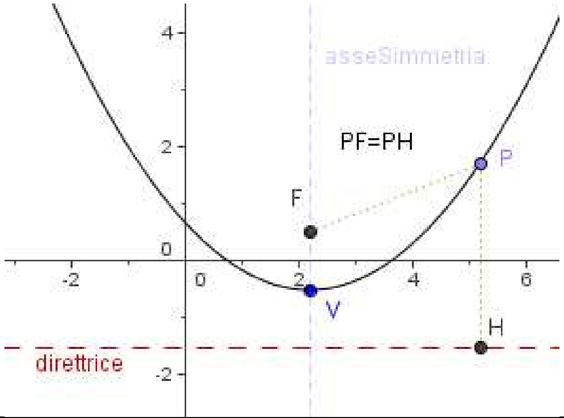
La parabola: note essenziali

Paolo Urbani – novembre 2010

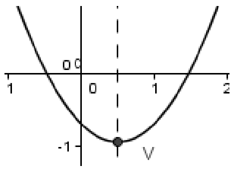
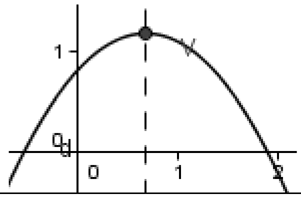
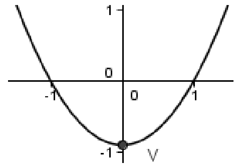
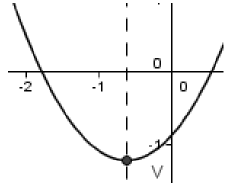
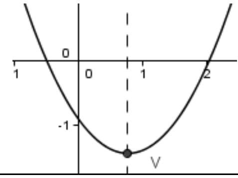
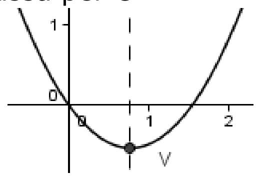
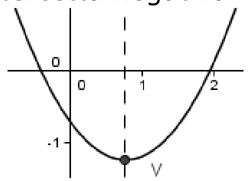
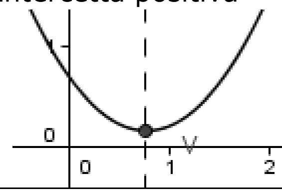
Definizione:
Luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice

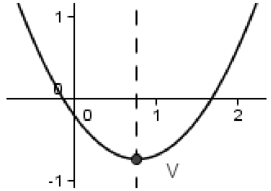
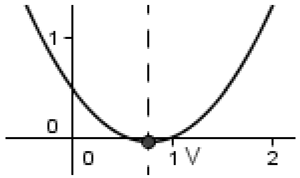
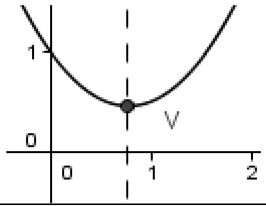
Caso esaminato:
Parabola con retta direttrice orizzontale e asse di simmetria verticale



Equazione generica	$y = ax^2 + bx + c$
Parametri	a, b, c
Vertice	$V\left(-\frac{b}{2a}; ax_V{}^2 + bx_V + x\right)$ dove x_V rappresenta l'ascissa del Vertice
Asse di simmetria	$x = -\frac{b}{2a}$

Legame fra il segno dei parametri a, b, c e il grafico della parabola

a ⇨ Verso della concavità $a \neq 0$	$a > 0$ ⇨Concavità verso l'alto  $a < 0$ ⇨Concavità verso il basso 
b ⇨ Posizione asse di simmetria $x = -\frac{b}{2a}$	$b = 0$  ⇨ $b \cdot a > 0$ (b concorde con a) asse di simmetria a sinistra dell'asse y  ⇨ $b \cdot a < 0$ (b discorde da a) asse di simmetria a destra dell'asse y 
c ⇨ Intercetta asse y	$c = 0$ Passa per O  $c < 0$ Intercetta negativa  $c > 0$ Intercetta positiva 

$\Delta = b^2 - 4ac$ ⇨ numero di intersezioni con asse x	$\Delta > 0$ ⇨ due intersezioni  $\Delta = 0$ ⇨ 1 intersezione  $\Delta < 0$ ⇨ 0 intersezioni 

Rappresentazione grafica della parabola
Elementi necessari:
⇨ Vertice
⇨ Intersezioni assi
- Asse y ⇨ $P(0;c)$
- Asse x (eventuali) ⇨ $ax^2 + bx + c = 0$

⇨ Altri punti calcolati assegnando alla x valori a piacere $\begin{matrix} x & y \\ \dots & \dots \end{matrix}$

Problemi parabola

Calcolo dell'equazione della parabola; servono 3 informazioni, tante quanti sono i parametri a, b, c.

