

從碰撞出來的圓周率啟發----

一維對心碰撞動量守恆相空間圖分析與應用

黃健信 王恆
(澳門坊眾學校)

摘要 本文對一維對心碰撞問題提出一種新的表達方法----動量守恆相空間圖，並對動量守恆相空間圖進行詳細分析，以及應用舉例；利用動量守恆相空間圖，把碰撞過程中抽象的代數公式，轉變為平面上直觀的幾何關係；更有利於討論抽象的能量變化或多次碰撞等問題。

關鍵詞 碰撞；動量守恆；相空間圖；質心動能；恢復系數

Inspired by the pi from the colliding blocks— Analysis and Application of the Phase Space Diagram of the Conservation of Momentum in One-Dimensional Central Collision

Kin Son Wong and Hang Wong

(Escola dos Moradores de Macau , Macau)

Abstract In this article , we proposes a new expression method for the one-dimensional central collision problem--the momentum conservation phase space diagram. We conducts a detailed analysis of the momentum conservation phase space diagram , as well as application examples. Using the momentum conservation phase space diagram , the abstract algebraic formulas for the collision process are transformed into visible geometric relations on the plane. It is advantages to discussing the abstract transform of energy or multiple objects collisions.

Key words collision ; conservation of momentum ; phase space diagram ; kinetic energy of the center of mass ; coefficient of restitution

1 引言

筆者初次看見“碰撞出來的圓周率”^[1]這個問題時，都會驚嘆於大自然與數學之間的奇妙關係。對於上述問題，現已有許多討論與解法^[2]，筆者覺得最有啟發性的是“相空間圖法”^[3]，“相空間圖法”不但令上述問題變得簡單直觀，適合在中學教學中引入，而且對於分析系統動量守恆中的能量變化時，相空間圖能夠使碰撞過程中抽象的能量變化，更具體直觀地表示出來。筆者曾撰文介紹動量守恆問題中相空間圖的初步構想^[4]，本文則從更深入的角度對動量守恆的相空間圖進行分析，並將其應用於求解實際的碰撞題目中。

2 何為動量守恆相空間圖

在經典力學理論中，相空間（phase space）是一個表示系統所有可能狀態（位置，速度或動量）的空間，系統每個可能的狀態在相空間中都有一相對應的點。本文討論的一維對心碰撞動量守恆相空間和 Grant Sanderson 提出^[3]的類似，

都只包括了系統中的速度和質量有關的物理量（即不包括位置變量）。從接下來的討論中可知，這種簡化了的相空間對分析動量守恆問題十分有用。

設兩物體 A 和 B 在光滑水平面上發生對心的完全彈性碰撞，則碰撞系統總動量守恆且總動能守恆，即有

$$m_A v_A + m_B v_B = \text{constant} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \text{constant} \quad (2)$$

若以 $x = v_A$ 和 $y = v_B$ 作為變量構建直角坐標，由於(1)式表示動量守恆（系統初動量 p 等於系統末動量 p' ）為一直線方程，(2)式表示動能守恆（系統初動能 E_k 等於系統末動能 E'_k ）為一橢圓方程^[5]，於是得出的相空間圖如圖 1 所示。對於完全彈性碰撞，系統的總動量和總動能同時守恆，所以方程(1)和(2)的交點 S 和 S' 分別表示碰撞前後系統在相空間的狀態。

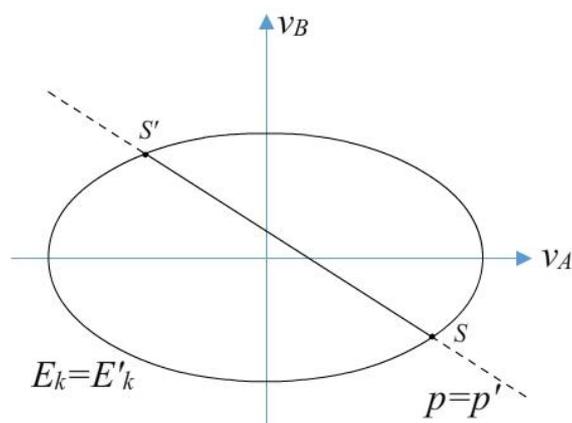


圖 1

若以兩物體的質量比 $k = \frac{m_B}{m_A}$ 代入(1)式和(2)式，得出

$$v_A + k v_B = \text{constant} \quad (3)$$

$$v_A^2 + k v_B^2 = \text{constant} \quad (4)$$

現以 $x = v_A$ 和 $y = \sqrt{k} v_B$ 作為變量再次構建直角坐標，即對圖 1 作縮放變形，把縱軸放大 \sqrt{k} 倍（設 $k > 1$ ）。整理(3)式和(4)式後得

$$(\sqrt{k} v_B) = -\frac{1}{\sqrt{k}} v_A + \text{constant} \quad (5)$$

$$v_A^2 + (\sqrt{k} v_B)^2 = \text{constant} \quad (6)$$

另外，在相空間圖中引入參考線 $v_A = v_B$ ，作縮放變形後得

$$(\sqrt{k} v_B) = \sqrt{k} v_A \quad (7)$$

在縮放變形後，(2)式的總動能守恆橢圓方程變為(6)式的圓方程，(5)式總動量守恆和(7)式為直線方程，且兩直線斜率為負倒數關係，即它們必定互相垂直（這是變形後動量守恆相空間圖的關鍵性質）。使用(5)、(6)和(7)式，便得到本文要討論的一維對心碰撞動量守恆相空間圖（圖 2），以下簡稱相圖（phase

diagram)，即碰撞系統的 $\sqrt{k}v_B - v_A$ 圖。

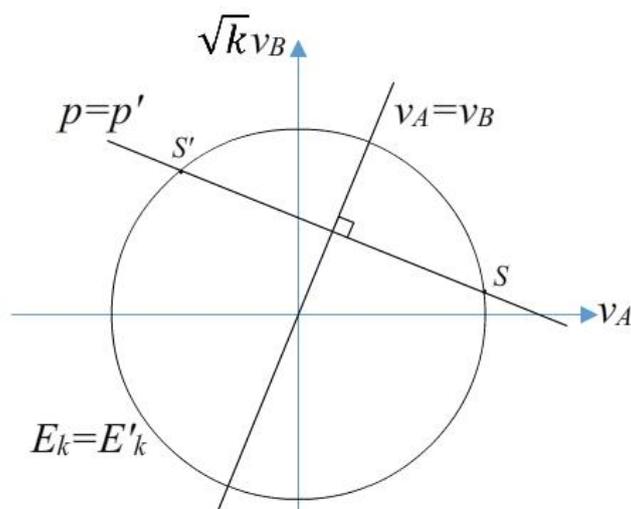


圖 2

3 動量守恆相圖性質

- 1) 動量守恆直線($p = p'$)斜率必小於 0：兩球質量之比 $k = \frac{m_B}{m_A} > 0$ ，由(5)式得

動量守恆相空間圖直線斜率為 $-\frac{1}{\sqrt{k}} < 0$ ；

- 2) 動量守恆直線必與 $v_A = v_B$ 直線互相垂直：在動量守恆相圖中，直線 $y =$

$\sqrt{k}x$ 表示 $v_A = v_B$ ，而動量守恆直線 $y = -\frac{1}{\sqrt{k}}x + C$ ，兩直線斜率為負倒數關係，故兩直線必互相垂直；

- 3) 動能守恆圓半徑 v_0 ：若球 A 和球 B 的初速度分別為 v_{A0} 和 v_{B0} ，由(6)式得表

示動能守恆的圓半徑 $v_0 = \sqrt{v_{A0}^2 + (\sqrt{k}v_{B0})^2}$ ；

- 4) 動量守恆直線族：若兩球質量比 k 不變，且系統的初動能 E_{k0} 不變（即表示動能守恆的圓半徑不變），由(5)式可得一系列互相平行的直線族，各直線表示系統在碰撞前的不同運動狀態（相空間）。如圖 3 所示，若系統碰撞前為狀態 S ，可定義角 β 為初始相空間角（初相角）；

- 5) 鏡射對稱：在完全彈性碰撞時，碰撞系統的始末狀態以直線 $v_A = v_B$ 為對稱軸作鏡射變換，如圖 3 中點 S 和 S' 。若已知系統初始狀態 $S(v_{A0}, \sqrt{k}v_{B0})$ ，由鏡射變換矩陣式

