

hoofdstuk 3 irrationale functies

www.karelappeltans.be

October 8, 2024

Contents

1	Voorbeelden	2
2	Definitie	2
3	Basisfuncties	2
3.1	$f(x) = \sqrt{x}$	2
3.2	$f(x) = \sqrt[3]{x}$	3
4	Domein, nulpunten, tekentabel	3
5	Inverse functies	5
5.1	voorbeeld	5
5.2	horizontale lijntest	5
5.3	injectieve functie	5
5.4	algebraïsch	6
6	Samengestelde functies	6
7	Rekenen met n-de machtswortels en rationale exponenten	7
7.1	rationale exponenten	7
7.2	Rekenregels	7
7.3	wortelvormen vereenvoudigen	8
8	Toepassingen	9
8.1	beeldverwerking	9
8.2	zevenkamp	9
9	oefeningen	9
9.1	irrationale functies	9
9.2	inverse functies	9
9.3	samengestelde functies	10
9.4	rationale exponenten	11
10	taken	12

1 Voorbeelden

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \quad f(x) = x - \sqrt{x} \quad f(x) = \frac{\sqrt{169-x^2}-x-7}{\sqrt[3]{x}} \quad \cancel{f(x) = \sqrt{2x^2}}$$

2 Definitie

Een irrationale functie is een functie waarbij er minstens één x onder een n-de machtswortel staat.