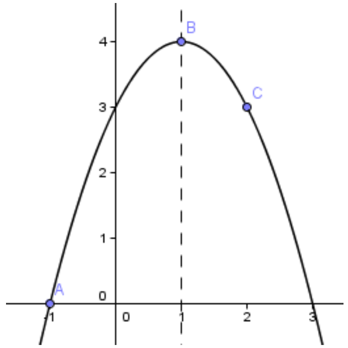
⇨ **Tre punti di passaggio non allineati**: vanno messe a sistema le condizioni di passaggio[1] per ciascun punto

Esempio: A(-1;0), B(1;4), C(2;3)

$$\begin{cases} 0 = a - b + c \\ 4 = a + b + c \\ 3 = 4a + 2b + c \end{cases}$$ ⇨differenza fra le prime 2 equazioni $-4 = -2b$ ⇨ $b = 2$

⇨ si sostituisce $b = 2$ alla prima e terza equazione $\begin{cases} 0 = a - 2 + c \\ 3 = 4a + 4 + c \end{cases}$

⇨differenza fra equazioni
$-3 = -3a - 6$ ⇨ $a = -1$ ⇨ $c = 3$ ⇨ $y = -x^2 + 2x + 3$

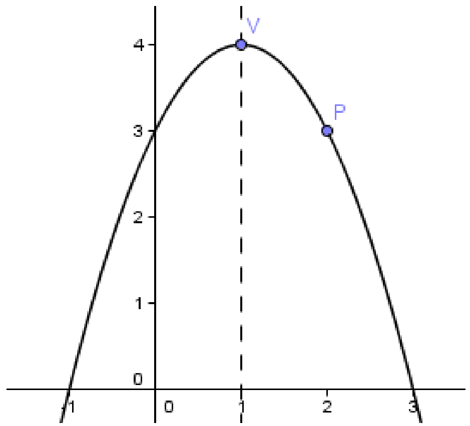


⇨ **Vertice e un punto di passaggio**: si possono seguire due procedimenti.
Procedimento 1: vanno messi a sistema:

$$\begin{cases} \text{ascissa di V} \\ \text{passaggio per V} \\ \text{passaggio per Punto} \end{cases}$$

Esempio: V(1;4), P(2;3)

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ 4 = a + b + c \\ 3 = 4a + 2b + c \end{cases}$$ ⇨ $y = -x^2 + 2x + 3$



[1] Condizione di passaggio: si sostituiscono le coordinate del punto nell'equazione generica della parabola

Procedimento 2: uso della formula $y - y_V = a \cdot (x - x_V)^2$ ⇨fascio di parabole di vertice $V(x_V ; y_V)$
Esempio: V(1;4), P(2;3)
$y - 4 = a \cdot (x-1)^2$ ⇨per il calcolo di a impongo il passaggio per P
$3 - 4 = a \cdot (2-1)^2$ ⇨ $a = -1$ …

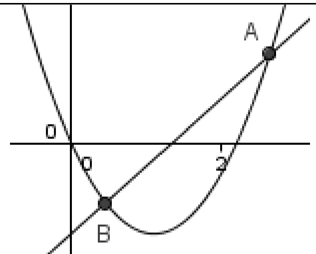
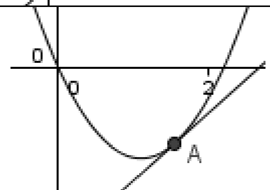
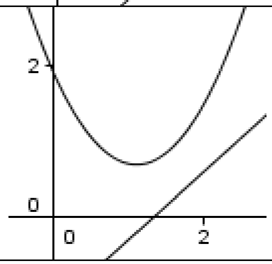
Intersezioni fra retta e parabola

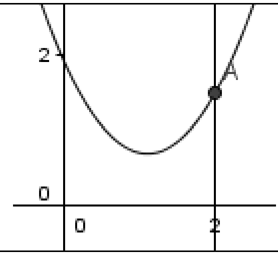
Si calcolano mettendo a sistema le equazioni

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases} ⇨ ax^2 + bx + c = mx + q ⇨ ax^2 + x \cdot (b-m) + c - q = 0$$

