POLINÔMIOS

Um polinômio na variável x é uma expressão com a seguinte representação, sendo n um número natural:

Grau de P(x)

$$P(x)=\boxed{a_n}x^{\boxed{n}}+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+\boxed{a_0}$$

Coeficiente Líder

Termo Independente

Por exemplo, $P(x)=x^5-4x^2+2x$ é um polinômio de grau 5, com coeficiente líder 1 e termo independente nulo. Observe que os coeficientes vinculados às potências x^4, x^3 e x^0 são todos iguais a zero.

O grau de um polinômio determina sua forma:

1º grau: $P(x) = ax + b$
2º grau: $P(x) = ax^2 + bx + c$
3º grau: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, e assim por diante.

Valor Numérico

O valor numérico de um polinômio P(x) para **x = a** é o número obtido quando se **substitui x por a**. Ou seja, P(a).

Soma dos Coeficientes e Termo Independente

Seja $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ um polinômio genérico.

Ao calcularmos P(1), o valor obtido é $P(1)=a_n(1)^n+\ldots+a_1(1)+a_0=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1+a_0$, que corresponde à soma dos coeficientes de P(x).

Ainda, ao calcularmos P(0), os termos associados a potências de x acabam sendo anulados, resultando em $P(x)=a_n(0)^n+a_{n-1}(0)^{n-1}+\ldots+a_1(0)+a_0=a_0$, que corresponde ao termo independente de P(x).

Ou seja, P(1) **sempre** nos informa a soma dos coeficientes de P(x), e P(0) **sempre** nos informa o termo independente.

EXERCÍCIOS DE AULA

01) Determinar **m** a fim de que o grau do polinômio $P(x)=(m^2-1)x^3+(m+1)x^2+1$ seja 2.

02) Se P(x) é um polinômio de 1º grau, P(1) = 2 e P(3) = 8, determine P(x).

03) (ITA) No desenvolvimento de $(ax^2-2bx+c+1)^5$ obtém-se um polinômio p(x) cujos coeficientes somam 32. Se 0 e -1 são suas raízes, a soma **a + b + c** vale:

a) $-\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 1.

e) $\frac{3}{2}$

Raiz (ou Zero)

Um número **a** é denominado raiz de um polinômio P(x) se e somente se **P(a) = 0**.

OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

Para **adição** e **subtração**, basta somarmos/subtrairmos os coeficientes dos termos de mesmo grau.

Para **multiplicação,** basta multiplicarmos usando a propriedade distributiva.

Ao somarmos ou subtrairmos dois polinômios, o grau do novo polinômio será, **no máximo**, igual ao maior grau entre os dois polinômios. Ao multiplicarmos dois polinômios, o grau do novo polinômio será igual à soma dos graus dos dois polinômios.

EXERCÍCIOS DE AULA

04) Determine **a** e **b** para que $\left(ax^2+bx\right)\cdot\left(2x+3\right)+bx^3\equiv -x^3-x^2+3x$.

05) Se A(x) e B(x) são de 3º grau, julgue verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir:

a) (   ) A(x) + B(x) é de 3º grau.

b) (   ) A(x) . B(x) é de 9º grau.

c) (   ) $\left(A(x)\right)^5$ é 15º grau.

Divisão de Polinômios

Todo polinômio P(x) pode ser escrito na forma

$$P(x)=D(x)\cdot Q(x)+R(x)$$

Dividendo ← P(x) | D(x) → Divisor

Q(x) → Quociente

R(x) → Resto

O grau de P(x) corresponde à soma dos graus do divisor D(x) e do quociente Q(x). O grau do resto R(x) será necessariamente *menor* do que o grau de D(x).

A divisão de dois polinômios quaisquer pode ser realizada de diversas maneiras. Aqui, enfatizaremos duas delas. Para ilustrar, iremos obter o quociente e o resto da divisão de P(x) = $x^3 + 3x^2 + 5$ por D(x) = $x^2 - 2$.

1º) Uma alternativa de abordagem é a partir de um algoritmo conhecido como *Método da Chave*, semelhante ao algoritmo de divisão aprendido no Ensino Fundamental. Ele tem esse nome devido à disposição $P(x)\,\underline{|\,D(x)}\;\Rightarrow x^3+3x^2+0x+5\,\underline{|\,x^2-2}$.