3 Basisfuncties

3.1 $f(x) = \sqrt{x}$

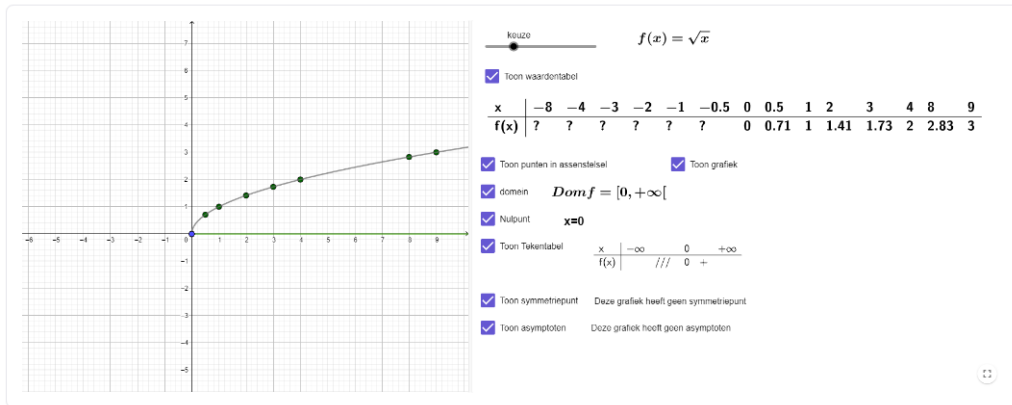


Figure 1: <https://www.geogebra.org/m/c3hg3FfG>

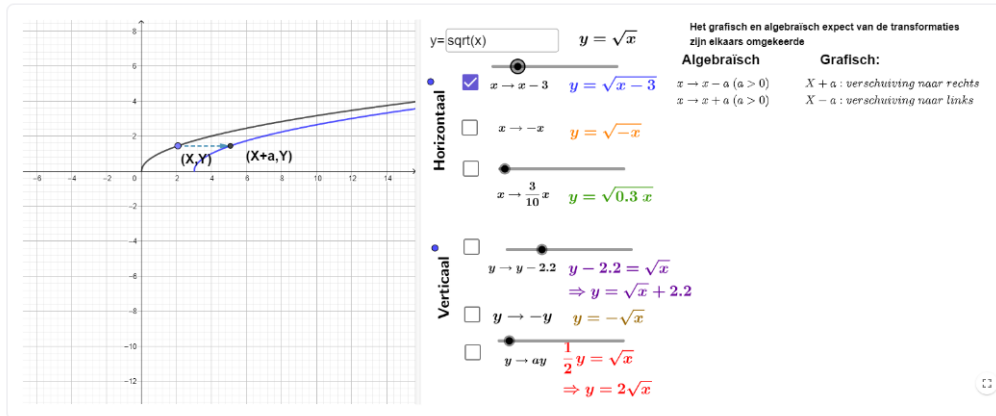


Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/mq5zhh8t>

3.2 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

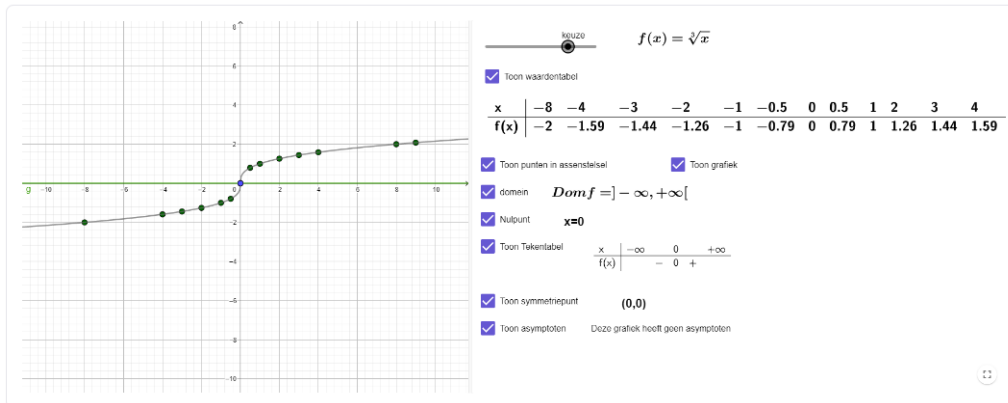


Figure 3: <https://www.geogebra.org/m/c3hg3FfG>

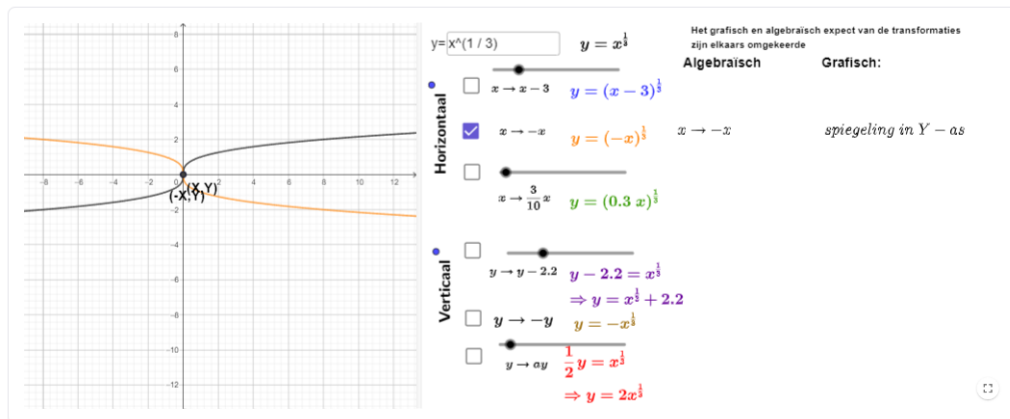


Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/mq5zhh8t>

4 Domein, nulpunten, tekentabel

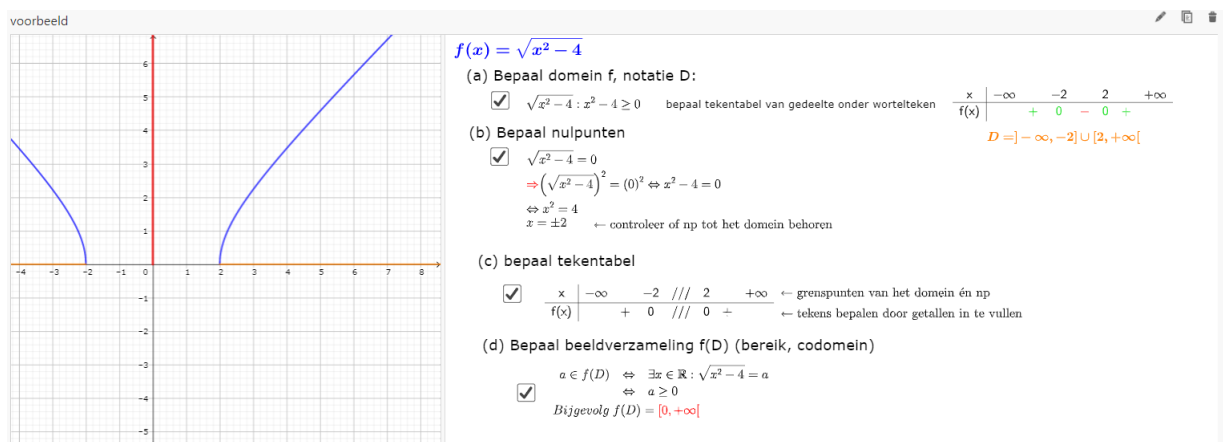


Figure 5: <https://www.geogebra.org/m/yarbcjsw>

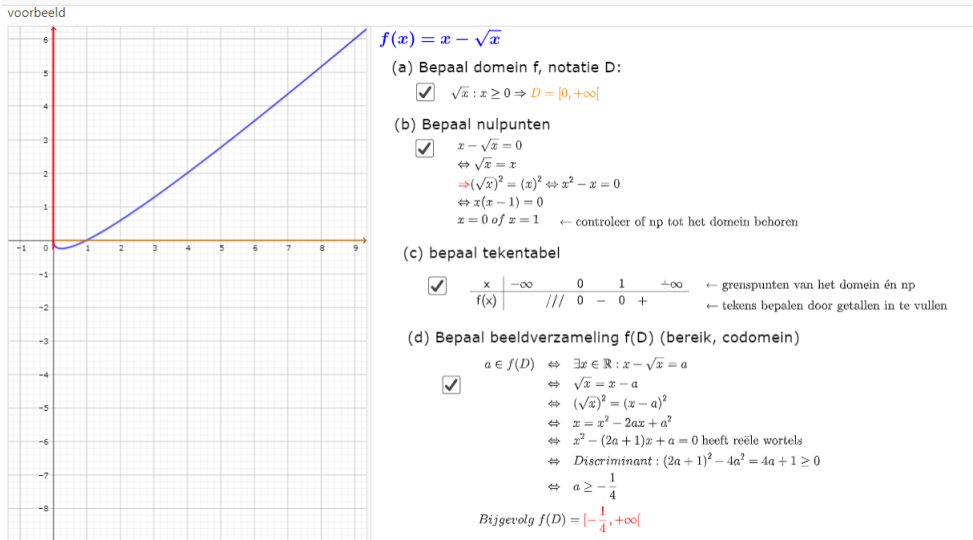


Figure 6: <https://www.geogebra.org/m/yarbCjsw>

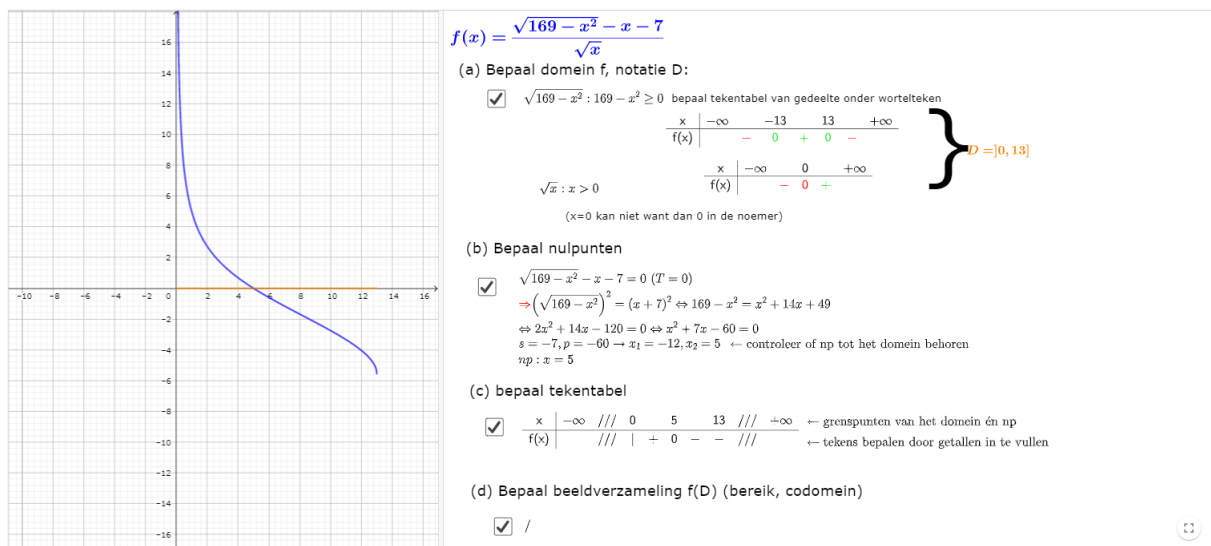


Figure 7: <https://www.geogebra.org/m/yarbCjsw>

5 Inverse functies

5.1 voorbeeld

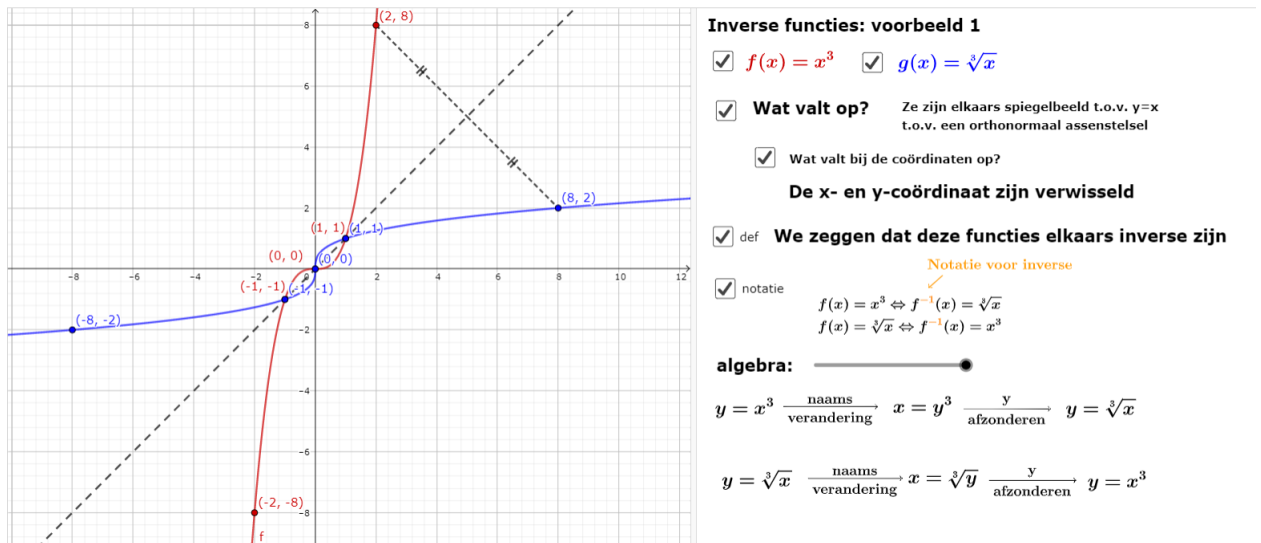