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

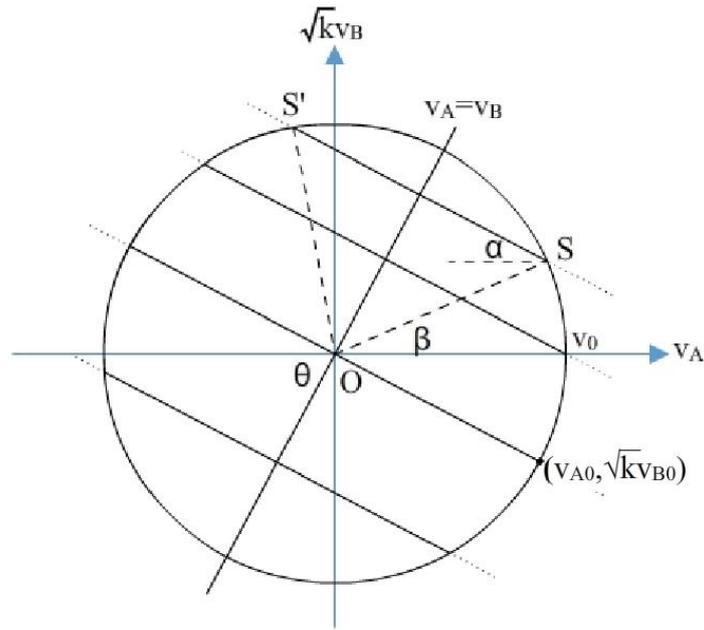


圖 3

即

$$\begin{bmatrix} v'_A \\ \sqrt{k}v'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{A0} \\ \sqrt{k}v_{B0} \end{bmatrix}$$

其中，由(7)式得

$$\tan \theta = \sqrt{k}, \text{ 故 } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{k+1}}, \sin \theta = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}, \cos 2\theta = \frac{1-k}{k+1}, \sin 2\theta = \frac{2\sqrt{k}}{k+1}$$

代入上式得完全彈性碰撞末速公式

$$\begin{cases} v'_A = \frac{v_{A0}(1-k) + 2kv_{B0}}{k+1} \\ v'_B = \frac{2v_{A0} - v_{B0}(1-k)}{k+1} \end{cases}$$

4 動量守恆相圖分析

現在舉一簡單例子說明如何用相空間圖分析動量守恆問題。設球 A 與靜止的球 B ($v_{B0} = 0$) 在光滑水平面對心碰撞，兩球質量之比 $k = \frac{m_B}{m_A} > 1$ ，這情況

下的相空間圖應如圖 4 所示。要注意代表動量守恆的(5)式的斜率為 $-\frac{1}{\sqrt{k}} < 0$ ，而

根據(6)和(7)式的斜率，應有 $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{k}}$ ， $\tan \theta = \sqrt{k}$ 。

4.1 碰撞後系統狀態範圍

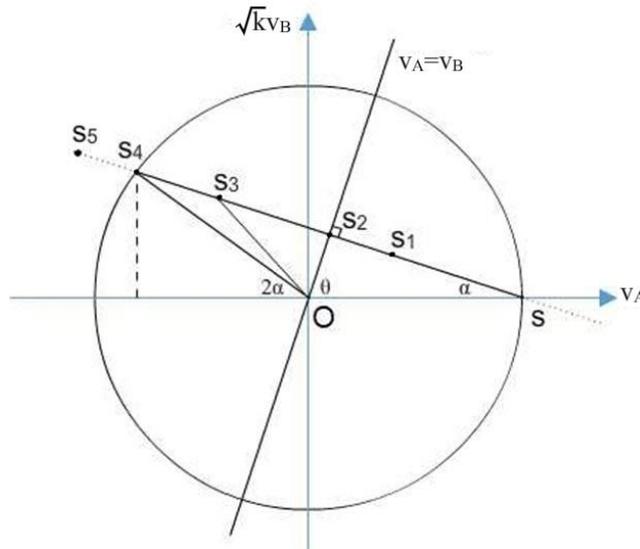


圖 4

雖然(5)式直線方程上的所有點（運動狀態或相空間）都滿足系統動量守恆，但在碰撞過程中，除非有其它形式的能量轉化為動能（如爆炸），否則系統總動能不會增加，故兩球碰撞後狀態範圍只能在圓（動能守恆）內，即在弦 SS_4 上。

4.2 末狀態（點）的位置----不同的碰撞類型

在動量守恆相圖中，每一點坐標（相空間）代表著系統一種運動狀態—速度，故相圖中的每一條線段的長度都可對應表示某種動能的平方根 $\sqrt{E_k}$ 。如圖 4 所示，若系統在碰撞前狀態為 S ，碰撞後狀態為 S_f ，在碰撞過程中，系統狀態從 S 開始，必定沿著動量守恆線段 SS_4 演化，可能會經過狀態 S_1 ，狀態 S_2 ，狀態 S_3 ，最後可能到達狀態 S_4 ，而最終的末狀態點 S_f 的位置反映著不同類型的碰撞。

- 1) 完全彈性碰撞：碰撞前後動能不變， $E_k = E_k'$ ，碰撞後狀態必在圓上，即碰撞後的狀態必為 S_4 ；
- 2) 完全非彈性碰撞：碰撞後粘在一起運動，即 $v_A = v_B$ ，故碰撞後的狀態必為 S_2 ；
- 3) 其它非彈性碰撞：一般情況下，球 A 不能穿透球 B，即碰撞後不可能 $v_A > v_B$ ，故碰撞後的狀態不可能在 $v_A = v_B$ 直線的右側 SS_2 上，只可能在 S_2S_4 上，如狀態 S_3 。若球 A 穿透球 B（如子彈 A 射穿木塊 B），即碰撞後 $v_A > v_B$ ，故碰撞後狀態必在 SS_2 上，如狀態 S_1 。

4.3 相圖中的線段----碰撞過程的動能或動能變化

由柯尼希定理（König's theorem）可知，碰撞系統的總動能 E_k 可視為由系統質心動能 E_{kc} 與系統內動能 E_{kin} 組成（ $E_k = E_{kc} + E_{kin}$ ），而只有內動能可以轉化

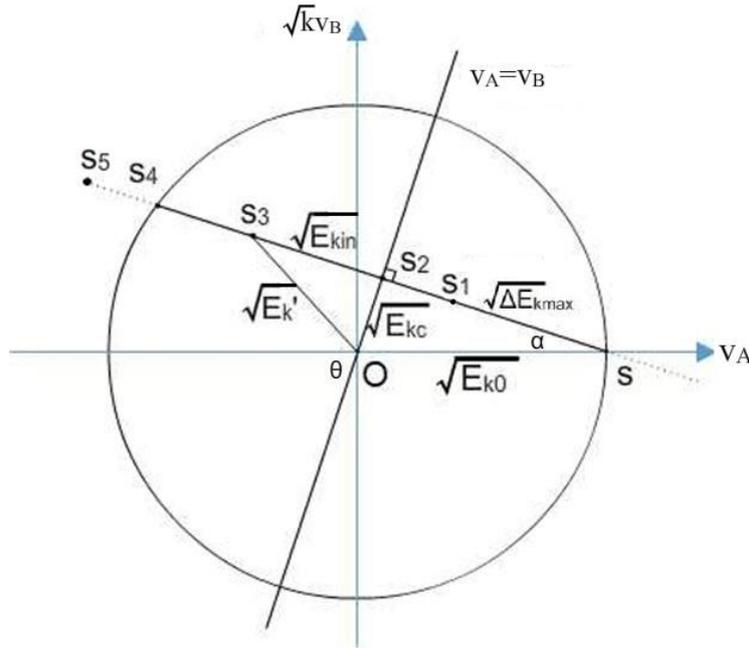


圖 5

為其它形式的能量^[6]。如圖 5 所示，在碰撞過程中，系統由初始狀態 $S \rightarrow S_1 \rightarrow S_2$ ，系統內動能 E_{kin} 減少，轉化為其它形式的能量（勢能、內能等），在狀態 S_2 時系統內動能為零，只剩餘質心動能 E_{kc} ；然後由狀態 $S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4$ ，勢能再轉化為系統內動能 E_{kin} 。

- 1) 系統初動能 E_{k0} ：由(6)式可知，圓半徑 OS 正比於系統初動能的平方根，即 $OS \propto \sqrt{E_{k0}}$ ；
- 2) 系統末動能 E'_k ：系統的末狀態 S_f （點）到原點 O 的距離，正比於系統末動能的平方根。若系統末狀態為 S_3 ，即 $OS_3 \propto \sqrt{E'_k}$ ；
- 3) 系統質心動能 E_{kc} ：因為系統在碰撞過程中不受外力作用，系統質心 CM 相對地面做勻速直線運動，質心速度 v_c 不變，質心動能 E_{kc} 不變， $E_{kc} = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_c^2$ ，質心動能不會轉化為其它形式的能量，故系統末動能最小值為質心動能^[7]。在狀態 S_2 時，原點 O 到直線 SS_4 的距離 OS_2 最小，故 OS_2 正比於系統質心動能的平方根，即 $OS_2 \propto \sqrt{E_{kc}}$ 。若 $v_{B0} = 0$ ，則 $E_{kc} = E_{k0} \cdot \cos^2 \theta = \frac{E_{k0}}{k+1}$ ；
- 4) 系統內動能（資用能） E_{kin} ：以系統質心 MC 作為參考系，兩物體相對質心的動能^{[6][7]}， $E_{kin} = \frac{1}{2}m_A v_{Ac}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bc}^2$ ，其中 v_{Ac} 和 v_{Bc} 分別為兩物體相對於質心的速度。因為系統總動能等於系統質心動能與系統內動能之和，如圖 5 所示，若系統末狀態為 S_3 ，根據畢氏定理，各種動能與線段對應關係 $E_k = E_{kc} + E_{kin} \propto OS_3^2 = OS_2^2 + S_2S_3^2$ ，故 S_2S_3 正比於系統內

