Groepentheorie&Vectorruimte

www.karelappeltans.be

March 24, 2024

Groepentheorie

1 Voorbeelden, Eindige groepen

1.1 Symmetrieën van een rechthoek

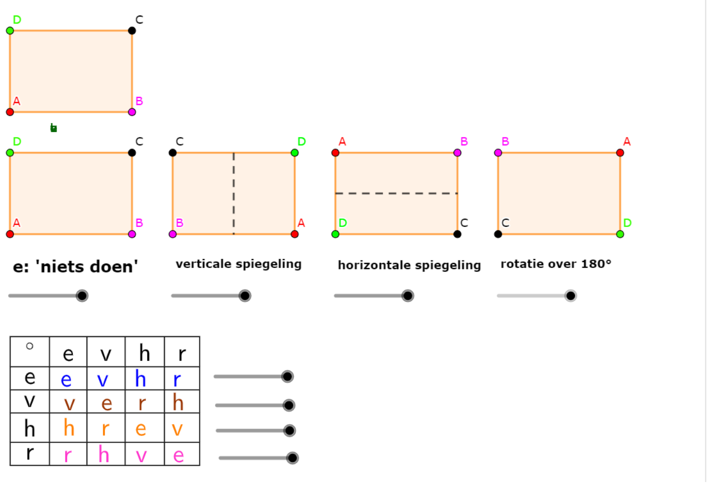


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/gkhrjwkh

1.2 modulorekenen

De bewerking * is gedefinieerd als volgt: $a * b = a + b + 4 mod 6$ Vul de Caleytabel aan.

$*$	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

1.3 2x2-matrices

Zij $M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ Stel de Caleytabel op voor $M, \cdot$

2 Definitie

2.1 definitie

Definitie van een groep

Een verzameling G voorzien van een bewerking * noteren we als (G,*) of G,*
(en soms ook gewoon als G, als de bewerking duidelijk is)

(G,*) is een groep wanneer voldaan is aan de groepsaxioma's

- Geslotenheid $\forall a, b \in G : a * b \in G$
- Associativiteit $\forall\ a,\ b,\ c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$
- Neutraal element $\exists\ e \in G$ zodat $\forall\ a \in G :\ a * e = a = e * a$
- Invers element $\forall a \in G, \exists\ a^{-1} \in g :\ a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$

Figure 2: https://www.geogebra.org/m/yct5hdkg

2.2 Voorbeelden

Ga na dat de gegeven voorbeelden voorbeelden van een groep zijn.

3 Eigenschappen van een groep

3.1 Orde

Het aantal elementen in een groep G noemen we de orde van de groep en we noteren dit met $\#G$ of $ord(G)$.
De orde van het element a in een groep met bewerking * is het kleinste getal n zodat $a^n = \underbrace{a * a * a \cdots a}_{n\ keer} = e$ en we noteren dit met ord(a). De orde van het identiteitselement e is dus altijd gelijk aan 1.

3.2 Eigenschappen

Eigenschappen groepen

1) In een groep (G,*) bestaat exact één neutraal element

2) Een element in een groep (G,*) heeft exact één invers element

3)$\forall x, y \in G$: $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

4)$\forall x \in G$: $(x^{-1})^{-1} = x$

5) Abelse groep

Figure 3: https://www.geogebra.org/f/vrg2ppwqma

3.3 Deelgroepen

3.3.1 Definitie

Stel dat (G,*) een groep is. Als H een niet-lege deelverzameling is van de verzameling G en (H,*) is een groep, dan noemen we (H,*) een deelgroep van (G,*).

3.3.2 eigenschappen

1. Het neutraal element van $(G, *)$ is steeds ook het neutraal element van (H,*)

2. Het inverse element van $x \in G$ is ook het inverse element van $x \in H$
3. Iedere groep G heeft al zeker 2 deelgroepen, namelijk e en G zelf.
4. Voor iedere deelgroep H van een eindige groep G geldt: $\#H$ deelt $\#G$ (stelling van Lagrange)

Twee voorwaarden zijn voldoende opdat een $(H, *)$ een deelgroep is van (G,*):

1. $a * b \in H$,voor alle $a, b \in H$
2. $a^{-1} \in H$,voor alle $a \in H$, (deelgroepcriterium)

3.3.3 Oefening

Bepaal al de deelgroepen van $(D_3,)$

4 Oefeningen

1. Ga na dat $V, +$, de verzameling van alle vectoren in het vlak voorzien van de optelling een groep is. Dit is een voorbeeld van een oneindige groep