Figure 8: <https://www.geogebra.org/m/Faj58x3m>

5.2 horizontale lijntest

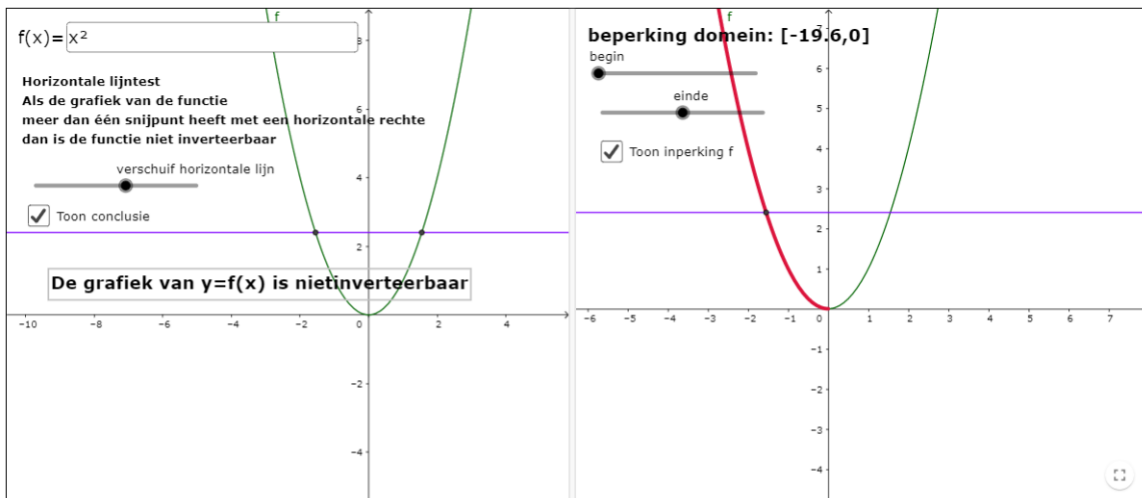


Figure 9: <https://www.geogebra.org/m/Faj58x3m>

5.3 injectieve functie

Een functie die 'slaagt' in de horizontale lijntest wordt een injectieve functie genoemd. Dit is de definitie:

We noemen een functie $f : A \rightarrow B$ injectief als er voor elke $y \in B$ (B : bereik) hoogstens één $x \in A$ (A domein) bestaat waarvoor $f(x) = y$