動能的平方根，即 $S_2 S_3 \propto \sqrt{E_{kin}}$ ；

- 5) 最大損失動能 ΔE_{kmax} ：在完全非彈性碰撞後，或在碰撞過程中，當兩碰撞物體的速度等於系統質心速度時（即 $v_A = v_B = v_c$ ），動能損失最大^[7]。如圖 5 所示，在狀態 S_2 時系統末動能最少，動能損失最大，故 SS_2 正比於系統最大損失動能的平方根，即 $SS_2 \propto \sqrt{\Delta E_{kmax}}$ 。若 $v_{B0} = 0$ ，則

$$\Delta E_{kmax} = E_{k0} \cdot \sin^2 \theta = E_{k0} \cdot \frac{k}{k+1} ;$$

- 6) 損失動能 ΔE_k ：在碰撞過程中，系統質心動能 E_{kc} 不變，只有系統內動能 E_{kin} 會轉變為其它形式的能量（如彈性勢能、內能等）^[5]，所以損失動能等於最大損失動能減去碰撞後的內動能；若系統末狀態為 S_3 ，則 $\Delta E_k = \Delta E_{kmax} - E_{kin} \propto S_2 S_4^2 - S_2 S_3^2 = SS_3 \cdot S_3 S_4$ 。

所以，在相圖中的每條線段，都與碰撞過程中的動能或動能變化相對應。

4.4 相圖中有向線段的比值---能量和速度恢復系數 e （coefficient of restitution）

恢復系數的速度定義是指碰撞後兩物體相對分離速度（ $v'_{AB} = v'_A - v'_B$ ）和碰撞前兩物體相對接近速度（ $v_{BA} = v_B - v_A$ ）的比值，即 $e = \frac{v'_{AB}}{v_{BA}}$ 。

恢復系數的物理意義--在兩球對心碰撞中，碰撞一般可以分為兩個階段；第一階段是從兩球開始接觸的瞬間至兩球具有相同的速度（質心速度 v_c ），這一階段兩球相互擠壓，形變不斷加大直到最大，稱為壓縮階段；第二階段是從兩球最大形變開始至兩球剛剛分離，這一階段兩球形變逐漸恢復，形變不斷減小直至兩球完全分開，稱為恢復階段。從能量的角度來看，在壓縮階段中兩小球形變越來越大，其動能逐步轉化為形變勢能，表現為系統的內動能（ E_{kin} ）損失，在壓縮最大狀態時，系統動能損失最大（ ΔE_{kmax} ），而在恢復階段，兩小球形變逐漸減小，形變勢能逐步轉變為系統的內動能（ E_{kin} ）。系統碰撞的恢復系數以能量變化表示為，恢復系數平方等於恢復階段與壓縮階段動能變化之比^[8]，而壓縮階段動能變化最大，恢復階段動能變化為內動能，即 $e =$

$$\pm \sqrt{\frac{E_{kin}}{\Delta E_{kmax}}}$$

，如圖 5 所示， $SS_2 \propto \sqrt{\Delta E_{kmax}}$ ， $S_2 S_f \propto \sqrt{E_{kin}}$ ， S_f 為系統末狀態。

因恢復系數可能為負值，故在相圖中討論恢復系數時，各線段以有向線段形式表示。

- 1) 若末狀態為 S_4 ，壓縮階段為 $\overline{SS_2}$ ，恢復階段為 $\overline{S_2 S_4}$ ，恢復系數 $e = \frac{S_2 S_4}{SS_2} =$

$$\frac{v'_{AB}}{v_{BA}} = 1$$

，分離速度等於接近速度， $v'_{AB} = v_{BA}$ ，為完全彈性碰撞；

- 2) 若末狀態為 S_2 ，壓縮階段為 $\overline{SS_2}$ ，恢復階段為 $\overline{S_2 S_2} = 0$ ，恢復系數 $e =$

$$\frac{\overline{S_2 S_2}}{SS_2} = \frac{v'_{AB}}{v_{BA}} = 0$$

， $v'_{AB} = 0$ ，為完全非彈性碰撞；

3) 若末狀態為 S_3 ，壓縮階段為 $\overline{SS_2}$ ，恢復階段為 $\overline{S_2S_3}$ ，恢復系數 $e = \frac{\overline{S_2S_3}}{\overline{SS_2}} =$

$\frac{v'_{AB}}{v_{BA}}$ ， $0 < e < 1$ ， $v'_{AB} < v_{BA}$ ，為非彈性碰撞；

4) 若末狀態為 S_1 ，雖然未壓縮到最大狀態 S_2 ，但恢復系數的平方仍以內動能與最大損失動能之比計算，恢復系數 $e = \frac{\overline{S_2S_1}}{\overline{SS_2}} = \frac{v'_{AB}}{v_{BA}}$ ， $-1 < e < 0$ ，分離速度 v'_{AB} 與接近速度 v_{BA} 方向相反，為擊穿碰撞；

5) 若末狀態為 S_5 ，位於圓外，碰撞後系統總動能增加，碰撞發生了爆炸，或有其它形式的能量轉變為動能（內動能），壓縮階段為 $\overline{SS_2}$ ，恢復階段為 $\overline{S_2S_5}$ ，恢復系數 $e = \frac{\overline{S_2S_5}}{\overline{SS_2}} = \frac{v'_{AB}}{v_{BA}} > 1$ ， $v'_{AB} > v_{BA}$ ，為放能碰撞。

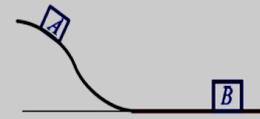
5 動量守恆相圖應用例子

1) 多次碰撞

筆者最初思考動量守恆相圖，是源於多次碰撞問題一碰撞出來的圓周率^[3]。而在此前，筆者對於一道物理競賽題糾結良久，題目為“第六屆泛珠物理力學基礎試題”第9題^[9]：

9. 一个质量为 m 的滑块 A 沿光滑斜坡由静止开始滑下，与另一个质量为 km 且静止在光滑水平面上的滑块 B 发生两次弹性的正碰撞。试问 k 值应满足甚么条件？

- A. $3 \leq k \leq 5 + 2\sqrt{2}$ B. $2 \leq k \leq 4 + 2\sqrt{2}$ C. $1 \leq k \leq 3 + 2\sqrt{2}$
 D. $1 \leq k \leq 3 + \sqrt{3}$ E. $2 \leq k \leq 4 + \sqrt{3}$ F. $3 \leq k \leq 5 + \sqrt{3}$



對於這樣典型的完全彈性碰撞題型，一般運用公式，以代數法求解便可，但問題在於筆者求不出選項的答案！而且，再深入探討，上述題目的條件是兩物體間發生兩次碰撞，若條件改為發生3次、4次或 n 次碰撞又如何求解呢？若 B 的初速度不是零又如何呢？另外，若已知質量比 k ，又如何求碰撞次數 n 呢？因這題目困擾筆者多時，引發筆者思考，到底有沒有其它比代數法更有物理意義的方法，去求解此類型的碰撞問題。

代數法：

因兩物塊碰撞是完全彈性，由動量守恆和動能守恆得

$$\begin{cases} mv_A + kmv_B = mv'_A + kmv'_B \\ \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}kmv_B^2 = \frac{1}{2}mv'^2_A + \frac{1}{2}kmv'^2_B \end{cases}$$

解得完全彈性碰撞末速度公式為

$$\begin{cases} v'_A = \frac{1-k}{k+1}v_A + \frac{2k}{k+1}v_B \\ v'_B = \frac{2}{k+1}v_A + \frac{k-1}{k+1}v_B \end{cases}$$

設兩物塊碰撞次數為 n ，在第一次碰撞 $n=1$ 時，以 $v_A = v_0$ ， $v_B = 0$ 代入末速度公式得

$$\begin{cases} v'_{A1} = \frac{1-k}{k+1}v_0 \\ v'_{B1} = \frac{2}{k+1}v_0 \end{cases}$$

