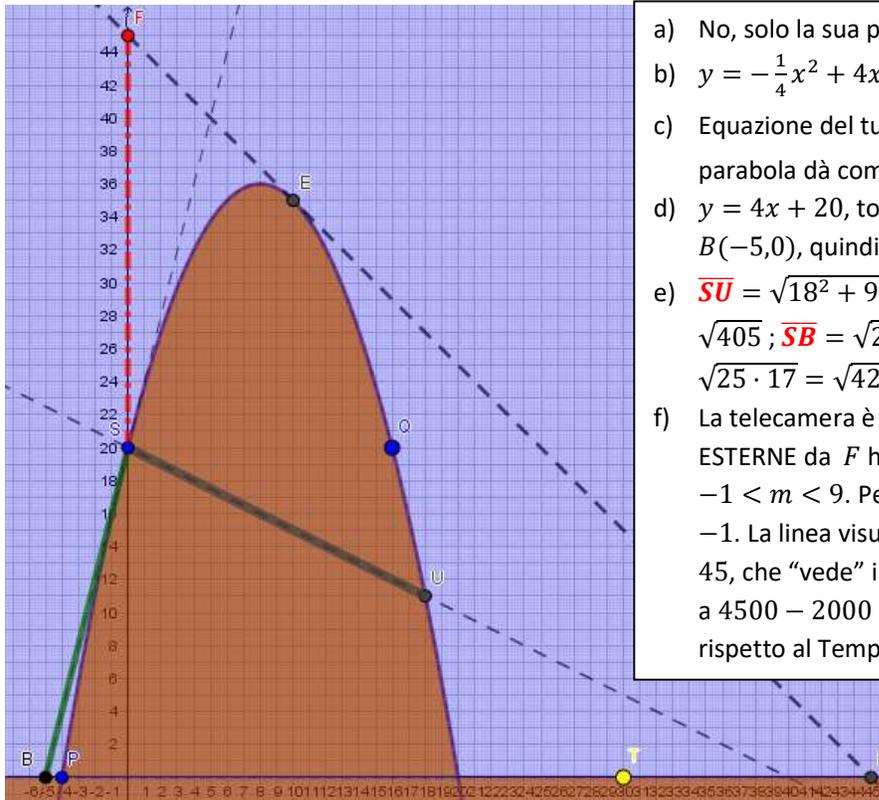
- 10) In uno stagno di profilo parabolico le due rive distano 20 metri; il punto più basso è profondo 20m. Rispondi alle domande **aiutandoti con uno schizzo**. Soluzione grafica nella prossima pagina, da guardare DOPO aver risolto l'esercizio.
- Calcola l'equazione del profilo del stagno, ponendo nell'origine una delle due rive.
 - La tua barca può muoversi senza incagliarsi sul fondo se c'è una profondità di **almeno 15m**. Determina la parte dello stagno in cui puoi navigare.
 - Sei *2,5m prima* della riva dello stagno e scavi con una sonda un tunnel rettilineo, per prelevare acqua dallo stagno. Per non danneggiare la sonda, però, devi fare in modo che essa non sbuchi nello stagno, ma lo tocchi solo **tangenzialmente**. Quanto devi inclinare la sonda? (Coefficiente angolare) A che profondità incontrerà lo stagno e preleverà l'acqua?
 - Se invece vuoi fare in modo che la sonda TAGLI lo stagno, che inclinazione le devi dare?
- 11) Una leggenda racconta che 1000 metri dopo il Monte Parabola ci sia un tempio d'oro. Stai salendo con una spedizione sul monte quando a 2000m di altezza, venite bloccati da una bufera. Vuoi scoprire l'altezza della cima del monte per capire cosa conviene fare. (**Fai uno schizzo**; per i tuoi conti usa la scala 1:100 – quindi la spedizione è a 20 unità di altezza; poni la posizione della spedizione **sull'asse delle y**. Quindi le sue coordinate sono...)
- Scoprite che l'altro punto del monte che si trova alla stessa quota è 1600m più avanti in linea d'aria. Ti è sufficiente per capire l'altezza massima del monte?
 - Ricordi che avete iniziato a scalare il monte 400 metri più indietro in senso orizzontale. Trova l'equazione del monte e le coordinate della sua cima.
 - Decidete che la cima è troppo in alto per proseguire, proponi di scavare un tunnel che scenda di un metro ogni due metri di spostamento orizzontale ed attraversare il monte. Calcola l'equazione del tunnel. In che punto sbucherà?
 - Un'altra possibilità è che per aiutarvi costruiscano un enorme scivolo rettilineo "appoggiato" al monte nel punto in cui vi trovate per far giungere a terra il delicato materiale che avete con voi. Lo scivolo deve solo *toccare* il monte. Calcola la sua equazione e la posizione in cui raggiunge terra.
 - Sarebbe più lungo il tunnel o lo scivolo?
 - Prima di tornare indietro fate salire un pallone areostatico con una telecamera per 2500 metri verticalmente sopra di voi, per vedere se riuscite almeno a vedere il tempio. Di quanto deve essere inclinata la telecamera se vuole guardare verso il basso ma il suo campo visivo NON deve essere ostacolato dal monte? Dove si trova il punto sul terreno oltre al monte, e più vicino ad esso, che riuscirete ad osservare? Riuscite a scorgere il Tempio d'Oro?