5.4 algebraïsch

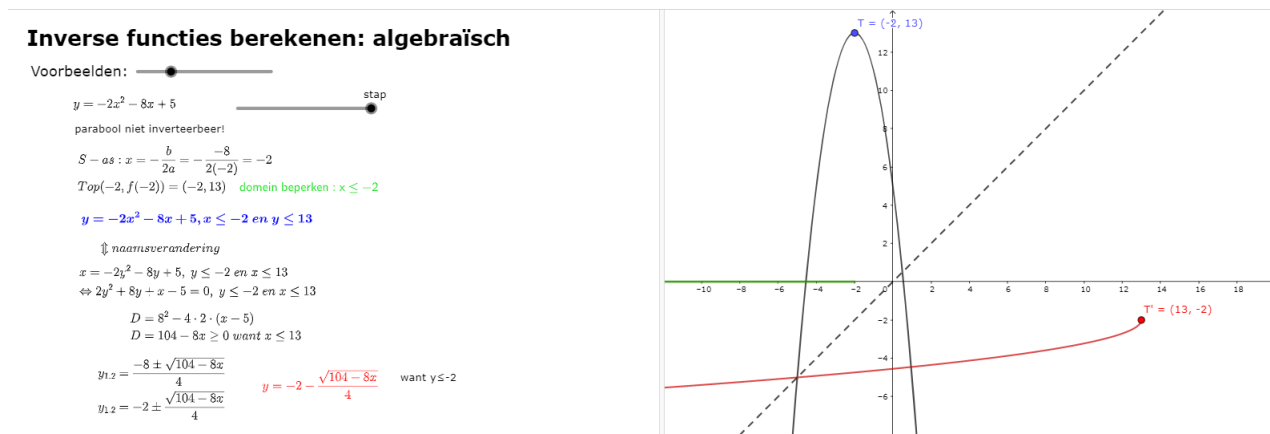


Figure 10: <https://www.geogebra.org/m/Faj58x3m>

6 Samengestelde functies

Samengestelde functies

$f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = x^2 + 4x + 3$

De samengestelde functie:

$f \circ g : x \xrightarrow{g} x^2 + 4x + 3 \xrightarrow{f} \sqrt{x^2 + 4x + 3}$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 4x + 3) = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$

$g \circ f : x \xrightarrow{f} \sqrt{x} \xrightarrow{g} x + 4\sqrt{x} + 3$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = x + 4\sqrt{x} + 3$

Figure 11: <https://www.geogebra.org/m/UvGBbgED>

Domein van een samengestelde functie

Het domein van een samengestelde functie $f \circ g(x)$ is de verzameling van alle x zodat

- 1) x is in het domein van g en
- 2) $g(x)$ is in het domein van f .

Voorbeeld: $f(x) = \frac{2}{x-1}$ en $g(x) = \frac{3}{x}$

Omdat $g(x) = \frac{3}{x}$ behoort 0 niet tot het domein van g , dus ook niet tot het domein van $f \circ g$

Omdat $f(g(x)) = \frac{2}{g(x)-1}$ moeten we dus ook elke x uitsluiten waarvoor $g(x) = 1$, $\frac{3}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 3$

Dus $\text{dom } f \circ g = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$

Figure 12: <https://www.geogebra.org/m/UvGBbgED>

7 Rekenen met n-de machtswortels en rationale exponenten

7.1 rationale exponenten

n-de machtswortels

voorbeelden:

$$\sqrt{9} = \sqrt[2]{9} = 3 \Leftrightarrow 3^2 = 9$$

dus: $\sqrt[2]{3^2} = 3$

$$\sqrt[5]{32} = 2 \Leftrightarrow 2^5 = 32$$

$$\sqrt[5]{2^5} = 2$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \Leftrightarrow (-3)^3 = -27$$

$$\sqrt[3]{(-3)^3} = -3$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

(opgepast: als n even is moet a een positief getal zijn!)

