Equações Logarítimicas

Michael Kennedy Silva dos Santos.

Fabio José Alves

Para resolver uma equação logarítmica, é necessário aplicar as propriedades do logaritmo, bem como as estratégias tradicionais de resolução de equações.

Uma **equação logarítmica** apresenta a incógnita na *base do logaritmo* ou no *logaritmando*. Lembrando que um **logaritmo** possui o seguinte formato:

$$\mathbf{\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b},$$

***a** é a base do logaritmo, **b** é o logaritmandoe **x** é o logaritmo.

Ao resolver equações logarítmicas, devemos ter ciência das propriedades operatórias dos logaritmos, pois elas podem facilitar o desenvolvimento dos cálculos. Há, até mesmo, algumas situações em que não é possível resolver a equação sem lançar mão dessas propriedades.

Para resolver equações logarítmicas, aplicamos os conceitos tradicionais de resolução de equações e de logaritmos até que a equação chegue a dois possíveis casos:

1º) Igualdade entre logaritmos de mesma base:

Se ao resolver uma equação logarítmica, chegarmos a uma situação de igualdade entre logaritmos de mesma base, basta igualar aos logaritmandos. Exemplo:

$$\mathbf{\log_a b = \log_a c \rightarrow b = c}$$

2º) Igualdade entre um logaritmo e um número real

Se a resolução de uma equação logarítmica resultar na igualdade de um logaritmo e um número real, basta aplicar a propriedade básica do logaritmo:

$$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$$

Veja alguns exemplos de equações logarítmicas:

1° Exemplo:

$$\log_2 (x + 1) = 2$$

Vamos testar a condição de existência desse logaritmo. Para tanto, o logaritmando deve ser maior do que zero:

$$x + 1 > 0$$
$$x > -1$$

Nesse caso, temos um exemplo do 2º caso, portanto, desenvolveremos o logaritmo da seguinte forma:

$$\log_2 (x + 1) = 2$$
$$2^2 = x + 1$$
$$x = 4 - 1$$
$$x = 3$$

2° Exemplo:

$$\log_5 (2x + 3) = \log_5 x$$

Testando as condições de existência, temos:

$$2x + 3 > 0$$
$$2x > -3$$

$$x > 0$$

$$x > -\,^{3}/_{2}$$

Nessa equação logarítmica, há um exemplo do 1º caso. Como há uma igualdade entre logaritmos de mesma base, devemos formar uma equação apenas com os logaritmandos:

$$\log_5 (2x + 3) = \log_5 x$$
$$2x + 3 = x$$
$$2x - x = -3$$
$$x = -3$$

3° Exemplo:

$$\log_3 (x + 2) - \log_3 (2x) = \log_3 5$$

Verificando as condições de existência, temos:

$$x + 2 > 0$$
$$x > -2$$

$$2x > 0$$
$$x > 0$$

Aplicando as propriedades do logaritmo, podemos escrever a subtração de logaritmos de mesma base como um quociente:

$$\log_3 (x + 2) - \log_3 (2x) = \log_3 5$$
$$\log_3 (x + 2) - \log_3 (2x) = \log_3 5$$
$$\log_3 \left(\frac{x + 2}{2x}\right) = \log_3 5$$

Chegamos a um exemplo do 1º caso, portanto devemos igualar os logaritmandos:

$$\frac{x + 2}{2x} = 5$$
$$x + 2 = 10x$$

$$9x = 2$$

$$x = {}^{2}/_{9}$$

4° exemplo:

$$\log_{x-1}(3x + 1) = 2$$

Ao verificar as condições de existência, devemos analisar também a base do logaritmo:

$$x - 1 > 0$$
$$x > 1$$

$$3x + 1 > 0$$
$$3x > -1$$
$$x > {}^{-1}/_{3}$$

Essa equação logarítmica pertence ao 2° caso. Resolvendo-a, temos:

$$\log_{x-1}(3x + 1) = 2$$
$$(x - 1)^2 = 3x + 1$$
$$x^2 - 2x + 1 = 3x + 1$$
$$x^2 - 5x = 0$$
$$x.(x - 5) = 0$$
$$x' = 0$$
$$x'' - 5 = 0$$
$$x'' = 5$$

Observe que pelas condições de existência (**$x > 1$**), a solução **$x' = 0$** não é possível. Portanto, a única solução para essa equação logarítmica é **$x'' = 5$**.

5° exemplo:

$$\log_3 \log_6 x = 0$$

Aplicando as condições de existência, temos que **$x > 0$** e **$\log_6 x > 0$**. Logo:

$$\log_3 (\log_6 x) = 0$$

$$3^0 = \log_6 x$$

$$\log_6 x = 1$$

$$6^1 = x$$

$$x = 6$$

Fonte: https://alunosonline.uol.com.br/matematica/equacao-logaritmica.html.