SOLUZIONE ESERCIZIO 10



- a) $y = \frac{1}{5}x^2 - 4x$
- b) $5 \leq x \leq 15$, cioè nei 10 m centrali dello stagno
- c) $y = -2x - 5$, tangente in $P_1(5, -15)$, quindi a 15m di profondità. L'altra tangente, $y = -8x - 20$, "tocca" lo stagno in un punto con $y > 0$ (tratteggiata verde), cioè in cielo e quindi non ci interessa in questo problema.
- d) Dai calcoli si trova $m < -8 \vee m > -2$, ma nel problema ha senso solo $m < -2$ ed in particolare $-2 < m < 0$, perché con $m < -8$ la parabola viene tagliata nella sua parte con $y > 0$, dove lo stagno NON c'è.

SOLUZIONE ESERCIZIO 11



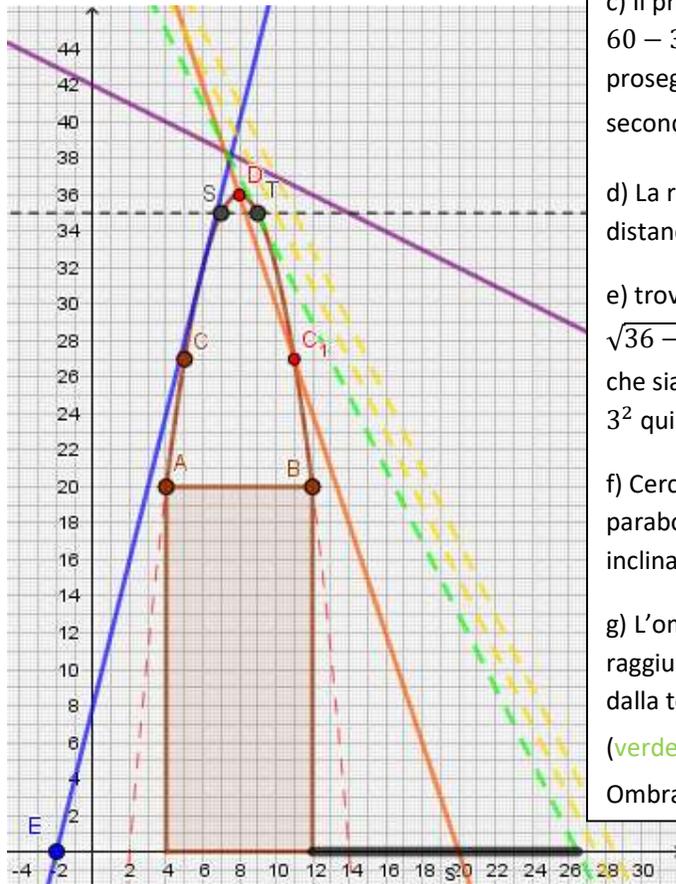
- a) No, solo la sua posizione orizzontale per simmetria
- b) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4x + 20$, il vertice è $V(8, 36)$
- c) Equazione del tunnel: $y = 20 - \frac{1}{2}x$, a sistema con la parabola dà come altro punto $U(18, 11)$
- d) $y = 4x + 20$, tocca terra dove $y = 0$, cioè in $B(-5, 0)$, quindi a 100m dalla base del monte
- e) $\overline{SU} = \sqrt{18^2 + 9^2} = \sqrt{9^2(2^2 + 1)} = \sqrt{81 \cdot 5} = \sqrt{405}$; $\overline{SB} = \sqrt{20^2 + 5^2} = \sqrt{5^2(4^2 + 1)} = \sqrt{25 \cdot 17} = \sqrt{425}$. È più lungo lo scivolo.
- f) La telecamera è in $F(0, 20 + 25 = 45)$. Le rette ESTERNE da F hanno equazione $y = mx + 45$ con $-1 < m < 9$. Per il nostro caso ci interessa $m > -1$. La linea visuale più verso il basso è $y = -x + 45$, che "vede" il terreno in $H(45, 0)$, a $4500 - 2000 = 2500$ m dal monte. Troppo avanti rispetto al Tempio.