Machten met rationale exponenten

Beschouw de volgende gelijkheden:

$$\sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{64} = 4 = 2^2 = 2^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[3]{2^9} = \sqrt[3]{512} = 8 = 2^3 = 2^{\frac{9}{3}}$$

$$\sqrt[4]{2^8} = \sqrt[4]{256} = 4 = 2^2 = 2^{\frac{8}{4}}$$

We merken telkens dat $\sqrt[n]{2^m} = 2^{\frac{m}{n}}$

Definitie:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} : \forall m \in \mathbb{Z} : \forall a \in \mathbb{R}_0^+ : a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Voorbeelden:

$$5^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{5^2}$$

$$3^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{3^3} = \sqrt{3^3} = (3^4)\sqrt{3}$$

$$104^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{104^1} = \sqrt[4]{104}$$

7.2 Rekenregels

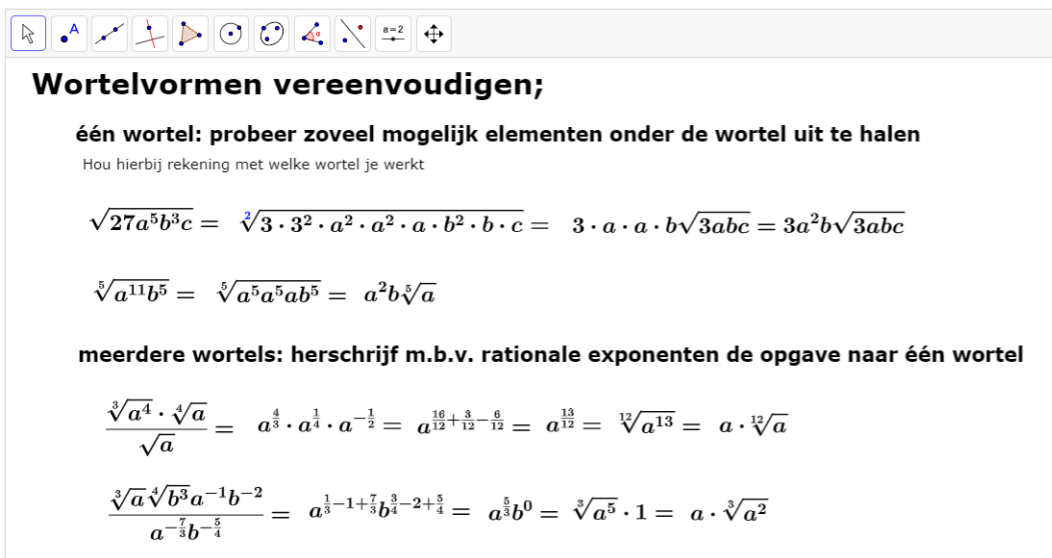
rekenregels exponenten

Regel	Voorbeeld
$a^1 = a$	$5^1 = 5$
$a^0 = 1$	$9^0 = 1$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{5^7}{5^3} = 5^{7-3} = 5^4$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(7^2)^4 = 7^{2 \cdot 4} = 7^8$
$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$
$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$	$\sqrt[5]{2^5} = 2$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[5]{7^2} = 7^{\frac{2}{5}}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(3 \cdot 7)^n = 3^n \cdot 7^n$
$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

Figure 13: <https://www.geogebra.org/m/urammnee>

7.3 wortelvormen vereenvoudigen



Wortelvormen vereenvoudigen;

één wortel: probeer zoveel mogelijk elementen onder de wortel uit te halen
 Hou hierbij rekening met welke wortel je werkt

$$\sqrt{27a^5b^3c} = \sqrt{3 \cdot 3^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^2 \cdot b \cdot c} = 3 \cdot a \cdot a \cdot b \sqrt{3abc} = 3a^2b\sqrt{3abc}$$

$$\sqrt[5]{a^{11}b^5} = \sqrt[5]{a^5a^5ab^5} = a^2b\sqrt[5]{a}$$

meerdere wortels: herschrijf m.b.v. rationale exponenten de opgave naar één wortel

$$\frac{\sqrt[3]{a^4} \cdot \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}} = a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{16}{12} + \frac{3}{12} - \frac{6}{12}} = a^{\frac{13}{12}} = \sqrt[12]{a^{13}} = a \cdot \sqrt[12]{a}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a} \sqrt[4]{b^3} a^{-1} b^{-2}}{a^{-\frac{7}{3}} b^{-\frac{5}{4}}} = a^{\frac{1}{3} - 1 + \frac{7}{3}} b^{\frac{3}{4} - 2 + \frac{5}{4}} = a^{\frac{5}{3}} b^0 = \sqrt[3]{a^5} \cdot 1 = a \cdot \sqrt[3]{a^2}$$

Figure 14: <https://www.geogebra.org/m/uramnee>

Let op!!!