Inicia-se calculando o primeiro termo do quociente Q(x). Esse termo é obtido a partir da divisão do primeiro termo de P(x) pelo primeiro de D(x). Ou seja, $\frac{x^3}{x^2}=x$. Na divisão,

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2+0x+5 & x^2-2 \\ \hline & x \end{array}.$$

A seguir, multiplica-se o divisor pelo termo obtido, **trocando o sinal** ao inserir o resultado no algoritmo.

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2+0x+5 & x^2-2 \\ \hline -x^3 \qquad\quad +2x & x \\ \hline \qquad 3x^2+2x+5 & \end{array}$$

Os demais termos do quociente são obtidos repetindo o procedimento anterior, dividindo o primeiro termo do "novo dividendo" pelo primeiro do divisor, até que o grau da expressão obtida seja **menor** do que o do grau do divisor, encerrando o procedimento.

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2+0x+5 & x^2-2 \\ \hline -x^3 \qquad\quad +2x & x+3 \\ \hline \qquad 3x^2+2x+5 & \\ \qquad -3x^2 \qquad +6 & \\ \hline \qquad\qquad 2x+11 & \end{array}$$

Em resumo:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \boxed{x^3}+3x^2+0x+5 & \boxed{x^2}-2 \\ \cline{3-3}
\text{Trocar o sinal!} \leftarrow & -x^3 \qquad +2x & \boxed{x}+\boxed{3} \\ \cline{2-2}
 & \boxed{3x^2}+2x+5 & \frac{3x^2}{x^2},\ \frac{x^3}{x^2} \Bigg\} Q(x)=x+3 \\
 & -3x^2 \qquad +6 & \\ \cline{2-2}
 & \underbrace{2x+11}_{R(x)\,=\,2x+11} &
\end{array}
$$

Uma boa dica para uma execução sem erros do método é escrever *todos* os coeficientes do dividendo P(x), inclusive os nulos: $P(x)=x^3+3x^2+5$ foi escrito como $P(x)=x^3+3x^2+0x+5$.

2º) A divisão também pode ser realizada a partir da relação $P(x)=D(x)\cdot Q(x)+R(x)$. Assim, temos que $x^3+3x^2+5=(x^2-2)\cdot Q(x)+R(x)$.

Como o grau de P(x) corresponde à soma dos graus do divisor D(x) e do quociente Q(x), necessariamente Q(x) é um polinômio de 1º grau: Q(x) = ax + b.

O grau de R(x) será necessariamente *menor* do que o grau de D(x). Como D(x) é de 2º grau, R(x) é *no máximo* de 1º grau: R(x) = cx + d.

Assim,

$$\overbrace{x^3+3x^2+5}^{P(x)}=\overbrace{(x^2-2)}^{D(x)}\cdot\overbrace{(ax+b)}^{Q(x)}+\overbrace{(cx+d)}^{R(x)}$$

Efetuando as multiplicações, temos que:

$$x^3+3x^2+5=(x^2-2)\cdot(ax+b)+(cx+d)$$
$$x^3+3x^2+5=ax^3+bx^2-2ax-2b+cx+d$$
$$x^3+3x^2+5=ax^3+bx^2+(-2a+c)x+(-2b+d)$$

Comparando coeficientes dos termos de mesmo grau,

$$x^3+3x^2+5=\underset{a=1}{a}\,x^3+\underset{b=3}{b}\,x^2+\underbrace{(-2a+c)}_{\substack{-2a+c=0\\ c=2a\\ c=2}}x+\underbrace{(-2b+d)}_{\substack{-2b+d=5\\ d=5+2b\\ d=11}}.$$

Logo, Q(x) = ax + b = x + 3 e R(x) = cx + d = 2x + 11.

EXERCÍCIO DE AULA

06) Obter **m** e **n** para que A(x) = $2x^3+5x^2+mx+n$ seja divisível por B(x) = x^2-1.

TEOREMA DO RESTO

Todo polinômio pode ser escrito, a partir da divisão, como $\mathrm{P}(x)=\mathrm{Q}(x)\cdot\mathrm{D}(x)+\mathrm{R}(x)$. Se o divisor **D(x) = ax + b** for de 1º grau, então o resto necessariamente é uma constante (grau zero), pois seu grau é menor do que o do divisor.