Figure 4: https://www.geogebra.org/m/x5n9emc3

2. symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek

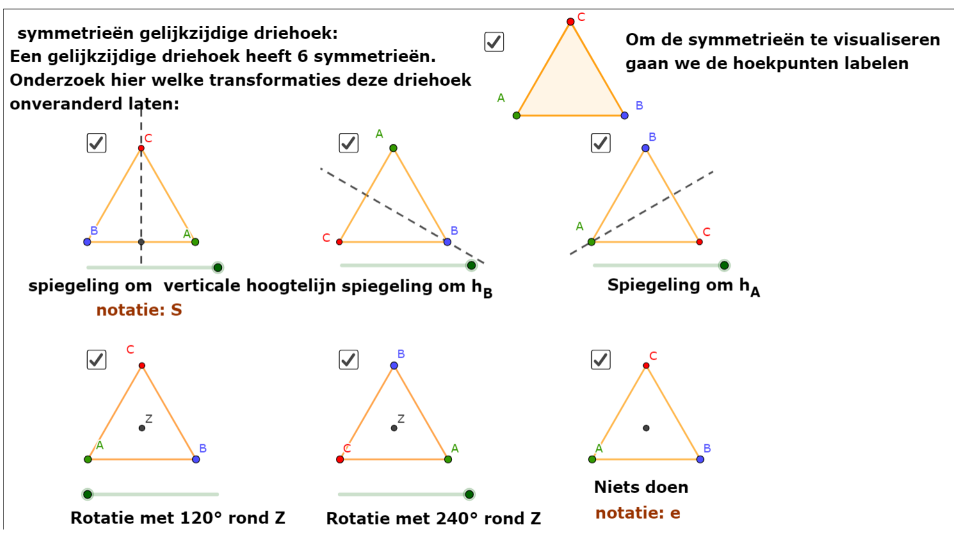


Figure 5: https://www.geogebra.org/m/qy4jbdnk

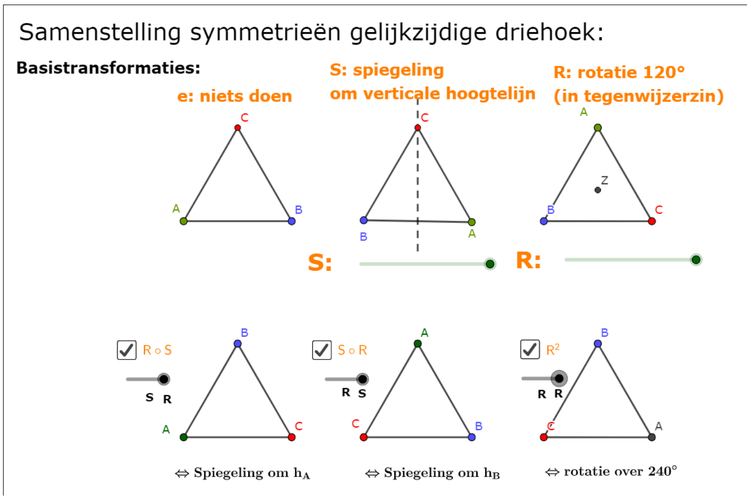


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/qy4jbdnk

$\circ$	e	R	R^2	S	RS	SR
e	e	R	R^2	S	RS	SR
R	R	R^2	e	RS	SR	S
R^2	R^2	e	R	SR	S	RS
S	S	SR	RS	e	R^2	R
RS	RS	S	SR	R	e	R^2
SR	SR	RS	S	R^2	R	e

Figure 7: https://www.geogebra.org/m/qy4jbdnk

Ga na dat $D_3, \circ$ een groep is.

3. Bepaal alle symmetrieën van een vierkant in functie van de 2 gegeven transformaties

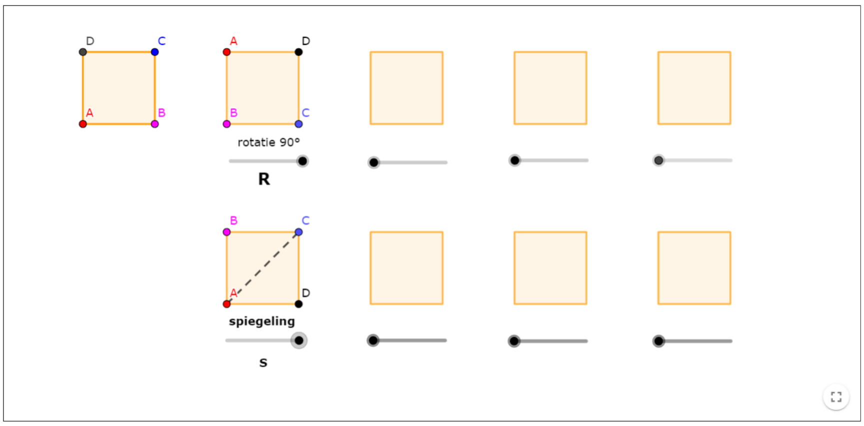


Figure 8: https://www.geogebra.org/m/fthabgvp

Toon aan , m.b.v. een Caleytabel dat $(D_4, \circ)$, de symmetrieën van een regelmatige vierhoek, een groep is.