$$\sqrt{A \pm B} \neq \sqrt{A} \pm \sqrt{B}$$

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{9+16} & \neq & \sqrt{9} + \sqrt{16} \\ || & & || \\ \sqrt{25} = 5 & & 3 + 4 = 7 \end{array}$$

$$\sqrt{x^2 - 4} \neq x - 2$$

Figure 15: <https://www.geogebra.org/m/uramnee>

8 Toepassingen

8.1 beeldverwerking

8.2 zevenkamp

Puntenberekening [\[bewerken \]](#)

De punten worden als volgt berekend:

- Punten = $\text{INT}(A \cdot (B \cdot P)^C)$ voor baanonderdelen
- Punten = $\text{INT}(A \cdot (P \cdot B)^C)$ voor veldonderdelen

A, B en C zijn parameters die per discipline verschillen, zoals is te zien in de tabel hieronder. P is de prestatie van de atleet in eenheden zoals deze in de laatste kolom staat weergegeven. Onderstaande variabelen zijn vrouwen:

Event	A	B	C	Eenheden
100 m horden	9,23076	26,7	1,835	seconden
Hoogspringen	1,84523	75	1,348	centimeters
Kogelstoten	56,0211	1,5	1,05	meters
200 m	4,99087	42,5	1,81	seconden
Verspringen	0,188807	210	1,41	centimeters
Speerwerpen	15,9803	3,8	1,04	meters
800 m	0,11193	254	1,88	seconden

9 oefeningen

9.1 irrationale functies

1. Bepaal domein, nulpunten en tekentabel van

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + 3}$

(c) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 - 4}}$

(d) $f(x) = \frac{x - \sqrt{5 - x^2} - 1}{\sqrt{4x - 7}}$

(e) $f(x) = \frac{x + \sqrt{4x^2 + 6x}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

(f) $f(x) = \frac{\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}}{\sqrt{5x-1} + x-5}$

2. Zijn de functies f en g gelijk? Verklaar jullie antwoord

(a) $f : x \mapsto \sqrt{\frac{2-x}{x+2}}$ en $g : x \mapsto \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}}$

(b) $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$ en $g : x \mapsto \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}$

9.2 inverse functies

1. Welke van onderstaande functies zijn inverteerbaar? Bepaal vervolgens de eventuele inverse

(a) $y = 2x + 3$

(b) $y = x^2 + 4$

(c) $y = \frac{2x+4}{x-3}$

(d) $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$

(e) $y = \frac{1}{x^2}$

(f) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

2. Voor welke waarde(n) van a is de functie f met voorschrift $f(x) = -2x^2 - 8x + 5$ met $x \leq a$ inverteerbaar? Bepaal voor deze gevallen het voorschrift van de inverse functie

3. Bepaal de inverse van $f(x) = \sqrt{2x - 3} + 1$

4. juist of fout. Verklaar uw antwoord.
- (a) De verticale lijntest wordt gebruikt om te controleren of een functie inverteerbaar is
 - (b) De inverse van $y = \frac{x+1}{x-2}$ is $y = \frac{x-2}{x+1}$
 - (c) Elke oneven functie is inverteerbaar
 - (d) Als een inverteerbare functie een HA heeft, zal haar inverse een VA hebben
 - (e) het domein van de inverse functie is het bereik van de originele functie
5. De grafiek van de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is de rechte door de punten $(0, 1)$ en $(7, 6)$. De functie g is de inverse functie van f . Bepaal $g(3)$.
- A $g(3) = \frac{14}{5}$ B $g(3) = 3$ C $g(3) = \frac{17}{6}$ D $g(3) = \frac{22}{7}$
6. De grafiek van de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is de rechte door de punten $(-2, 0)$ en $(0, 1)$. Verder is de functie g gegeven met $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = (f(x))^3$. Bepaal $g^{-1}(8)$. (A 2)
7. Oefen zelf op het algebraïsch berekenen van de inverse functie

Nieuwe oef.
Controleer antwoord
Toon oplossing

$$f(x) = -6 - 2(8x - 8)$$

$$f^{-1}(x) = \boxed{1 / 5 x + 1}$$

Probeer opnieuw

$$f^{-1}(x) = \frac{-x + 10}{16}$$

Figure 16: <https://www.geogebra.org/material/edit/id/Faj58x3m>

9.3 samengestelde functies

1. Kies zelf 2 functies f en g en maak de samengestelde functies $f \circ g(x)$ en $g \circ f(x)$

Samengestelde functies

$f(x) = 2^x$

$g(x) = x - 3$

De samengestelde functie:

✓ $f \circ g: x \xrightarrow{g} x - 3 \xrightarrow{f} 2^{x-3}$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = 2^{x-3}$