Logo, $\mathrm{P}(x)=(ax+b)\cdot\mathrm{Q}(x)+\mathrm{R}$. Seja r a raiz do divisor. Ou seja, D(r) = 0. Dessa forma, $\mathrm{P}(r)=\mathrm{D}(r)\cdot\mathrm{Q}(r)+\mathrm{R}=0\cdot\mathrm{Q}(r)+\mathrm{R}=0+\mathrm{R}=\mathrm{R}$.

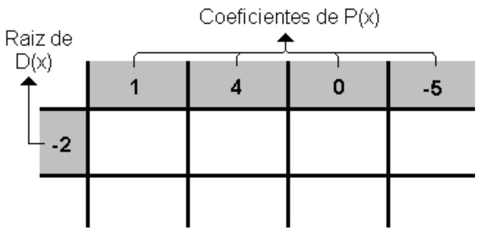
Assim,

$$\mathbf{P}\left(\begin{array}{c}\textbf{Raiz do divisor}\\ \textbf{de 1º grau}\end{array}\right)=\textbf{Resto}$$

Algoritmo de Briot-Ruffini (para D(x) = x ± a)

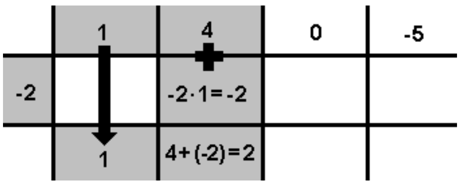
A divisão de polinômios pode ser realizada de modo mais eficiente em uma situação específica: se o **divisor for na forma D(x) = x ± a**, ou seja, um divisor de 1º grau com coeficiente líder igual a 1, é possível utilizar o Algoritmo de Briot-Ruffini. Para ilustrar, iremos obter o quociente e o resto da divisão de $P(x) = x^3 + 4x^2 - 5$ por $D(x) = x + 2$.

Antes de mais nada é preciso montar a estrutura para que o algoritmo possa ser aplicado, traçando *duas linhas horizontais* e *n + 1 linhas verticais*, onde n é o grau de P(x). Ou seja, uma linha a mais do que o grau de P(x). Nesse caso, quatro linhas. A tabela formada deve ser preenchida como mostra a figura.

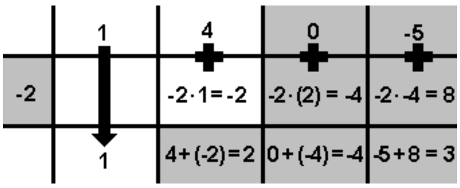


ATENÇÃO: todos os coeficientes de P(x) devem ser colocados, **inclusive os nulos**.

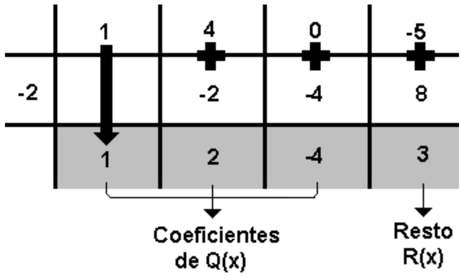
A seguir, o coeficiente líder deve ser repetido, sendo multiplicado pela raiz do divisor. O resultado é colocado na faixa central, sendo somado com o número imediatamente acima dele. O resultado dessa soma termina de preencher a coluna.



Por fim, o procedimento é repetido até preencher a última coluna.



A última linha nos informa o resto e o quociente da divisão efetuada: o último elemento é o resto (lembre que ele é uma constante, pois o divisor é de 1º grau) e os demais são os coeficientes do quociente, cujo grau é um a menos do que o do dividendo. Assim, $Q(x) = x^2 + 2x - 4$ e $R(x) = 3$.



EXERCÍCIOS DE AULA

07) Obter **m** de modo que $P(x) = 2x^3 - mx + 4$ seja divisível por x + 1.

08) Determinar **a** e **b** para que $P(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ seja divisível por $x^2 - 1$.

Se P(x) é **divisível** por D(x), então as raízes de D(x) também são raízes de P(x).