因題目條件是兩物塊有第二次碰撞，故 v'_{A1} 與 v'_{B1} 必需方向相反，即 $k > 1$ 。物塊 A 向左滑上斜坡後，再等速反向滑向物塊 B，且必需 $-v'_{A1} > v'_{B1}$ ，物塊 A 才能追上物塊 B，解得 $k > 3$ （若 $k = 3$ ，則 v'_{A1} 與 v'_{B1} 等速反向，A 追不上 B，便沒有第二次碰撞了）。

在第二次碰撞 $n=2$ 時，以 $v_A = -v'_{A1}$ ， $v_B = v'_{B1}$ ，遞歸代入末速度公式得

$$\begin{cases} v'_{A2} = -\frac{(1-k)^2}{(k+1)^2}v_0 + \frac{4k}{(k+1)^2}v_0 = -\frac{k^2-6k+1}{(k+1)^2}v_0 \\ v'_{B2} = -\frac{2(1-k)}{(k+1)^2}v_0 + \frac{2(k-1)}{(k+1)^2}v_0 = \frac{4(k-1)}{(k+1)^2}v_0 \end{cases}$$

因第二次碰撞後不會有第三次碰撞，物塊 A 在斜坡滑下後不能追上物塊 B，故 $v'_{B2} \geq -v'_{A2}$ ，解得 $5 - 2\sqrt{5} \leq k \leq 5 + 2\sqrt{5}$ ；與 $k > 3$ 取交集後，得碰撞次數 $n=2$ 時， $3 < k \leq 5 + 2\sqrt{5}$ 。顯然，題目提供的選項沒有一個對。

若繼續探究碰撞次數 n 增加時的情況，看看能不能找到一些規律。

當碰撞次數 $n=3$ 時，則以 $v_A = -v'_{A2}$ ， $v_B = v'_{B2}$ ，遞歸代入末速度公式得

$$\begin{cases} v'_{A3} = -\frac{(k-1)(k^2-14k+1)}{(k+1)^3}v_0 \\ v'_{B3} = \frac{2(3k-1)(k-3)}{(k+1)^3}v_0 \end{cases}$$

第三次碰撞後不會有第四次碰撞，故 $v'_{B3} \geq -v'_{A3}$ ，解得：

$$\begin{aligned} 2(3k-1)(k-3) &\geq (k-1)(k^2-14k+1) \\ k^3 - 21k^2 + 35k - 7 &\leq 0 \end{aligned}$$

要解上述一元三次不等式已十分困難，筆者到此已經放棄計算了。況且，可以預見，當 $n=4$ 或 $n=5$ 時，便要求解四次、五次不等式，筆者沒法從代數法中得到任何規律或結論，直到思考相圖法的應用。

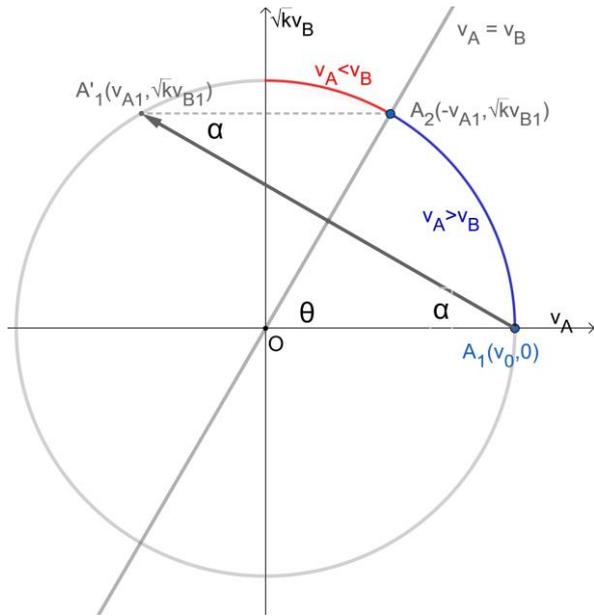


圖 6

相圖法：

設向右為正方向，以 $v_A = v_0$ ， $v_B = 0$ 代入(5)式和(6)式，作出動量守恆相

圖，如圖 6 所示。 $\overline{A_1 A'_1}$ 為(5)式動量守恆直線在圓內的有向線段， A_1 、 A'_1 分

別為第一次碰撞前和碰撞後狀態，因碰撞為完全彈性碰撞，故碰撞後 A'_1 在(6)式表示動能守恆的圓上。若質量比 $k > 1$ ，碰撞後 A'_1 必定在第二象限，即碰撞後速度 $v_{A1} < 0$ （向左）， $v_{B1} > 0$ （向右）；然後滑塊 A 向左滑上光滑斜坡，再反向等速率向右滑向滑塊 B（圖 6 中虛線 $A'_1 A_2$ 所示），到狀態 A_2 ；若 A_2 在直線 $v_A = v_B$ （第一象限）右側，表示 $v_A > v_B$ （藍色圓弧），滑塊 A 能追上滑塊 B 然後發生第二次碰撞；若 A_2 在直線 $v_A = v_B$ （第一象限）左側或

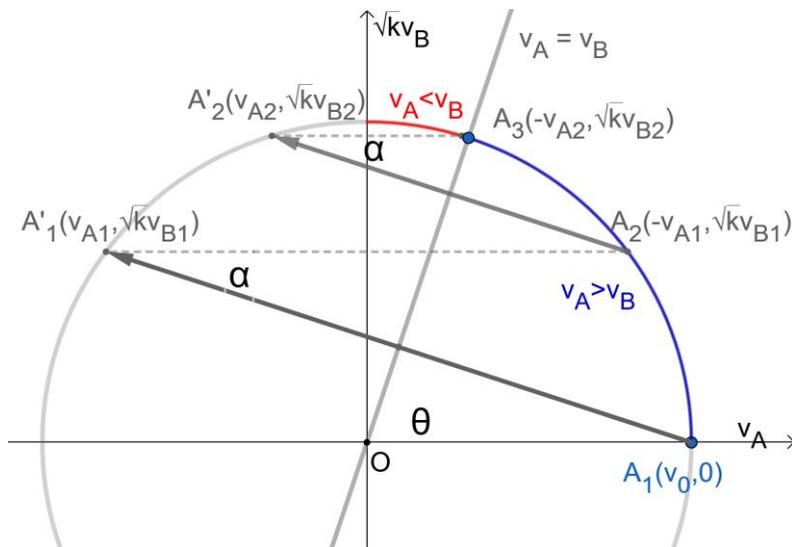


圖 7

在直線 $v_A = v_B$ 上，表示 $v_A \leq v_B$ （紅色圓弧），滑塊 A 不能追上滑塊 B，便不會有第二次碰撞。在圖 6 中， A_2 在直線 $v_A = v_B$ 上，表示第一次碰撞後 $-v_{A1} = v_{B1}$ ，僅有一次碰撞（ $n=1$ ）而未有第二次碰撞的臨界情況。圖中弧 A_1A_2 對應的圓心角為 2 倍圓周角，即 $\theta = 2\alpha$ 。

如圖 7 所示， A_2 在直線 $v_A = v_B$ （第一象限）右側藍色圓弧上，故可以發生第二次碰撞， A'_2 是第二次碰撞後狀態，滑塊 A 再滑下斜坡等速率反向追趕滑塊 B（圖 7 中虛線 A'_2A_3 所示），到 A_3 狀態，圖 7 中 A_3 在直線 $v_A = v_B$ 上，表示第二次碰撞後 $-v_{A2} = v_{B2}$ ，僅有兩次碰撞（ $n=2$ ）而未有第三次碰撞的臨界情況。圖中弧 A_1A_2 與弧 A_2A_3 對應的圓周角都等於 α ，得 $\theta = 2 \times 2\alpha$ 。

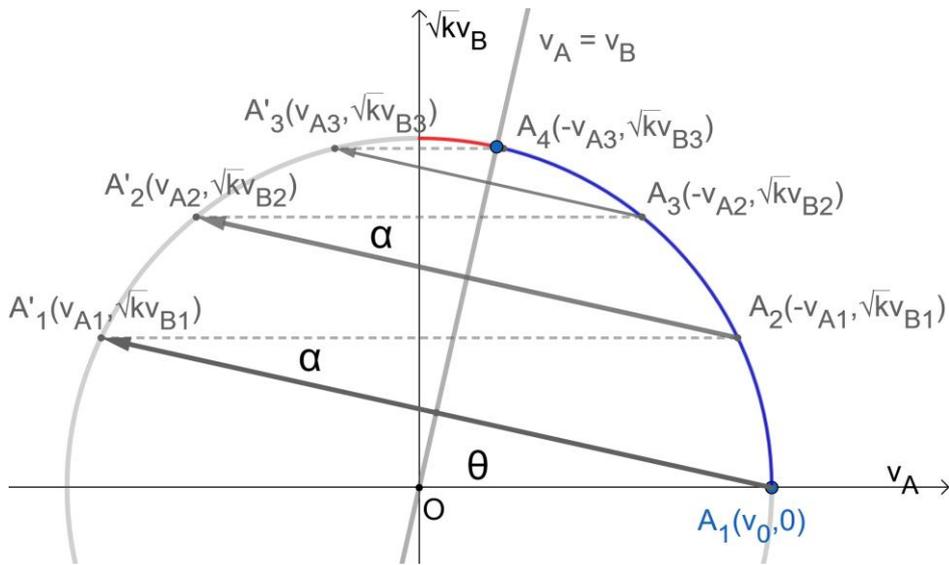


圖 8

同理，圖 8 表示只有三次碰撞（ $n=3$ ）而未有第四次碰撞的臨界情況。圖中弧 A_1A_2 、弧 A_2A_3 與弧 A_3A_4 相等，得 $\theta = 3 \times 2\alpha$ 。