12) In una piazza c'è una fontana. A 4 metri dalla fontana viene costruita una torre per un osservatorio astronomico, alta 20m e larga 8m. Ti affidano il progetto per completare la torre con una cupola parabolica che funge da tetto da porle in cima, con la specifica che essa 1) nel punto in cui si appoggia alla torre deve essere larga esattamente come la torre 2) a 5m dalla fontana l'altezza totale dell'edificio dovrà essere di 27m

- disegna uno schizzo ponendo la fontana nell'origine degli assi. Nel tuo disegno la torre sarà quindi un rettangolo, e la cupola deve appoggiarsi sulla sua base superiore. Calcola l'equazione della parabola (quali punti hai a disposizione per trovarla?).
- Nasce una polemica perché una legge della città dice che nessuna torre deve superare i 35m di altezza. La torre, con la tua cupola, rispetta la legge?
- Due meteoriti stanno precipitando sulla città. Uno passa sulla fontana a 60m di altezza, ed ogni volta che procede di 1 metro scende di 3. Il secondo passa sulla fontana all'altezza di 42m e scende di 2m ogni 4 metri percorsi. Calcola le loro equazioni e verifica se colpiscono la torre. In caso affermativo determina il punto in cui la colpiscono.
- Dato che uno dei meteoriti ha danneggiato la cupola, se ne approfitta per tagliarla orizzontalmente proprio a quota 35m, in modo che al posto della punta della cupola vi sia un terrazzino per le osservazioni notturne d'estate. Quanto è largo il terrazzino?
- DOMANDA SFIDA:** Se si volesse un terrazzino largo 6 metri, a che altezza si dovrebbe effettuare il taglio?
- Ti metti 2m **prima** della fontana e guardi verso l'alto per osservare il cielo. Quanto devi inclinare la testa perché la cupola non ti nasconda le stelle?
- È giorno. I raggi del sole, dato che la fonte che li genera è molto lontana, possono essere considerati **tutti paralleli** tra loro. In questo momento loro inclinazione è tale per cui ogni 3 metri percorsi orizzontalmente scendono di 6 metri. Quanto è lunga l'ombra della torre? (aiutati con il tuo disegno, disegna alcuni raggi e cerca di capire come è definita l'ombra)

13) A un metro dietro casa tua c'è una collinetta di forma parabolica, larga alla base sei metri e che ha altezza massima nove metri.

- Organizza il sistema di riferimento in modo che la tua casa FINISCA in corrispondenza dell'origine e traccia uno schizzo della situazione.
- Deduci i punti necessari per calcolare l'equazione della parabola che descrive la collinetta ed effettua il calcolo $[A(1,0), B(7,0), V(4,9) \rightarrow y = -x^2 + 8x - 7]$
- Quanto è alta la collinetta a 5 metri e mezzo da casa tua? $[6m \text{ e } 75 \text{ cm}]$
- Trova in quale zona la collina è **più alta** di 5m
 $[da \text{ una distanza di } 2m \text{ fino a } 6m \text{ da casa}]$
- Il tuo telescopio è inclinato in modo che ogni metro sale di 2 metri. A che altezza devi salire, da casa tua, per poterlo utilizzare per vedere il cielo senza che la collinetta ti copra la visuale? $[ad \text{ almeno } 2m]$
- Sempre da casa tua, dall'altezza di 11m, usi una fionda per sparare una talpa verso la collinetta con un'inclinazione di 45° verso il basso (quindi la talpa scenderà di ... ogni 1 metro). Scopri se la talpa sfiora, evita, colpisce ed inizia a scavare nella collina. Nel caso la colpisca, trova la lunghezza della galleria che scaverà, ed a che altezza sbucherà.
 $[la \text{ retta della talpa è secante e attraversa la collina da } P(3,8) \text{ a } Q(6,5).]$
 $Il \text{ tunnel scavato è quindi lungo } 3\sqrt{2}m \approx 4,24 \text{ m}]$



