

Groepentheorie & Vectorruimte

www.karelappeltans.be

March 24, 2024

Groepentheorie

1 Voorbeelden, Eindige groepen

1.1 Symmetrieën van een rechthoek

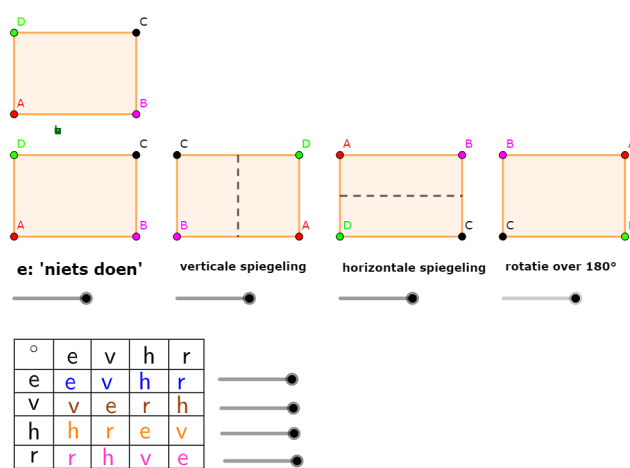


Figure 1: <https://www.geogebra.org/m/gkhrjwkh>

1.2 modularekenen

De bewerking $*$ is gedefinieerd als volgt: $a * b = a + b + 4 \pmod{6}$ Vul de Cayletabel aan.

*	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

1.3 2x2-matrices

Zij $M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ Stel de Cayletabel op voor M, \cdot

2 Definitie

2.1 definitie

Definitie van een groep

Een verzameling G voorzien van een bewerking $*$ noteren we als $(G, *)$ of $G, *$ (en soms ook gewoon als G , als de bewerking duidelijk is)

$(G, *)$ is een groep wanneer voldaan is aan de groepsaxioma's

- Geslotenheid $\forall a, b \in G : a * b \in G$
- Associativiteit $\forall a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$
- Neutraal element $\exists e \in G$ zodat $\forall a \in G : a * e = a = e * a$
- Invers element $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G : a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$

Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/yct5hdkg>

2.2 Voorbeelden

Ga na dat de gegeven voorbeelden voorbeelden van een groep zijn.

3 Eigenschappen van een groep

3.1 Orde

Het aantal elementen in een groep G noemen we de orde van de groep en we noteren dit met $\#G$ of $ord(G)$.

De orde van het element a in een groep met bewerking $*$ is het kleinste getal n zodat $a^n = \underbrace{a * a * a \dots a}_{n \text{ keer}} = e$ en we noteren dit met $ord(a)$. De orde van het identiteitselement e is dus altijd gelijk aan 1.

3.2 Eigenschappen

Eigenschappen groepen

1) In een groep $(G, *)$ bestaat exact één neutraal element

2) Een element in een groep $(G, *)$ heeft exact één invers element

3) $\forall x, y \in G : (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

4) $\forall x \in G : (x^{-1})^{-1} = x$

5) Abelse groep

Figure 3: <https://www.geogebra.org/f/vrg2ppwqma>

3.3 Deelgroepen

3.3.1 Definitie

Stel dat $(G, *)$ een groep is. Als H een niet-lege deelverzameling is van de verzameling G en $(H, *)$ is een groep, dan noemen we $(H, *)$ een deelgroep van $(G, *)$.

3.3.2 eigenschappen

1. Het neutraal element van $(G, *)$ is steeds ook het neutraal element van $(H, *)$

2. Het inverse element van $x \in G$ is ook het inverse element van $x \in H$
3. Iedere groep G heeft al zeker 2 deelgroepen, namelijk e en G zelf.
4. Voor iedere deelgroep H van een eindige groep G geldt: $\#H$ deelt $\#G$ (stelling van Lagrange)

Twee voorwaarden zijn voldoende opdat een $(H, *)$ een deelgroep is van $(G, *)$:

1. $a * b \in H$, voor alle $a, b \in H$
2. $a^{-1} \in H$, voor alle $a \in H$, (deelgroepcriterium)

3.3.3 Oefening

Bepaal al de deelgroepen van $(D_3,)$

4 Oefeningen

1. Ga na dat $V, +$, de verzameling van alle vectoren in het vlak voorzien van de optelling een groep is. Dit is een voorbeeld van een oneindige groep