從動量守恆相圖中的幾何關係可以得出，兩物塊碰撞次數 n 與角 θ 的關係

$$(n - 1) \cdot 2\alpha < \theta \leq n \cdot 2\alpha \quad (8)$$

又 $\theta = 90^\circ - \alpha$ ， $\tan \theta = \sqrt{k}$ ， $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{k}}$ ，代入(8)式解得

$$\cot^2\left(\frac{90^\circ}{2n - 1}\right) < k \leq \cot^2\left(\frac{90^\circ}{2n + 1}\right) \quad (9)$$

由(9)式得，當

兩物塊碰撞次數 n	質量比 $k = m_B/m_A$ 的範圍
$n=1$	$0 < k \leq 3$
$n=2$	$3 < k \leq 9.4721$
$n=3$	$9.4721 < k \leq 19.196$
$n=4$	$19.196 < k \leq 32.16$

可從動量守恆相圖中幾何關係，直接觀察得出兩物塊碰撞次數 n 與質量比 k 的關係。而且，整個 n 次碰撞的過程(實線有向線段)以及物塊 A 與斜坡的作用(虛線)都可在相圖中顯示出來。

(物塊 A 與光滑斜坡的作用，可視為物塊 A 與質量無窮大的物体完全彈性碰撞，在相圖中，表示動量守恆的直線斜率為零。)

以下討論質量比 k 與兩物塊碰撞次數 n 及圓周率的關係：

若已知質量比 k ，則 $\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ，求兩物塊碰撞次數 n ，可由(8)式得

$$\frac{\pi}{4\alpha} - \frac{1}{2} \leq n < \frac{\pi}{4\alpha} + \frac{1}{2} \quad (10)$$

當 $k \rightarrow \infty$ ， $\alpha \rightarrow 0$ ， $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{k}}$ 代入(10)式得

$$\frac{\pi\sqrt{k}}{4} - \frac{1}{2} \leq n < \frac{\pi\sqrt{k}}{4} + \frac{1}{2} \quad (11)$$

由(11)式得，當

質量比 k	兩物塊碰撞次數 n (取整數)
$k = 1600$	$30.91 \leq n < 31.91 \Rightarrow n = 31$
$k = 16 \times 10^{10}$	$314158.76 \leq n < 314159.76 \Rightarrow n = 314159$
$k = 16 \times 10^{2N}$	$n = 10^N \pi$

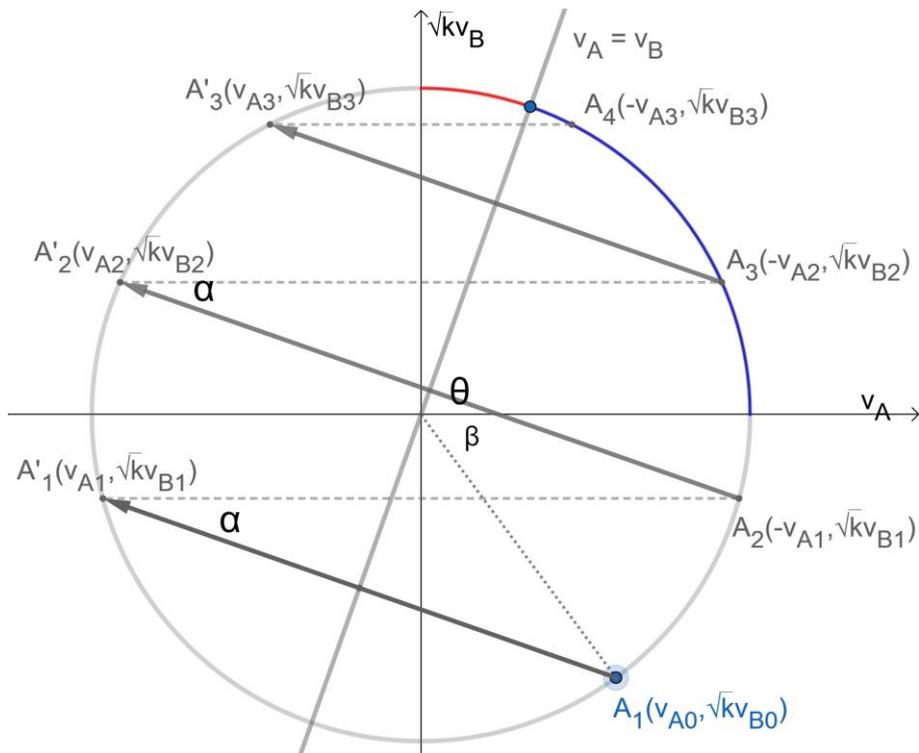


圖 9

若物塊 B 初速度不為零，如圖 9 所示，定義初相角 β ，則 $\tan \beta = \frac{\sqrt{k}v_{B0}}{v_{A0}}$ ；與

(8)式推導過程相同，從動量守恆相圖可以得出，兩物塊碰撞次數 n 與角 θ 和角 β 的關係

$$(n-1) \cdot 2\alpha < \theta - \beta \leq n \cdot 2\alpha \quad (12)$$

若已知質量比 k ，兩物塊的初速度分別為 v_{A0} 和 v_{B0} ，求兩物塊碰撞次數 n ，可由(12)式得

$$\frac{\pi - 2\beta}{4\alpha} - \frac{1}{2} \leq n < \frac{\pi - 2\beta}{4\alpha} + \frac{1}{2}$$

設 $\beta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{k}v_{B0}}{v_{A0}} = m\pi$ ，代入上式得

$$\frac{(1-2m)\pi}{4\alpha} - \frac{1}{2} \leq n < \frac{(1-2m)\pi}{4\alpha} + \frac{1}{2} \quad (13)$$

當 $k \rightarrow \infty$ ， $\alpha \rightarrow 0$ ， $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{k}}$ ，代入(13)式得

$$\frac{(1-2m)\pi\sqrt{k}}{4} - \frac{1}{2} \leq n < \frac{(1-2m)\pi\sqrt{k}}{4} + \frac{1}{2} \quad (14)$$

由(14)式得，當

質量比 k	兩物塊碰撞次數 n (取整數)
$k = \frac{1600}{(1-2m)^2}$	$30.91 \leq n < 31.91 \Rightarrow n = 31$
$k = \frac{1600}{(1-2m)^2} \times 10^{10}$	$314158.76 \leq n < 314159.76 \Rightarrow n = 314159$
$k = \frac{1600}{(1-2m)^2} \times 10^{2N}$	$n = 10^N \pi$

若物塊 A 在水平地面，初速度為零，物塊 B 初速度向左碰撞物塊 A，即初相角 $\beta = -\frac{\pi}{2}$ ，便與“碰撞出來的圓周率”^[3]問題條件一樣了。當 $k \rightarrow \infty$ ， $\alpha \rightarrow$

0 ， $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{k}}$ ，以 $m = -\frac{1}{2}$ 代入(14)式得

$$\frac{\pi\sqrt{k}}{2} - \frac{1}{2} \leq n < \frac{\pi\sqrt{k}}{2} + \frac{1}{2} \quad (15)$$

由(15)式得，當

質量比 k	兩物塊碰撞次數 n (取整數)
$k = 400$	$30.91 \leq n < 31.91 \Rightarrow n = 31$
$k = 400 \times 10^{10}$	$314158.76 \leq n < 314159.76 \Rightarrow n = 314159$
$k = 400 \times 10^{2N}$	$n = 10^N \pi$

所以，其實無論初始條件如何，只要質量比 k 為一特定的值（ $\times 10^{2N}$ ），碰撞次數 n （兩物塊碰撞）或 n' （兩物塊+物塊與牆或斜坡碰撞），都會趨向於 $n = 10^N \pi$ ，因為 π 與圓（或圓弧）相關，而圓就在動能守恆的特徵之中^[2]。