✓ $g \circ f: x \xrightarrow{f} 2^x \xrightarrow{g} 2^x - 3$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2^x) = 2^x - 3$

Figure 17: <https://www.geogebra.org/m/UvGBbgED>

2. Bepaal $f \circ g(x)$, $g \circ f(x)$, $f \circ f(x)$, $g \circ g(x)$ en hun respectieve domeinen met $f(x) = \sqrt{x-1}$ en $g(x) = \frac{1}{1-x}$
3. Bepaal $f(f(x))$ en haar domein met $f(x) = \frac{1}{x-1}$
4. Los op: $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ met $f(x) = \frac{x}{x+3}$ en $g(x) = 3x$
5. Voor welke waarden van x zal $f \circ g(x) \leq g \circ f(x)$ met $f(x) = 2x - 1$ en $g(x) = \frac{x}{x+1}$
6. Beschouw de twee functies $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+x+1}}$ en $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^2 - 1$. Bepaal het domein van $f \circ g$.
7. Gegeven $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$
 - (a) Bepaal domein en bereik van f
 - (b) Bepaal het voorschrift van f^{-1}
 - (c) Bepaal domein en bereik van f^{-1}
 - (d) Ga na dat $f^{-1}(f(x)) = x$ voor elke x in het domein van f
 - (e) Gan an dat $f(f^{-1}(y)) = y$ voor elke y in het bereik van f
8. Voor welke waarden van x geldt:
 - (a) $f^{-1}(f(x)) = x$
 - (b) $f(f^{-1}(x)) = x$

9.4 rationale exponenten

1. Schrijf telkens als een macht van 2
 - (a) 1
 - (b) 2
 - (c) $\frac{1}{4}$
 - (d) $\sqrt[3]{16}$
 - (e) $\frac{4^{-\frac{1}{2}} 8^{\frac{2}{3}}}{16^{-\frac{3}{4}}}$
 - (f) $\frac{2\sqrt{4}\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt[5]{8}}$
 - (g) $\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}(\sqrt[5]{8})^2}{\sqrt[5]{2}}$

2. Bepaal n als $\sqrt[5]{3^{n-5}} = 729$.

3. Welke van de vijf volgende uitdrukkingen is niet gelijk aan de overige vier?
 2^{24+3a} $4^{12}8^a$ $16^{6+a}2^{-a}$ 4^{12+2a} $2^{16}16^22^{3a}$

4. Vereenvoudig.

(a) $\sqrt[3]{32}$

(b) $\sqrt[5]{160}$

(c) $\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^4}$

(d) $216^{-\frac{2}{3}}$

(e) $16^{-0.125}$

(f) $\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{2}{9}\right)^4}{2^{-6}3^34^{-2}}$

5. Vereenvoudig. Zet om in vormen zonder negatieve of gebroken exponenten. Alle uitdrukkingen zijn gedefinieerd.

(a) $\sqrt[3]{16a^3b^4c^{16}}$

(b) $\frac{\sqrt{a^{-5}}\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a^3}}$

(c) $\sqrt{a^3\sqrt{a^2}\sqrt[4]{a}}$

(d) $\left(\frac{c^{-3}}{a^{-1}b^{\frac{5}{2}}}\right)^{-\frac{3}{5}}\left(\frac{c^{\frac{8}{25}}b^{-1}}{a^{\frac{1}{5}}}\right)^{\frac{5}{2}}$

(e) $\frac{(-a^{-2})^{-n}a^4(ab^3)^{-2}}{\left(\frac{-b}{a^2}\right)^{-(n+2)}} \cdot \left(\frac{a}{-b^{-2}}\right)^n$

(f) $\frac{\sqrt[3]{x^4}\sqrt[3]{y^4}}{\sqrt[9]{x^3y}}$

6. Bij het afschrijven van een machine in de boekhouding wordt de volgende formule gebruikt:

$$\frac{p}{100} = 1 - \sqrt[n]{\frac{W_n}{W_0}}$$

met p het afschrijvingspercentage en W_n de waarde van de machine na n jaar.

(a) Bereken p voor een machine die na 5 jaar nog een vierde van haar aanschafprijs waard is

(b) Een machine werd gekocht voor 10000 euro en heeft een afschrijvingspercentage van 30%. Hoeveel is de machine nog waard na 3 jaar?

7. Als a negatief is, dan is $\sqrt{(2a-1)^2} \cdot \sqrt[3]{a^9} + \sqrt{a^4}$ gelijk aan:

10 taken