

2.6 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน

ในหัวข้อนี้ จะกำหนดเงื่อนไขให้รูปสามเหลี่ยมสองรูป มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน ดังกิจกรรมต่อไปนี้

A | กิจกรรม : สำรวจ มุม-มุม-ด้าน

อุปกรณ์

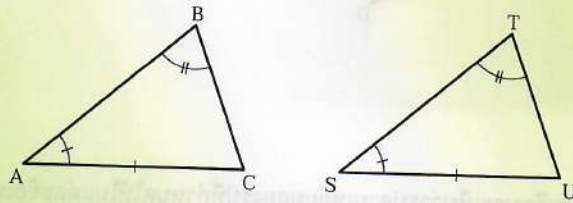
- ✦ โพรแทรกเตอร์
- ✦ ไม้บรรทัด
- ✦ ดินสอ
- ✦ กระดาษลอกลาย



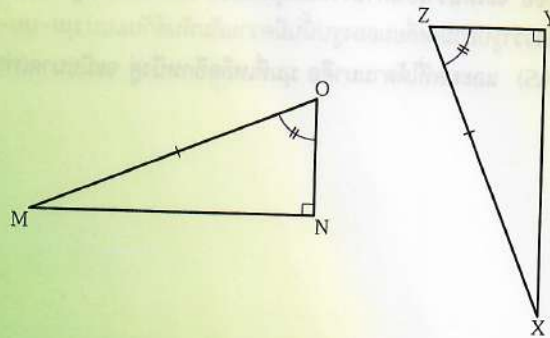
ขั้นตอนการทำกิจกรรม

กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อต่อไปนี้ มีมุมที่มีขนาดเท่ากัน 2 คู่ และมีด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากัน 1 คู่ จงสำรวจว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปดังกล่าวเท่ากันทุกประการหรือไม่

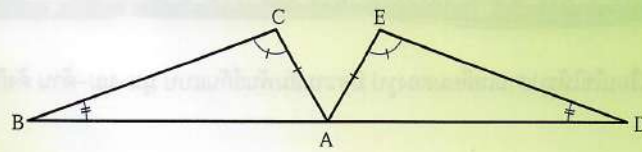
1.



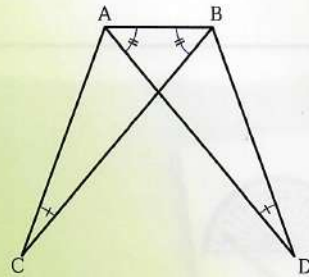
2.



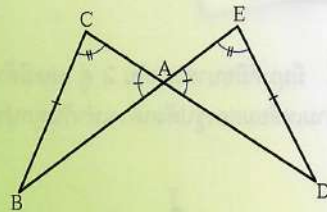
3.



4.



5.



ผลจากการสำรวจข้างต้น นักเรียนจะเห็นว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้ในแต่ละข้อเท่ากันทุกประการ และเมื่อพิจารณาจากรูปที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ จะเห็นว่าเป็นการกำหนดมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันหนึ่งคู่ ซึ่งกล่าวว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน (Angle-Angle-Side) หรือเขียนย่อ ๆ ว่า **ม.ม.ด. (AAS)** และผลที่ได้ตามมาคือ มุมที่เหลืออีกหนึ่งคู่ จะมีขนาดเท่ากัน และด้านที่เหลืออีกสองคู่ จะยาวเท่ากันเป็นคู่ ๆ

โดยทั่วไป รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ม.ม.ด. จะเท่ากันทุกประการ ซึ่งเป็นไปตามสมบัติต่อไปนี้

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน (ม.ม.ด.) กล่าวคือ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันหนึ่งคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ



ข้าวก่องจ๊ะ จากหัวข้อ 2.4 ที่เรารู้แล้วว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม จะเท่ากันทุกประการ และจากกิจกรรมข้างต้น รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน จะเท่ากันทุกประการ เหมือนกัน ทำให้เราได้ว่า ด้านคู่ที่ยาวเท่ากันนั้น จะเป็นด้านคู่ใดก็ได้ ไม่จำเป็นต้องเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสอง แต่ต้องเป็นด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันนะ

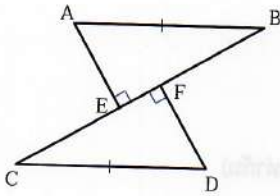
ใช้จะข้าวสวย



ชวนคิด 2.9

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และมีด้านยาวเท่ากันหนึ่งคู่ จะสามารถสรุปได้หรือไม่ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ตัวอย่างที่ 1



จากรูป กำหนดให้ $\triangle ABE$ และ $\triangle DCF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี \hat{AEB} และ \hat{DFC} เป็นมุมฉาก $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ และ $AB = DC$ จงพิสูจน์ว่า $AE = DF$