2) “超彈性碰撞” ----兩球 Galilean 炮

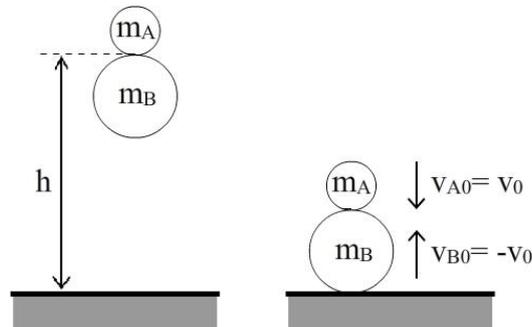


圖 10

Galilean 炮（Galilean Cannon）模型由若干個直徑遞增的彈性小球排列組成球鏈，球鏈按照先大後小的順序以速度 v_0 撞擊剛性壁，撞擊結束後最外側的小球將以數倍於 v_0 的速度反彈出去^[10]。而兩球 Galilean 炮模型由兩個質量分別為 m_A 和 m_B ，可視為質點的彈性小球排列組成，如圖 10 所示，兩球從離地面高度 h 位置自由下落，落地速率 $v_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ，地面與球 B、球 B 與球 A 發生完全彈性碰撞，現討論兩球碰撞後的速度，以及球 A 上升最大高度 H 。

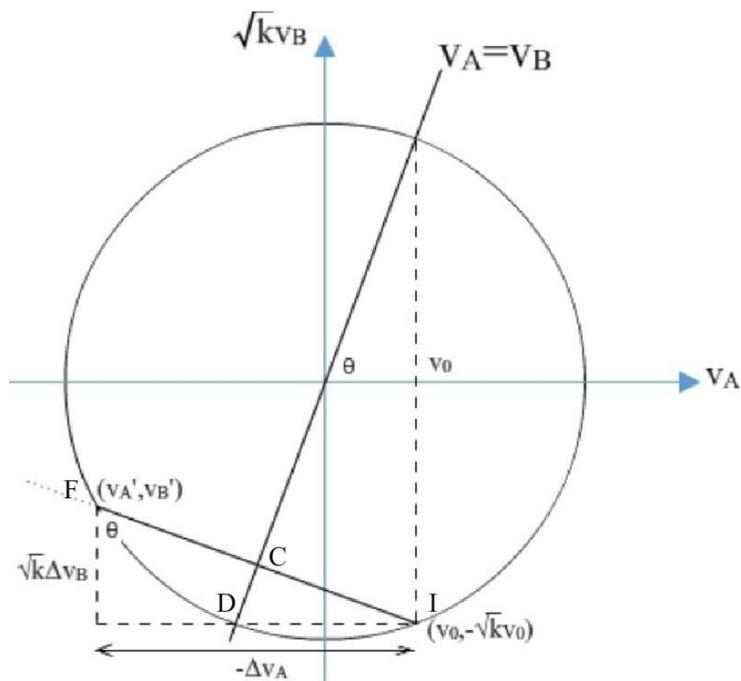


圖 11

設兩球質量比 $k = \frac{m_B}{m_A}$ ，豎直向下為正方向，球 B 與地面碰撞後等速率向上反彈，故兩球碰撞前速度分別為 $v_{A0} = v_0$ ， $v_{B0} = -v_0$ ，作出動量守恆相圖，如圖 11 所示，點 I 和點 F 分別為碰撞前和碰撞後狀態，圖中線段 $ID = 2v_0$ ，由相圖中的幾何關係可得

$$\begin{cases} -\Delta v_A = 4v_0 \cdot \sin^2 \theta \\ \sqrt{k} \cdot \Delta v_B = 4v_0 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \end{cases}$$

其中，由(7)式得 $\tan \theta = \sqrt{k}$ ，故 $\sin \theta = \sqrt{\frac{k}{k+1}}$ ， $\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{k+1}}$ ，代入上式得兩球末速度

$$\begin{cases} v'_A = \frac{-(3k-1)}{k+1}v_0 \\ v'_B = \frac{-(k-3)}{k+1}v_0 \end{cases}$$

當 $k \rightarrow \infty$ ， $m_A \ll m_B$ ， $v'_A \approx -3v_0$ ， $v'_B \approx -v_0$ ；理論上， v'_B 不會等於 $-v_0$ ，因違反了能量守恆定律。又 $h \propto v_0^2$ ，故當 $k \rightarrow \infty$ ，球 A 反彈的最大高度 $H \approx 9h$ ，球 A 上升高度為釋放高度的 9 倍。

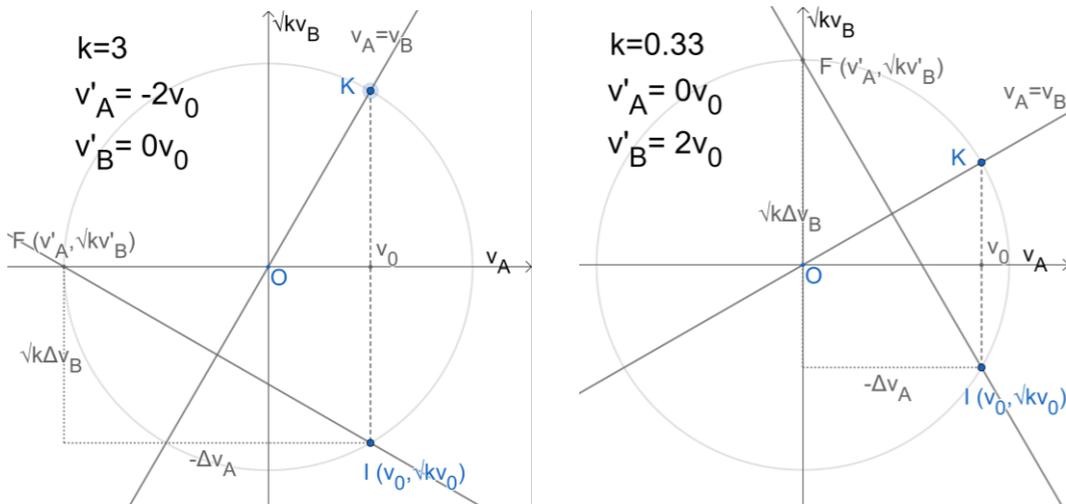


圖 12

當 $k > 3$ ，碰撞後狀態 F 在相圖第三象限，碰撞後兩球都向上運動。

當 $k = 3$ ，如圖 12 所示， $v'_A = -2v_0$ ， $v'_B = 0$ ，碰撞後球 B 靜止，球 A 向上反彈。

當 $\frac{1}{3} < k < 3$ ，碰撞後狀態 F 在相圖第二象限，球 A 向上，球 B 向下反彈。

當 $k = \frac{1}{3}$ ， $v'_A = 0$ ， $v'_B = 2v_0$ ，碰撞後球 A 靜止，球 B 向下反彈。

當 $0 < k < \frac{1}{3}$ ，碰撞後狀態 F 在相圖第一象限，碰撞後兩球都向下運動。

當 $k \rightarrow 0$ ， $m_A \gg m_B$ ， $v'_A \approx v_0$ ， $v'_B \approx 3v_0$ ，碰撞後兩球都向下運動，類似於“碰撞出來的圓周率”問題，球 B 與地面碰撞反彈再與球 A 相碰，不斷來回往返，故當 k 等於特定的值時，又會把圓周率 π 碰撞出來了。

3) 三物體間碰撞

(2015·新課標全國 I 卷) 在足夠長的光滑水平面上，物體 A、B、C 位於同一直線上，A 位於 B、



C 之間。A 的質量為 m ，B、C 的質量都為 M ，三者都處於靜止狀態，現使 A 以某一速度向右運動，求 m 和 M 之間滿足什麼條件才能使 A 只與 B、C 各發生一次碰撞。設物體間的碰撞都是彈性的。

設質量比 $k = \frac{m_B}{m_A} = \frac{m_C}{m_A} = \frac{M}{m}$ ，因物體 B 與 A，及物體 C 與 A 質量比 k 相等，

故兩碰撞系統可在同一相圖中討論，設向右為正方向，物體 A 的初速度為 v_0 ，作出動量守恆相圖如圖 13 所示，圖中橫軸 $x = v_A$ ，縱軸 $y_1 = \sqrt{k}v_B$ 和 $y_2 = \sqrt{k}v_C$ 重合；有向線段 \overline{AC} 表示物體 A 與 C 碰撞，碰撞後速度分別為 v_{A1} 和 v_C ；有向線段 $\overline{A'B}$ 表示物體 A 與 B 碰撞，碰撞後速度分別為 v_{A2} 和 v_B ，AC 與 $\overline{A'B}$ 斜率相等。大圓表示物體 A、C 系統總動能守恆，小圓表示物體 A、B 系統總動能守恆。點 F 表示物體 A 與 C、B 各發生一次碰撞後，物體 A、C 系統的末狀態。若點 F 在紅色扇形區域內，表示 $v_{A2} > v_C$ ，物體 A 與 C 會發生第二次碰撞；若點 F 在藍色扇形內或在直線 $v_A = v_C$ 上，表示 $v_{A2} \leq v_C$ ，物體 A 追不上 C 便不會發生第二次碰撞。從相圖中的幾何關係可得