The screenshot shows a Geogebra workspace with a vector diagram on the left and a list of properties on the right. The diagram illustrates the addition of two vectors \vec{u} and \vec{v} to find their sum $\vec{u} + \vec{v}$ using the triangle rule. The right panel is titled "V, +: verzameling van alle vectoren van het vlak voorzien van de optelling" and contains the following properties:

- geslotenheid $\vec{u} + \vec{v} \in V$
- associativiteit
- neutraal element
- invers element

Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/x5n9emc3>

2. symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek

The screenshot shows a Geogebra workspace with an equilateral triangle and its symmetries. The text reads: "symmetrieën gelijkzijdige driehoek: Een gelijkzijdige driehoek heeft 6 symmetrieën. Onderzoek hier welke transformaties deze driehoek onveranderd laten:". The symmetries shown are:

- Spiegeling om verticale hoogtelijn (notatie: S)
- spiegeling om h_B
- Spiegeling om h_A
- Rotatie met 120° rond Z
- Rotatie met 240° rond Z
- Niets doen (notatie: e)

Each symmetry is accompanied by a diagram of the triangle and a checkmark indicating it is a symmetry.

Figure 5: <https://www.geogebra.org/m/gy4jbdnk>

Samenstelling symmetrieën gelijkzijdige driehoek:

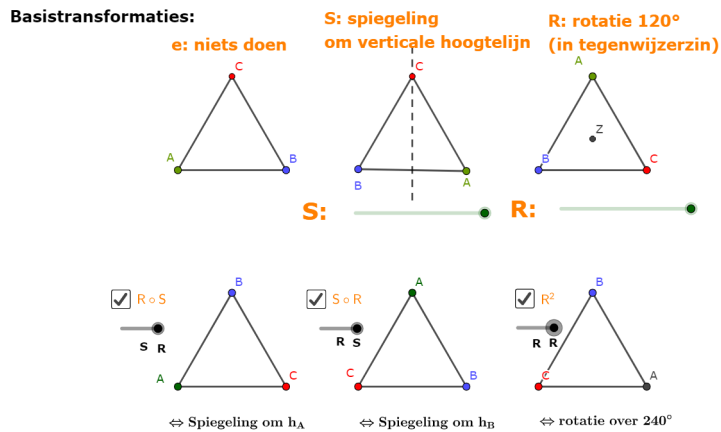


Figure 6: <https://www.geogebra.org/m/qy4jbdnk>

\circ	e	R	R^2	S	RS	SR	
e	e	R	R^2	S	RS	SR	_____●
R	R	R^2	e	RS	SR	S	_____●
R^2	R^2	e	R	SR	S	RS	_____●
S	S	SR	RS	e	R^2	R	_____●
RS	RS	S	SR	R	e	R^2	_____●
SR	SR	RS	S	R^2	R	e	_____●

Figure 7: <https://www.geogebra.org/m/qy4jbdnk>

Ga na dat D_3, \circ een groep is.

3. Bepaal alle symmetrieën van een vierkant in functie van de 2 gegeven transformaties

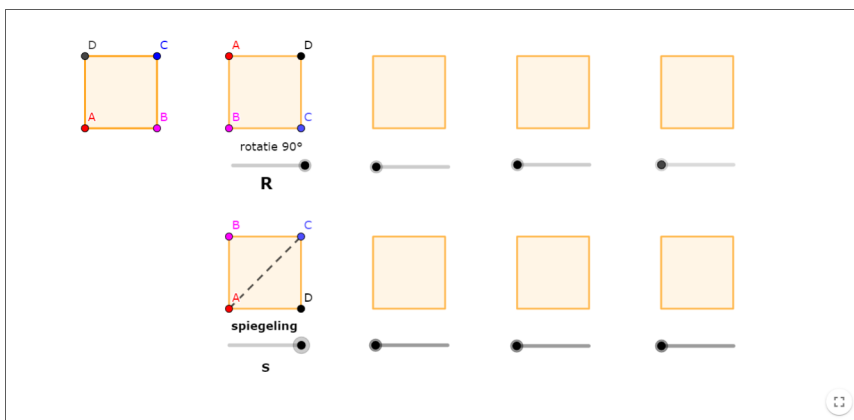


Figure 8: <https://www.geogebra.org/m/fthabgvp>

Toon aan, m.b.v. een Cayleytabel dat (D_4, \circ) , de symmetrieën van een regelmatige vierhoek, een groep is.