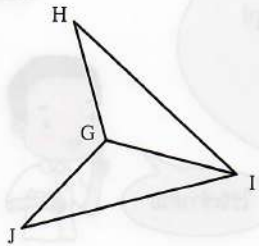
กำหนดให้ $\triangle ABE$ และ $\triangle DCF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
 $\hat{AEB} = \hat{DFC} = 90^\circ$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ และ $AB = DC$

ต้องการพิสูจน์ว่า $AE = DF$

จะพิสูจน์ก่อนว่า
 $\triangle ABE \cong \triangle DCF$

พิสูจน์ พิจารณา $\triangle ABE$ และ $\triangle DCF$
 เนื่องจาก $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (กำหนดให้)
 จะได้ $\hat{A}BE = \hat{D}CF$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)
 $\hat{A}EB = \hat{D}FC$ (กำหนดให้)
 $AB = DC$ (กำหนดให้)
 ดังนั้น $\triangle ABE \cong \triangle DCF$ (ม.ม.ด.)
 จะได้ $AE = DF$ (ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)

ตัวอย่างที่ 2



จากรูปที่กำหนดให้ มี $\hat{H}GI = \hat{J}GI$, $\hat{I}HG = \hat{I}JG$
 ถ้า $HI = 95$ หน่วย $GI = 58$ หน่วย
 และเส้นรอบรูปของ $\triangle GHI$ ยาว 205 หน่วย
 จงหาความยาวของ \overline{GJ}

จะแสดงก่อนว่า
 $\triangle GHI \cong \triangle GJI$

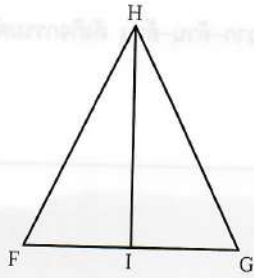
วิธีทำ พิจารณา $\triangle GHI$ และ $\triangle GJI$
 $\hat{H}GI = \hat{J}GI$ (กำหนดให้)
 $\hat{I}HG = \hat{I}JG$ (กำหนดให้)
 $GI = GI$ (GI เป็นด้านร่วม)
 ดังนั้น $\triangle GHI \cong \triangle GJI$ (ม.ม.ด.)
 จะได้ $GH = GJ$ (ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)
 เนื่องจาก $HI = 95$ หน่วย (กำหนดให้)
 $GI = 58$ หน่วย (กำหนดให้)
 เส้นรอบรูปของ $\triangle GHI$ ยาว 205 หน่วย (กำหนดให้)
 จะได้ $GH = 205 - 95 - 58 = 52$ หน่วย
 ดังนั้น $GJ = 52$ หน่วย (สมบัติของการเท่ากัน)



ตอบ 52 หน่วย

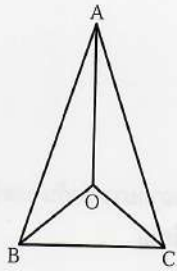
แบบฝึกหัด 2.6

1.



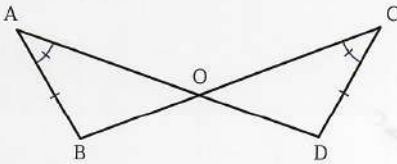
จากรูป $\triangle FGH$ เป็นรูปสามเหลี่ยม ที่มี $\overline{HF} = \overline{HG}$ และ \overline{HI} ตั้งฉากกับ \overline{FG} จงพิสูจน์ว่า $\triangle FHI \cong \triangle GHI$

2.



จากรูป กำหนดให้ $\triangle ABC$ มี $\widehat{OBA} = \widehat{OCA}$ และ $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$ จงพิสูจน์ว่า $OB = OC$

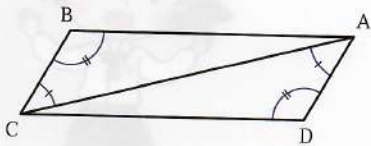
3.



จากรูป กำหนดให้ \overline{AD} ตัดกับ \overline{CB} ที่จุด O ถ้า $BO = 8$ หน่วย จงหาความยาวของ \overline{DO}

4. กำหนดให้ $\triangle PQR$ มี $PQ = PR$ จุด S เป็นจุดที่อยู่บน \overline{PQ} จุด T เป็นจุดที่อยู่บน \overline{PR} ซึ่งทำให้ \overline{QT} และ \overline{RS} ตั้งฉากกับ \overline{PR} และ \overline{PQ} ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $\triangle PQT \cong \triangle PRS$

5.



จากรูปที่กำหนดให้

- 1) จงพิสูจน์ว่า เส้นทแยงมุม AC แบ่งรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ
- 2) ถ้า $\widehat{CDA} = x^\circ$, $\widehat{DAC} = (2x - 214)^\circ$ และ $\widehat{BAC} = \left(\frac{x}{18} + 9\right)^\circ$ จงหาค่าของ x