- a) La cupola deve passare per $A(4,20)$, $B(12,20)$ e $C(5,27)$; la sua equazione è $y = -x^2 + 16x - 28$
- b) Il vertice della parabola è $D(8,36)$, quindi viola la legge
- c) Il primo meteorite (arancio) ha traiettoria di equazione $y = 60 - 3x$ e colpisce la parabola proprio sul vertice – se proseguisse dritto la attraverserebbe uscendo in $C_1(11,27)$. Il secondo (viola) ha equazione $y = -\frac{1}{2}x + 42$ e non colpisce.
- d) La retta $y = 35$ sega la parabola nei punti S e T , che distano tra loro 2m.
- e) trovo le intersezioni con $y=h$ (h da trovare) $\rightarrow x_{1,2} = 8 \pm \sqrt{36-h} \rightarrow$ larghezza terrazzo $x_1 - x_2 = 2\sqrt{36-h}$. Voglio che sia pari a 6: $2\sqrt{36-h} = 6 \rightarrow \sqrt{36-h} = 3 \rightarrow 36-h = 3^2$ quindi $h = 36 - 9 = 27$
- f) Cercando le rette passanti da $E(-2,0)$ ESTERNE alla parabola si trova $4 < m < 36$. A noi basta sapere che bisogna inclinare la testa con $m > 4$, perché?
- g) L'ombra finisce dove i raggi solari ($y = -2x + q$) raggiungono il terreno, ovvero dove NON sono più intercettati dalla torre. Il primo di questi raggi è quello tangente alla torre (verde in figura), $y = -2x + 53$, che tocca terra in $(\frac{53}{2}, 0)$.
Ombra lunga $= 53/2 - 12 = 14,5$

14) Il profilo di un laghetto ha equazione $y = x^2 - 2x - 8$. Tutte le dimensioni sono espresse in metri.

- a) Calcola la profondità e la larghezza del lago e tracciane uno schizzo sufficientemente preciso.
[profondità: 9m; larghezza 6m]
- b) Ti collochi 2 metri PRIMA della prima riva del lago, e scavi con una trivella inclinandola in modo che scenda di 5m ogni 3m di spostamento orizzontale. Determina l'equazione della traiettoria della trivella e calcola se incontrerai il lago, lo sfiorerai o lo attraverserai
 $[y = -\frac{5}{3}x - \frac{20}{3}; \text{Interseca in } e B(\frac{4}{3}, -\frac{80}{9})]$
- c) Scoprirai che la trivella attraversa il lago: calcola la lunghezza del tratto del suo tragitto che attraversa il lago, supponendo che prosegua sempre dritto (usa la calcolatrice. Ma c'è un modo per evitare di farlo?)
 $[scrivendo i numeri come potenze e portando fuori DOPO AVER SCOMPOSTO]$
$$\left[\sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{35}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{7^2}{9} + \frac{5^2 \cdot 7^2}{9^2}} = \sqrt{\frac{7^2}{9} \left(1 + \frac{5^2}{9}\right)} = \frac{7}{3} \sqrt{\left(\frac{9+25}{9}\right)} = \frac{7}{3} \sqrt{\left(\frac{9+25}{9}\right)} = \frac{7}{9} \sqrt{34} \right]$$
- d) Per chiudere il buco devi mandare una seconda trivella che sia TANGENTE al lago nel punto in cui si è aperta la prima falla. Come devi inclinare la trivella e da dove devi partire?

$$\left[\begin{array}{l} \text{retta tangente in } A(-1, -5) \rightarrow y = -4x - 9. \text{ Scende di 4 metri ogni metro} \\ \text{di spostamento orizzontale e parte in superficie da } x = -\frac{9}{4} = -2,25, \text{ cioè 25cm} \\ \text{prima della riva del lago.} \end{array} \right]$$

15) Devi attraversare una galleria con un camion alto 5,5m. Ad un certo punto il soffitto della galleria ha una stalattite gigante che pende dal soffitto. Ti fermi e fai alcune rilevazioni, che ti permettono di definire che la forma della stalattite è data dalla parabola $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 5$ (tu sei nell'origine del sistema). **Rappresenta la situazione con un disegno.** [attenzione! Potrebbero esserci dei risultati *non interi!!!* Aiuto! Puoi usare la calcolatrice DOPO aver svolto i conti a mano, per trovare il risultato finale, **arrotondato alla seconda cifra**]