R(x) = 0 quando P(x) for *divisível* por D(x).

08) Obter **m** e **n** para que $A(x) = 2x^3 + 5x^2 + mx + n$ seja divisível por $B(x) = x^2 - 1$.

Divisão pelo Produto

Um polinômio é divisível por (x - a)(x - b) se e somente se P(x) for separadamente divisível por **x - a** e **x - b**.

EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Resolver equações polinomiais é o mesmo que encontrar as raízes de um dado polinômio. Ou seja, é encontrar valores de x tais que **P(x) = 0**.

Forma Fatorada (Decomposta)

Todo polinômio pode ser fatorado da seguinte forma:

$$P(x) = \boxed{a_n} \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)$$

Não esquecer do coeficiente líder!

$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ são raízes da equação P(x) = 0.

Toda equação polinomial P(x) = 0 de grau n, $n \geq 1$, admite **n, e somente n, raízes**.

EXERCÍCIO DE AULA

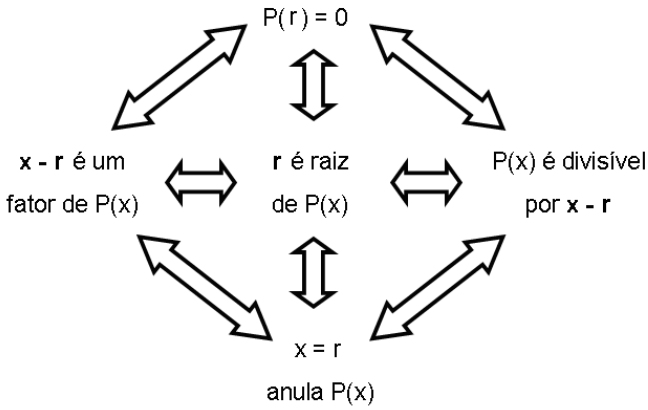
01) Determinar o polinômio P(x) do 3º grau cujas raízes são 0, -1, 2 e que P(1) = -24.

Multiplicidade de uma raiz

Chama-se **multiplicidade** de uma raiz, em uma equação, o número de vezes que seu fator correspondente aparece. Ou seja, se $\mathbf{(x - r)^n}$ é um fator de P(x) = 0, **r** é raiz de multiplicidade **n**.

Obs.: Uma raiz de multiplicidade 1 chama-se **raiz simples**, uma de multiplicidade 2, **raiz dupla**, e assim por diante.

Já conhecemos diversos fatos a respeito das raízes de um polinômio. O esquema abaixo destaca alguns deles:



Resolvendo equações polinomiais

Resolver equações de 1º grau é muito simples, assim como equações de 2º grau. Para equações de 3º e 4º grau existem fórmulas, porém de aplicação demasiadamente trabalhosa. De 5º grau em diante, sabe-se, por contribuição do jovem matemático Evariste Galois, que não existe e que nunca existirá fórmulas algébricas para resolvê-las. Ou seja, a resolução de equações é complicada mesmo tendo *toda* a Matemática à nossa disposição, recorrendo na maior parte das vezes à ajuda de computadores. Com isso, a estratégia para resolução de equações utilizando somente conceitos de Ensino Médio é muito limitada. No entanto, é o que nos resta! Ela depende de um teorema simples de se entender: o produto das raízes de um polinômio.

Lembre que o mesmo polinômio pode ser escrito de dois modos: $P(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+...+a_1\cdot x+a_0$ e $P(x)=a_n\cdot(x-r_1)\cdot(x-r_2)\cdot...\cdot(x-r_n)$. Lembre também que o termo independente a_0 de um polinômio pode ser calculado por $P(0)$.