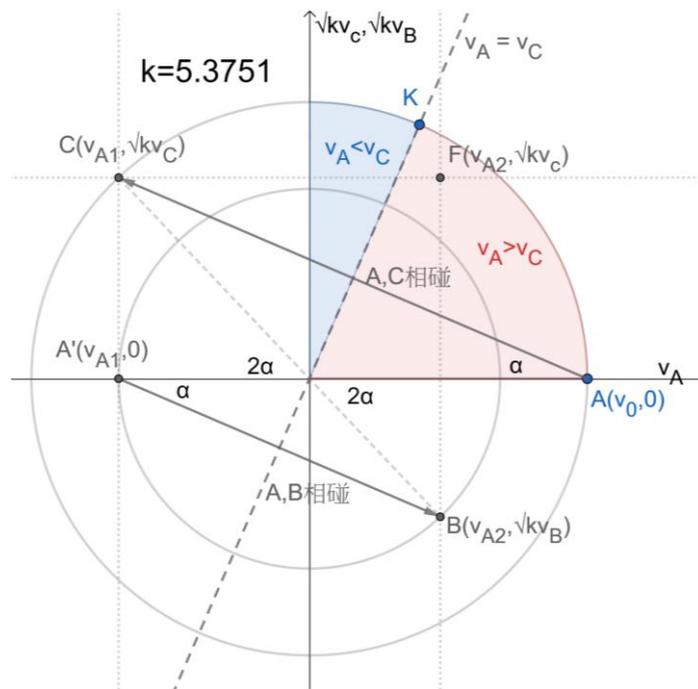


圖 13

$$\begin{cases} \sqrt{k}v_C = v_0 \cdot \sin 2\alpha \\ v_{A1} = -v_0 \cdot \cos 2\alpha \\ v_{A2} = -v_{A1} \cdot \cos 2\alpha \\ v_{A2} \leq v_C \end{cases}$$

由(5)式得

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{k}}, \text{ 故 } \cos \alpha = \sqrt{\frac{k}{k+1}}, \sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{k+1}}, \cos 2\alpha = \frac{k-1}{k+1}, \sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{k}}{k+1}$$

代入上式解得 $k \leq 2 + \sqrt{5}$ 。

若 $k \leq 1$ ，點 C 會在相圖第一象限或在縱軸上，A、C 碰撞後 A 會繼續向右運動或靜止，A 便不能與 B 相碰了，故必須 $k > 1$ ，取交集後得

$$1 < k \leq 2 + \sqrt{5}$$

4) 求碰撞後末速度

【2014·全國大綱卷】一中子與一質量數為 A ($A > 1$) 的原子核發生彈性正碰。若碰前原子核靜止，求碰撞前與碰撞後中子的速率之比。

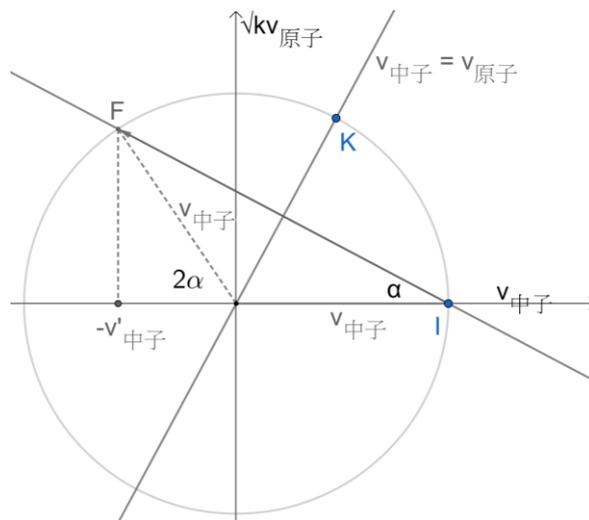


圖 14

設質量比 $k = \frac{m_{\text{原子}}}{m_{\text{中子}}} = A$ ，作出動量守恒相圖如圖 14 所示，有向線段 \overline{IF} 表示

中子與原子核碰撞過程，點 F 為碰撞後末狀態，由相圖中的幾何關係可得，

碰撞前與碰撞後中子的速率比為 $\frac{v_{\text{中子}}}{v'_{\text{中子}}} = \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{k+1}{k-1} = \frac{A+1}{A-1}$ 。

5) 求碰撞過程的能量或能量變化

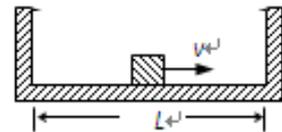
α 粒子與靜止的碳原子作正向彈性碰撞，則撞後 α 粒子損失動能百分比多少？（碳原子質量為 α 粒子的 3 倍）

設質量比 $k = \frac{m_c}{m_\alpha} = 3$ ， α 粒子初速度為 v_0 ，動量守恆相圖與圖 14 相似， α

粒子末能動與初動能之比 $\frac{E'_{k\alpha}}{E_{k0}} = \left(\frac{v'_\alpha}{v_0}\right)^2 = \cos^2 2\alpha = \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 = 0.25$ ，故 α 粒

子損失動能百分比為 $1 - \frac{E'_{k\alpha}}{E_{k0}} = 0.75$ 。

【2011·全國卷】質量為 M 、內壁間距為 L 的箱子靜止於光滑的水平面上，箱子中間有一質量為 m 的小物塊，小物塊與箱子底板間的動摩擦因數為 μ 。初始時小物塊停在箱子正中間，如圖所示。現給小物塊一水準向右的初速度 v ，小物塊與箱壁碰撞 N 次後恰又回到箱子正中間，與箱子保持相對靜止。設碰撞都是彈性的，則整個過程中，系統損失的動能為多少？



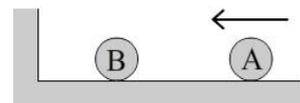
設質量比 $k = \frac{M}{m}$ ，向右為正方向，動量守恆相圖如圖 5 所示，箱子與物塊在整個 N 次碰撞後以相同速度（質心速度）運動，故碰撞前狀態為點 S ，碰撞後狀態為 S_2 ，系統損失動能為最大損失動能 ΔE_{kmax} ，由圖 5 中的幾何關係可得

$$\sqrt{\Delta E_{kmax}} = \sqrt{E_{k0}} \cdot \cos \alpha$$

又 $E_{k0} = \frac{1}{2}mv^2$ ， $k = \frac{M}{m}$ ，代入上式得 $\Delta E_{kmax} = \frac{1}{2}mv^2 \cdot \frac{k}{k+1} = \frac{mMv^2}{2(M+m)}$ 。

此題另一解法，是利用動能定理及摩擦力做功求解，與動量守恆相圖無關，故本文不再贅述。

【2015·天津·9 (1)】如圖所示，在光滑水平面的左側固定一豎直擋板，B 球在水平面上靜止放置，A 球向左運動與 B 球發生正碰，A 球碰撞前、後的速率之比為 3:1，B 球垂直撞向擋板，碰後原速率返回，兩球剛好不發生碰撞，AB 兩球的質量之比為_____，AB 碰撞前、後兩球總動能之比為_____。



設兩球質量比 $k = \frac{m_B}{m_A}$ ，向左為正方向，A 球初速度為 v_A ，作出動量守恆相圖

如圖 15 所示。有向線段 $\overline{IS_1}$ 表示 A 與 B 非彈性碰撞，碰撞後速度分別為 v'_A 和 v'_B ，然後球 B 撞牆等速率反彈到狀態 S_2 ，若點 S_2 在 $v_A = v_B$ 直線上，則 $v'_A = -v'_B$ ，兩球剛好不再有第二次碰撞。圖中大圓表示碰撞前系統總動能，小圓表示碰撞後系統總動能。已知 A 球碰撞前後速率比為 $\frac{|v_A|}{|v'_A|} = \frac{OI}{OD} =$

