

## Calissons

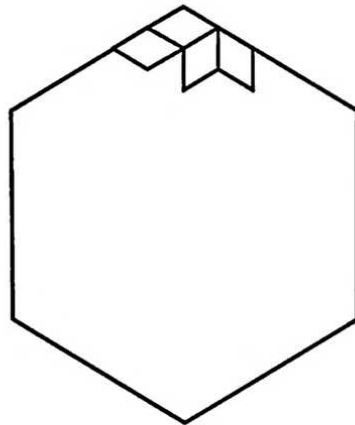
### Problème du calisson

Considérons un calisson comme 2 triangles équilatéraux collés par un côté. Si on range les calissons de côté 1 dans une boîte hexagonale de côté  $n$ , il y a 3 orientations possibles.

Montrer qu'il y a autant de calissons dans chacune des orientations.

### The Problem of the Calissons

A *calisson* is a French sweet that looks like two equilateral triangles meeting along an edge. Calissons could come in a box shaped like a regular hexagon, and their packing would suggest an interesting combinatorial problem. Suppose a box with side of length  $n$  is filled with sweets of length 1. The short diagonal of each calisson in the box is parallel to a pair of sides of the box.

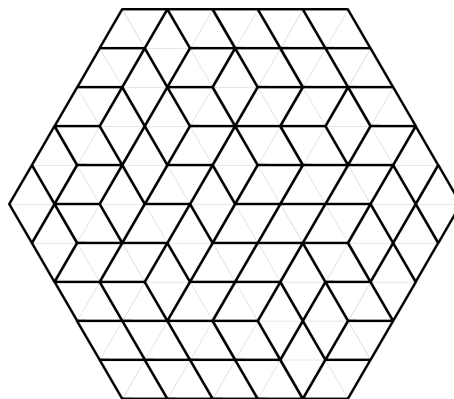


Suppose a box with side of length  $n$  is filled with sweets of length 1. The short diagonal of each calisson in the box is parallel to a pair of sides of the box.

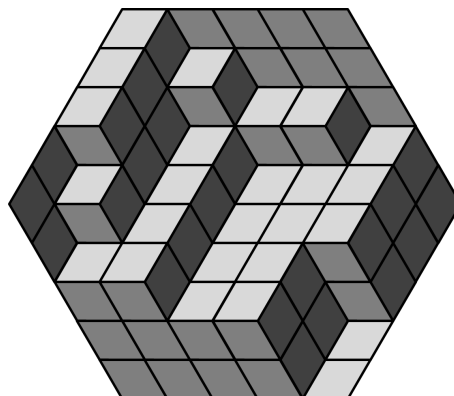
We refer to these three possibilities by saying that a calisson admits three distinct orientations.

**THEOREM:** *In any packing, the number of calissons with a given orientation is one-third of the total number of calissons in the box.*

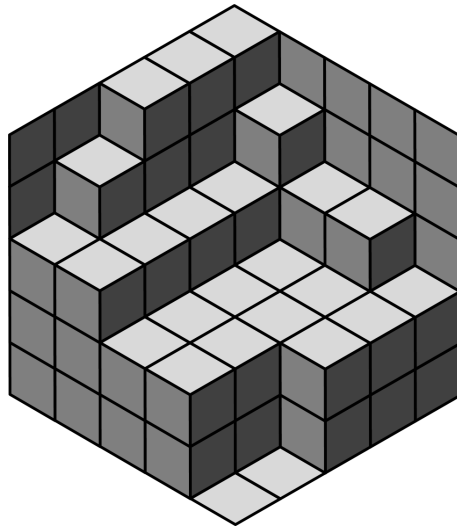
Par exemple, un arrangement possible des calissons dans une boîte hexagonale.



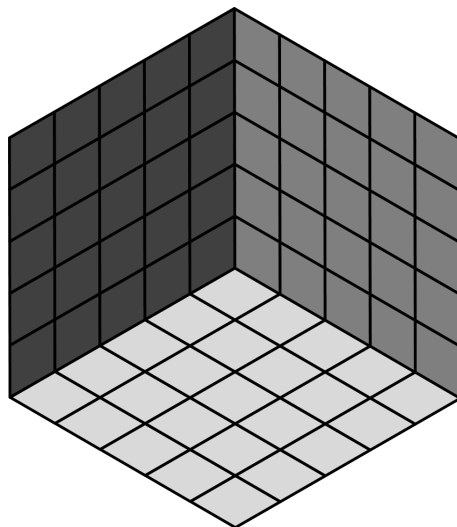
Si je colore les calissons selon leur orientation, on peut s'amuser à compter que, effectivement, il en a bien autant de chaque couleur.



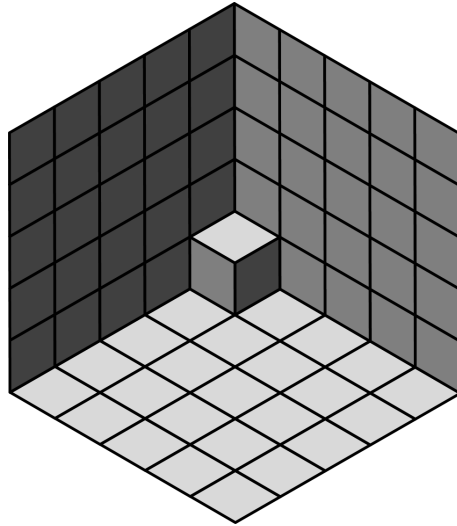
Et là commencent la beauté du raisonnement : si je fais quelques rotations de cette figure, je peux distinguer que c'est équivalent à un tas de cubes, qu'on aurait posé dans un coin de pièce totalement carrelée avec des carrés.



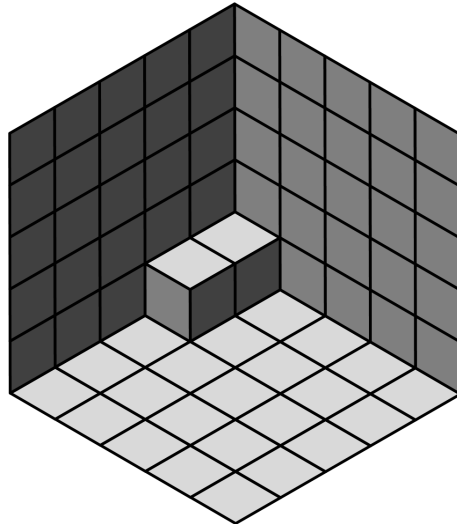
Pour vous expliquer la manœuvre : initialement, la pièce est vide, on peut se convaincre qu'il y a autant de chaque couleur. Selon votre vision de la 3D, vous pouvez avoir l'impression de voir un cube en creux ou un cube en plein.



Si j'ajoute un cube dans le coin de la salle, on ne change pas la proportion de faces dans les différentes orientations. Si je prend le raisonnement avec le sol : j'ai recouvert un carré du carrelage, mais la face supérieure du cube la compense.



Et si je continue de remplir ma salle en partant du fond, je recouvre à chaque fois 3 faces (et une de chaque couleur) avec mon nouveau cube, mais je fais apparaître 3 nouvelles faces (et c'est une de chaque couleur également)



Conclusion : peu importe votre arrangement de calissons dans la boîte hexagonale, il y en aura autant dans chaque orientation. La jolie démonstration que voilà.