Substituindo x = 0 na forma fatorada, irá resultar em:

$$P(0)=a_n\cdot(0-r_1)\cdot(0-r_2)\cdot...\cdot(0-r_n)$$
$$a_0=a_n\cdot(-r_1)\cdot(-r_2)\cdot...\cdot(-r_n)$$
$$\underbrace{\boxed{a_0}}_{\text{Termo Independente}}=\underbrace{\boxed{a_n}}_{\text{Coeficiente Líder}}\cdot(-1)^n\cdot\underbrace{r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdot...\cdot r_n}_{\text{Produto das Raízes}}$$

Se as raízes e os coeficientes de P(x) forem números inteiros, o produto dessas raízes e o termo independente também serão. Como o produto das raízes está relacionado ao termo independente pela igualdade $a_0=a_n\cdot(-1)^n\cdot r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdot...\cdot r_n$, podemos afirmar que as raízes inteiras serão divisores do termo independente. Assim, temos o seguinte recurso:

Para polinômios com **coeficientes inteiros**, temos a seguinte propriedade: **se tal polinômio tiver raízes inteiras, elas serão divisores do termo independente**. Assim, temos boas opções para descobrir as raízes de polinômios de grau igual ou maior que 3. Após descobrir uma ou mais raízes, fatoramos o polinômio com o algoritmo de Briot-Ruffini.

EXERCÍCIOS DE AULA

02) Resolver as equações abaixo:

a) $x^3 - 4x = 0$

Sempre que o termo independente for nulo, 0 é uma das raízes.

b) $x^7-3x^6+4x^5-2x^4=0$

c) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

03) Fatorar $P(x) = 2x^4 - 10x^3 + 18x^2 - 14x + 4$.

Produto e Soma das raízes de um Polinômio

O método de resolução de equações aqui empregado partiu de uma relação do termo independente com o produto das raízes: $a_0 = a_n \cdot (-1)^n \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_n$. Ou seja,

$$\frac{\overset{\text{TERMO INDEPENDENTE}}{a_0}}{\underset{\text{COEFICIENTE LÍDER}}{a_n}} = \underbrace{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot ... \cdot r_n}_{\text{PRODUTO DAS RAÍZES}} \cdot \boxed{(-1)^n} \begin{cases} GRAU\ \ PAR = 1 \\ GRAU\ \ ÍMPAR = -1 \end{cases}.$$

Assim, se P(x) for de grau ímpar (ou seja, n ímpar), o **produto das raízes** é dado por $-\dfrac{\textbf{TERMO INDEPENDENTE}}{\textbf{COEFICIENTE LÍDER}}$.

Se o grau for par, o **produto** vale $\dfrac{\textbf{TERMO INDEPENDENTE}}{\textbf{COEFICIENTE LÍDER}}$.

Ainda, a **soma** das raízes é sempre igual à $-\dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = -\dfrac{\textbf{"SEGUNDO" COEFICIENTE}}{\textbf{COEFICIENTE LÍDER}}$, onde b é o coeficiente do termo de potência imediatamente seguinte ao grau de P(x).

Raízes Complexas

Se um número imaginário **z = a + bi** for raiz de uma equação polinomial com *coeficientes reais*, então seu conjugado $\mathbf{\bar{z} = a - bi}$ também é raiz dessa equação.

Observações:

1) Se z for raiz de uma dada equação, $\bar{z}$ sempre terá a mesma multiplicidade de z.

2) O número de raízes imaginárias é sempre par, já que a dupla z, $\bar{z}$ sempre aparece junta;

3) Uma equação polinomial de grau ímpar sempre admite pelo menos uma raiz real, já que o número de raízes é ímpar e o número de raízes complexas é par.

EXERCÍCIOS DE AULA

04) Na equação $x^3 - mx^2 + 7x - 3 = 0$, uma das raízes é o inverso de outra. Calcule o valor de **m**.

05) Resolver a equação $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$, sabendo que $1 + i$ é uma das raízes.

06) Se -2, 3 e i são raízes de P(x), seu grau é:

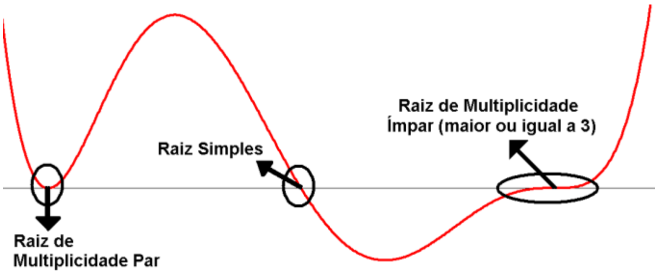
a) igual a 2.
b) igual a 3.
c) igual a 4.
d) menor ou igual a 4.
e) maior ou igual a 4.