4. Groep of niet?
   (a) $(\mathbb{Z}, +)$
   (b) $(\mathbb{Z}, \cdot)$
   (c) $(\mathbb{N}, +)$
   (d) $(\mathbb{Q}, \cdot)$

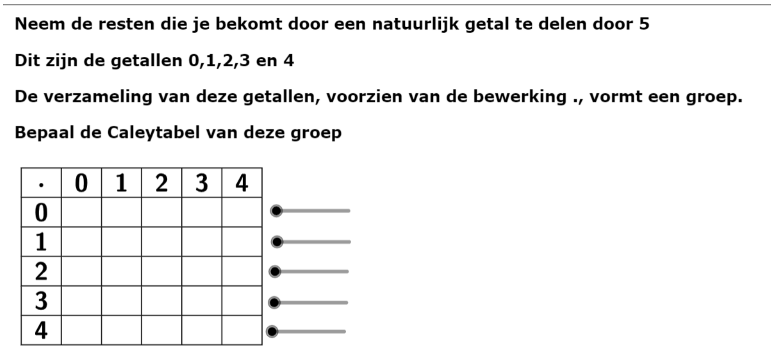
5. Vul onderstaande tabel in zodat de tabel een cayleytabel van een groep is.

$*$	a	b	c
a			
b			
c			a

6. Hieronder staat een caleytabel van een verzameling die bestaat uit 2 elementen namelijk de elementen EVEN (alle even getallen) en ONEVEN (alle oneven getallen). Is deze verzameling samen met de optelling een groep?

+	EVEN	ONEVEN
EVEN		
ONEVEN		

7. Rest bij deling van een natuurlijk getal door 5



Neem de resten die je bekomt door een natuurlijk getal te delen door 5

Dit zijn de getallen 0,1,2,3 en 4

De verzameling van deze getallen, voorzien van de bewerking ., vormt een groep.

Bepaal de Caleytabel van deze groep

·	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

Figure 9: https://www.geogebra.org/m/ugxz88ue

8. Ga na dat $G = \{0, 2, 4\}$ met als bewerking "optelling modulo 6" een groep is.

9. De bewerking * is wordt gedefinieerd dootr $x * y = x + y - xy$ met $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
   (a) Bepaal het neutraal (of eenheids)element
   (b) Bepaal in termen van x het invers element van x, m.a.w. bepaal x^{-1}

10. $\forall m, n \in \mathbb{Z}_0^+$ wordt volgende bewerking gedefinieerd $m \star n = |m - n|$. Ga na dat aan alle eigenschappen van een groep voldaan is, op associativiteit na.

11. Stel de caleytabel op van volgende deelgroep van de complexe getallen $\{1, -1, i, -i\}, \cdot$

12. Toon aan m.b.v. een caleytabel dat de verzameling $G = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}, \cdot$ voorzien met volgende bewerkingen $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ een groep vormt, de zogenaamde quaterionengroep

13. Bewijs de eigenschappen van een groep

Vectorruimte

5 vectorruimte

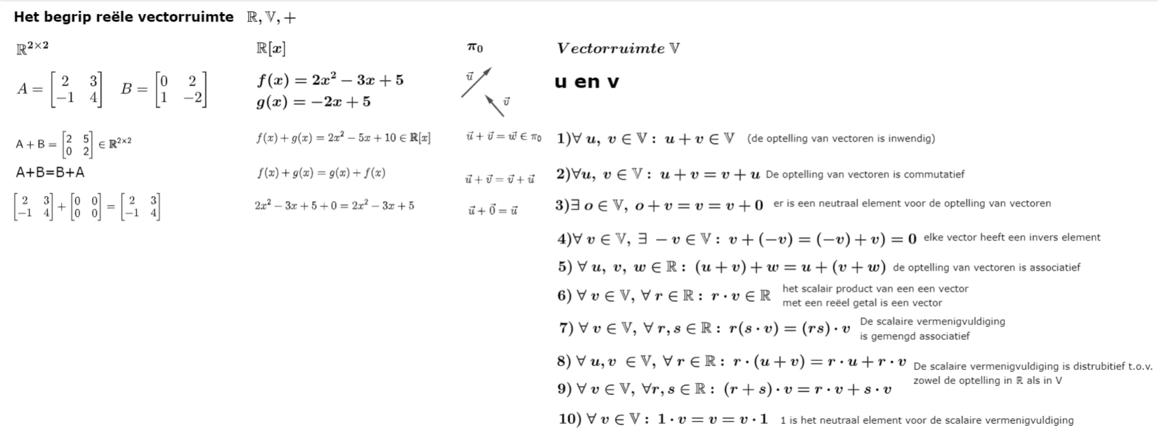


Figure 10: https://www.geogebra.org/m/fgsz7ma5