- a) Lo so, che *non l'hai fatto*, il disegno. Disegnalo davvero. **E AD OGNI DOMANDA PER PRIMA COSA AGGIUNGI NEL DISEGNO QUELLO CHE TI VIENE DETTO!!!**
- b) Quanto è alta la stalattite sopra alla tua testa?
- c) Riesci a passare con il camion nonostante stalattite?
- d) Supponendo di poter segare via la parte della protuberanza in modo da poter passare con il camion (non dovrà passare a filo, dovrai prenderti **mezzo metro** di margine), quanto è lungo il taglio che dovrai fare?
- e) Attaccati alla stalattite vi sono dei nidi di vespe velenose. Prima di segare la stalattite devi toglierli, oppure le vespe usciranno e ti pungeranno. Hai un cannone che spara un getto l'acqua ad alta pressione che usi per ripulire la superficie della stalattite dai nidi. Se inclini il getto in modo che l'acqua salga di due metri ogni metro in orizzontale e spari dalla posizione in cui ti trovi, il getto colpirà la stalattite? In che modo?
- f) Quanto devi spostare in avanti il cannone perché colpisca TANGENZIALMENTE la stalattite.
- g) Noti un grosso nido nel punto della stalattite alto 9 metri e mezzo (non quello sulla tua testa, l'altro). Come devi posizionare il cannone per colpirlo, sempre TANGENZIALMENTE?
- h) Ripeti il punto precedente nel caso il nido fosse esattamente sopra alla tua testa.

RISPOSTE:

- b) [9.5 m]
- c) [no, il punto più basso è $V(3,5)$: 3m davanti a te, alto 5m]
- d) [se il camion è alto 5,5 e mi serve mezzo metro di margine, devo tagliare ad altezza $y = 6... 2\sqrt{2}$ - circa 2,83m]
- e) [la traiettoria dell'acqua ha equazione $y = 2x$, che è SECANTE la parabola. Il primo punto in cui colpisce la parabola ha coordinata $x_1 = 5 - \sqrt{6}$ e altezza $\frac{1}{2}(5 - \sqrt{6} - 3)^2 + 5 = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{6})^2 + 5 = \frac{1}{2}(4 + 6 - 4\sqrt{6}) + 5 = 5 - 2\sqrt{6} + 5 = 10 - 2\sqrt{6} \approx 5,10$ metri. Dopo di che ovviamente l'acqua NON attraversa la roccia e quindi il secondo punto non ci interessa]
- f) [tengo la stessa inclinazione, $y = 2x + q$ è tangente (Δ del sistema = 0) se $q = -3$. Il punto a livello del suolo ($y = 0$) a cui devo posizionarmi è $\frac{3}{2} = 1,5$ m davanti a me]
- g) [Il punto della parabola con $y = 9.5$ è, a parte quello con $x = 0$, $P(6, \frac{19}{2})$. Devo trovare la retta che passa per questo punto ed è tangente alla parabola.

$y = 3x - \frac{17}{2}$. Il cannone deve essere inclinato in modo che salga 3m ogni metro; il punto in cui devo posizionare il cannone, COME VEDO SE FACCI IL DISEGNO, è quello della retta che ha $y=0$, cioè $x = \frac{17}{6} \approx 2,83$ m davanti a me]

- h) [stessa cosa del punto precedente, ma il punto per cui deve passare la retta è $Q\left(0, \frac{19}{2}\right)$. La retta tangente è $y = -3x + \frac{19}{2}$, cioè devo posizionare il cannone in modo che salga di tre metri ogni metro *all'indietro* (o *scenda* di 3 ogni metro in avanti, anche questo si vede DAL DISEGNOOOOOO), a $x = \frac{19}{6} \approx 3,17$ metri davanti a me]

16) Stai progettando un seggiolino. La sagoma della seduta è data dalla funzione

$$y = \frac{1}{16}(x - 4)^2 + 3 \quad \{-5 < x < 13\}$$

- Determina le caratteristiche principali della sua forma e traccia uno schizzo
- Come gambe decidi di aggiungere due bastoni che siano tangenti alla seduta nei suoi punti alti 7. Vuoi capire se le due gambe così fatte si incrociano prima di toccare terra (ed è quindi possibile fissarle insieme con una vite e rafforzare la sedia). Per farlo puoi
 - Trovare l'equazione di UNA di esse, DISEGNARLA e poi, anche aiutandoti con considerazioni di simmetria, dire se si incroceranno sopra il suolo o no
 - OPPURE Trovare l'equazione di entrambe e verificare dove si incrociano
- Stabilisci che la scelta al punto precedente non è sufficientemente stabile, e decidi di prendere delle gambe meno inclinate (salgono di 5 cm per ogni 10 cm di spostamento orizzontale). Determina l'equazione di almeno una di esse in modo che sia tangente alla seduta
- Come schienale decidi di usare due corde agganciate a due punti della seduta. La prima appartiene alla retta con equazione $4y - x - 16 = 0$. Quanto è lungo il tratto di corda che ti serve per unire i due punti?