GRÁFICOS DE POLINÔMIOS

Para esboçarmos o gráfico de um polinômio, precisamos considerar três elementos: as raízes e suas multiplicidades, o termo independente do polinômio e o sinal do coeficiente líder.

Raízes

Encontrar as raízes é fundamental para esboçarmos o gráfico, e aprendemos a fazer isso resolvendo as equações polinomiais. Os mesmos métodos serão empregados aqui. A raiz de um polinômio indica o valor onde P(x) = 0. Graficamente**, é o valor de x onde o gráfico toca o eixo das abscissas**. Esse “toque” acontecerá de três modos, dependendo da multiplicidade da raiz:



Repare que quando a **multiplicidade da raiz é par o gráfico tangencia o eixo X**. De fato, seja $(x-r)^{PAR}$. Essa expressão é nula somente para x = r. Para qualquer outro valor de $x \neq r$ tem-se que $(x-r)^{PAR}$ é positivo. Ou seja, não existe valor de x tal que $(x-r)^{PAR}$ assuma um valor negativo.

Por outro lado, quando a **multiplicidade da raiz é ímpar o gráfico cruza o eixo X**, pois $(x-r)^{ÍMPAR}$ é positivo para x > r, zero para x = r e negativo para x < r. Ou seja, há troca de sinal, e o gráfico estará ora acima, ora abaixo do eixo X. Quanto maior for a potência ímpar, o gráfico se aproxima “mais lentamente” do eixo X; quando a potência for ímpar for igual a 1 (e a raiz for simples), o gráfico simplesmente cruza o eixo horizontal sem esboçar uma aproximação.

ATENÇÃO: As raízes complexas **nunca** aparecem no gráfico, pois o eixo cartesiano onde os gráficos são esboçados comporta somente números reais.

Termo Independente

Graficamente, **o termo independente é o <u>único</u> valor de y onde o gráfico corta o eixo das ordenadas**.

Se o polinômio não está na forma decomposta, o termo independente é facilmente localizado, pois é o único que não está associado à x.

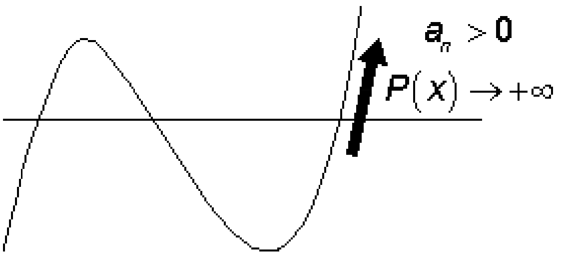
Se o polinômio está na forma decomposta, pode ser calculado por P(0).

Sinal do Coeficiente Líder

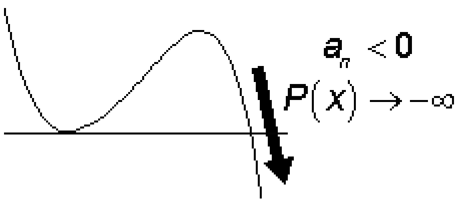
Os **únicos** pontos onde o gráfico de P(x) intercepta (cruzando ou não) o eixo X são as raízes desse polinômio. Assim, para valores de x *maiores que a maior raiz*, o gráfico de P(x) irá se manter sempre positivo ou sempre negativo. Assim, nos interessa descobrir o comportamento do gráfico quando os valores de x tendem ao infinito - ou seja, aumentam cada vez mais.

Esse comportamento é determinado pelo termo de maior grau de $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Se x é positivo, x^n também será. Assim, o sinal de $a_n x^n$ depende somente do sinal do coeficiente líder a_n :

Se $a_n > 0$, $a_n x^n$ será positivo e **o gráfico de P(x) tenderá a infinito** quando x tender a infinito.



Se $a_n < 0$, $a_n x^n$ será negativo e **o gráfico de P(x) tenderá a menos infinito** quando x tender a infinito.



EXERCÍCIOS DE AULA

07) Esboçar o gráfico de P(x) = (1 - x)(x - 3)²(x +1)²

08) Resolver a inequação 2x³ - 9x² + 13x - 6 > 0.

09) Qual o polinômio de 3º grau possui o gráfico abaixo?