4. Groep of niet?

- (a) $(\mathbb{Z}, +)$
- (b) (\mathbb{Z}, \cdot)
- (c) $(\mathbb{N}, +)$
- (d) (\mathbb{Q}, \cdot)

5. Vul onderstaande tabel in zodat de tabel een cayleytabel van een groep is.

*	a	b	c
a			
b			
c			a

6. Hieronder staat een caleytabel van een verzameling die bestaat uit 2 elementen namelijk de elementen EVEN (alle even getallen) en ONEVEN (alle oneven getallen). Is deze verzameling samen met de optelling een groep?

+	EVEN	ONEVEN
EVEN		
ONEVEN		

7. Rest bij deling van een natuurlijk getal door 5

Neem de resten die je bekomt door een natuurlijk getal te delen door 5
Dit zijn de getallen 0,1,2,3 en 4
De verzameling van deze getallen, voorzien van de bewerking \cdot , vormt een groep.
Bepaal de Cayleytabel van deze groep

\cdot	0	1	2	3	4	
0						● —
1						● —
2						● —
3						● —
4						● —

Figure 9: <https://www.geogebra.org/m/ugxz88ue>

- 8. Ga na dat $G = \{0, 2, 4\}$ met als bewerking "optelling modulo 6" een groep is.
- 9. De bewerking $*$ is wordt gedefinieerd dootr $x * y = x + y - xy$ met $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
 - (a) Bepaal het neutraal (of eenheids)element
 - (b) Bepaal in termen van x het invers element van x, m.a.w. bepaal x^{-1}
- 10. $\forall m, n \in \mathbb{Z}_0^+$ wordt volgende bewerking gedefinieerd $m * n = |m - n|$. Ga na dat aan alle eigenschappen van een groep voldaan is, op associativiteit na.
- 11. Stel de caleytabel op van volgende deelgroep van de complexe getallen $\{1, -1, i, -i\}, \cdot$
- 12. Toon aan m.b.v. een caleytabel dat de verzameling $G = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}, \cdot$ voorzien met volgende bewerkingen $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ een groep vormt, de zogenaamde quaterionengroep
- 13. Bewijs de eigenschappen van een groep

Vectorruimte

5 vectorruimte


Het begrip reële vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbb{V}, +$		
$\mathbb{R}^{2 \times 2}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ A+B=B+A $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$	$\mathbb{R}[x]$ $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ $g(x) = -2x + 5$ $f(x) + g(x) = 2x^2 - 5x + 10 \in \mathbb{R}[x]$ $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ $2x^2 - 3x + 5 + 0 = 2x^2 - 3x + 5$	π_0  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \in \pi_0$ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
		Vectorruimte \mathbb{V} u en v 1) $\forall u, v \in \mathbb{V} : u + v \in \mathbb{V}$ (de optelling van vectoren is inwendig) 2) $\forall u, v \in \mathbb{V} : u + v = v + u$ De optelling van vectoren is commutatief 3) $\exists o \in \mathbb{V} : o + v = v = v + o$ er is een neutraal element voor de optelling van vectoren 4) $\forall v \in \mathbb{V} : \exists -v \in \mathbb{V} : v + (-v) = (-v) + v = \mathbf{0}$ elke vector heeft een invers element 5) $\forall u, v, w \in \mathbb{R} : (u + v) + w = u + (v + w)$ de optelling van vectoren is associatief 6) $\forall v \in \mathbb{V}, \forall r \in \mathbb{R} : r \cdot v \in \mathbb{V}$ het scalair product van een vector met een reeel getal is een vector 7) $\forall v \in \mathbb{V}, \forall r, s \in \mathbb{R} : r(s \cdot v) = (rs) \cdot v$ De scalaire vermenigvuldiging is gemengd associatief 8) $\forall u, v \in \mathbb{V}, \forall r \in \mathbb{R} : r \cdot (u + v) = r \cdot u + r \cdot v$ De scalaire vermenigvuldiging is distributief t.o.v. zowel de optelling in \mathbb{R} als in \mathbb{V} 9) $\forall v \in \mathbb{V}, \forall r, s \in \mathbb{R} : (r + s) \cdot v = r \cdot v + s \cdot v$ 10) $\forall v \in \mathbb{V} : \mathbf{1} \cdot v = v = v \cdot \mathbf{1}$ 1 is het neutraal element voor de scalaire vermenigvuldiging

Figure 10: <https://www.geogebra.org/m/fgsz7ma5>