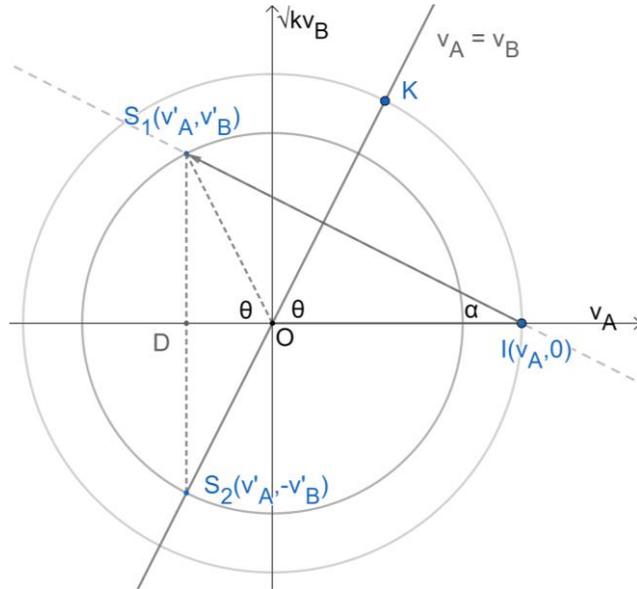


圖 15

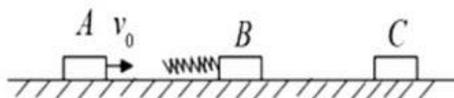
$\frac{3}{1}$ ，即 $\frac{DI}{OD} = \frac{4}{1}$ ，由相圖中的幾何關係可得， $DI = S_1D \cdot \cot \alpha$ ， $OD = S_1D \cdot$

$\tan \alpha$ ，即 $\frac{DI}{OD} = \frac{\cot \alpha}{\tan \alpha} = \frac{4}{1}$ ，解得 $k = \frac{m_B}{m_A} = 4$ 。

另外，利用正弦定理，在 ΔS_1OI 中， $\frac{OI}{OS_1} = \frac{\sin(90^\circ - 2\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{E_{k0}}{E'_k}}$ ，解得

AB 碰撞前、後兩球總動能之比 $\frac{E_{k0}}{E'_k} = \frac{(k-1)^2}{k+1} = \frac{9}{5}$ 。

如图，光滑水平直轨道上有三个质量均为 $m=1 \text{ kg}$ 的物块 A、B、C 处于静止状态。B 的左侧固定一轻弹簧，弹簧左侧的挡板质量不计。现使 A 以速度 $v_0=4 \text{ m/s}$ 朝 B 运动，压缩弹簧；当 A、B 速度相等时，B 与 C 恰好相碰并粘接在一起，且 B 和 C 碰撞过程时间极短，且损失的机械能为 1 J 。此后 A 继续压缩弹簧，直至弹簧被压缩到最短。在上述过程中，求：



- (1) B 与 C 相碰后的瞬间，B 与 C 粘接在一起时的速度；
- (2) 弹簧被压缩到最短时的弹性势能。

設質量比 $k = \frac{m_B}{m_A} = \frac{m_C}{m_B} = 1$ ，因物塊 B 與 A，及物塊 C 與 B 質量比 k 相等，

故兩碰撞系統可在同一相圖中討論，設向右為正方向，物塊 A 的初速度為

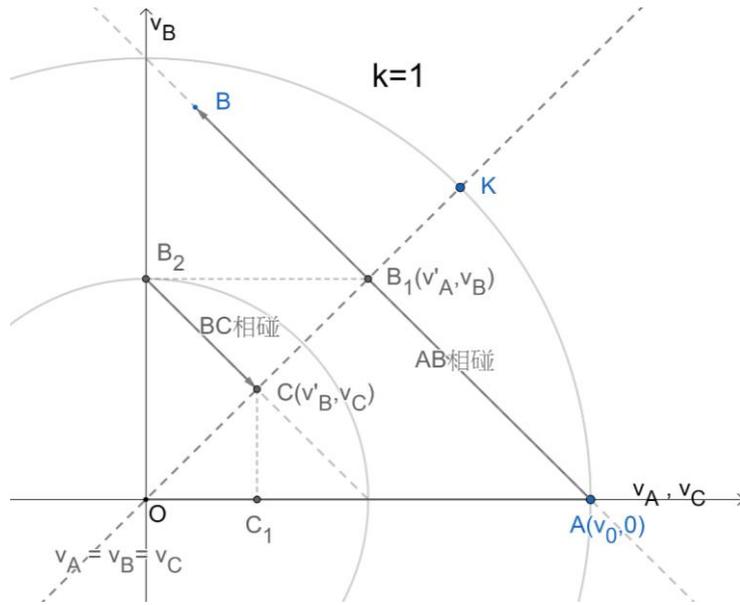


圖 16

v_0 ，作出動量守恆相圖如圖 16 所示，圖中為 $v_B - v_A$ 和 $v_B - v_C$ 關係圖重合。有向線段 \overline{AB} 表示物塊 A 與 B 碰撞，碰撞過程中，當到達狀態點 B_1 時，物塊 A 和 B 速度相等，然後同一時刻 B 與 C 相碰。有向線段 $\overline{B_2C}$ 表示物塊 B 與 C 碰撞，碰撞後粘接在一起，末速度 $v'_B = v_C$ ， AB 與 B_2C 斜率相等。從圖 16 幾何關係可看出， $OC_1 = \frac{OA}{4}$ ，所以 BC 粘合後速度 $v'_B = v_C = \frac{v_0}{4}$ 。

現討論物塊 A 與物塊 BC 間的碰撞，設質量比 $k = \frac{m_{BC}}{m_A} = 2$ ，向右為正方向，物塊 A 的初速度為 v_0 ，物塊 BC 的初速度為零，當彈簧壓縮到最短時，系統動能損失最大，如圖 5 所示，由圖 5 中的幾何關係可得

$$\sqrt{\Delta E_{kmax}} = \sqrt{E_{k0}} \cdot \cos \alpha$$

又 $E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2 = 8J$ ， $k = 2$ ，代入上式得 $\Delta E_{kmax} = \frac{16}{3}J$ 。而系統動能的損失轉化為彈簧壓縮的勢能和 BC 粘合的內能，BC 粘合的內能等於 B 與 C 碰撞時損失的機械能 1J，所以彈簧的勢能 $\Delta E_p = \Delta E_{kmax} - \Delta U = \frac{13}{3}J$ 。

6 小結

- 1) 相空間通常是由位置變數以及動量變數所有可能值所組成。而本文討論的動量守恆相空間圖，實際上是 A、B 兩質點組成的一維對心碰撞系統的速度關係圖，再對縱軸作線性變換，鉛直伸縮 \sqrt{k} 倍，即 $\sqrt{k}v_B - v_A$ 圖，其中 $k = \frac{m_B}{m_A}$ 。所以在相圖中，既有系統的速度參數，也有質量參數。
- 2) 利用動量守恆相圖，可以把碰撞過程中的代數式，以幾何關係表達，比

公式法或代數法有更深刻的物理意義。

- 3) 在中學物理教學中，經常都會加入“碰撞時間極短”條件，目的在於忽略外力對系統的衝量，從而碰撞系統動量守恆；而且動量和動能都是狀態量，因此往往形成一種思維定勢，只關心碰撞系統的始末狀態，忽略思考碰撞過程。另外，碰撞過程中系統的內力對物體的衝量，是變力對碰撞時間的積分，在中學教學中不容易討論。動量守恆相圖沒有時間參數，不用討論碰撞時間和系統內力問題，卻又可以直觀的表示整個碰撞過程系統的運動狀態和能量變化，更適合在中學物理教學中討論。

參考文獻

- [1] Gregory Galperin. Playing pool with π (the number π from a billiard point of view) [J]. Regular and Chaotic Dynamics, 2003, 8 (4) : 375-394.
- [2] 陳 怡. 碰撞出來的圓周率—兩球與牆壁三者間的碰撞次數與圓周率 π 間關係的討論[J]. 物理與工程, 2020, 30 (1) : 68-72.
- [3] Grant Sanderson. Why do colliding blocks compute pi? [DB/OL]. <https://youtu.be/jsYwFizhncE>, 2019-1-20.
- [4] Kin Son Wong, Hang Wong. Understanding the law of Conservation of Momentum in one-dimensional collisions between two objects using the phase space approach, 2020. (submitted for publication)
- [5] 任才貴, 邱萬英, 陳早生. 從總動能變化特點考察一維兩體對心碰撞[J]. 大學物理, 2004, 23 (5) : 16-18.
- [6] 王長春. 從能量的角度討論兩體碰撞問題[J]. 大學物理, 2005, 24 (9) : 18-19.
- [7] 黃光照. 對線性碰撞在接觸過程中的動能分析[J]. 科學教育月刊, 2018, 411 : 11-22.
- [8] 王悅. 一維對心碰撞恢復係數的討論[J]. 物理與工程, 2014, 24 (5) : 66-69.
- [9] 香港物理奧林匹克委員會, 中國教育學會物理教學專業委員會. 第六屆泛珠三角暨中華名校物理奧林匹克邀請賽力學基礎試賽題 [DB/OL]. http://panpearl.phys.ust.hk/files/mechanics/PanPhO2010_Mechanics.pdf, 2010.
- [10] 劉麗芝, 王秉相, 鄭宇軒, 等. Galilean 炮在剛性壁上的回彈[J]. 力學與實踐, 2018, 40 (6) : 640-646.

圖 16 <https://www.geogebra.org/classic/zs2nycdn>