$\Delta_S = (b-m)^2 - 4a(c-q)$ ⇨ Il segno determina il numero di soluzioni

Il problema ammette 2 soluzioni al massimo

Due soluzioni (2 punti) Retta secante $\Delta_S > 0$	
Una soluzione (1 punto) Retta tangente $\Delta_S = 0$	
Nessuna soluzione (0 punti) Retta esterna $\Delta_S < 0$	

Eccezione! Retta verticale ⇨ Secante ⇨ 1 intersezione	

Calcolo di rette tangenti ad una parabola

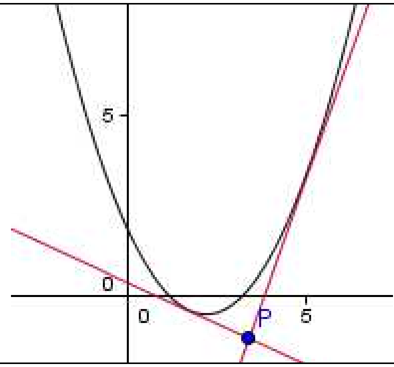
Procedimento: si mettono a sistema equazione della parabola e il fascio di rette (proprio o improprio[2]); si pone la condizione di tangenza $\Delta_S = 0$

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ \text{fascio di rette (proprio o improprio)} \end{cases} ⇨ \Delta_S = 0 \text{ condizione di tangenza}$$

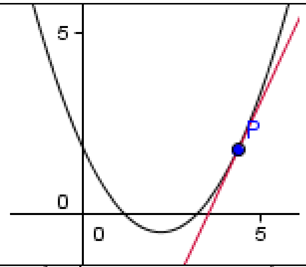
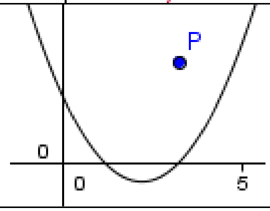
Fascio proprio di rette: tangente/i condotta/e ad una parabola per un punto $P(x_P ; y_P)$

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y - y_P = m(x - x_P) \end{cases} ⇨ \Delta_S = 0$$

Il problema può ammettere

2 soluzioni se il punto P è esterno alla parabola	

[2] Fascio proprio: rette passanti per un punto. Fascio improprio: rette parallele

1 soluzione se il punto P è sulla parabola	
Nessuna soluzione se il punto è interno alla parabola	

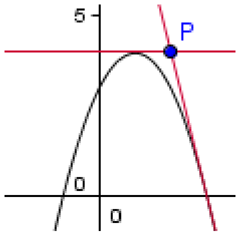
Esempio: $y=-x^2+2x+3$ - $P(2;4)$

$$\begin{cases} y=-x^2+2x+3 \\ y-4=m(x-2) \end{cases} \Rightarrow -x^2+2x+3=mx-2m+4 \Rightarrow$$

$$-x^2+x(2-m)-1+2m=0 \Rightarrow \Delta_S=(2-m)^2-4(-1)(-1+2m)=0 \Rightarrow$$

$m^2+4m=0 \Rightarrow m_1=0; m_2=-4$

Rette tangenti: $y=4$; $y=-4x+12$



Fascio improprio di rette: tangente condotta ad una parabola parallela o perpendicolare ad una retta nota (si conosce il coefficiente angolare $m=m_1$)

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=m_1x+q \end{cases} \Rightarrow \Delta_S=0$$

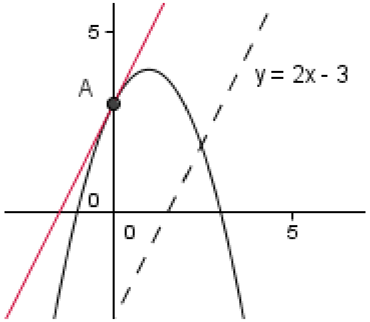
Il problema ammette una soluzione

Esempio: $y=-x^2+2x+3$ fascio di rette parallele a $y-2x+3=0$

$m_1=2$

$$\begin{cases} y=-x^2+2x+3 \\ y=2x+q \end{cases} \Rightarrow -x^2+2x+3=2x+q \Rightarrow -x^2+3-q=0$$

$\Delta_S=-4(-1)(3-q)=0 \Rightarrow q=3 \Rightarrow y=2x+3$



Esercitazioni scaricabili dal sito www.cuppari.an.it/matematica

- Legame fra il segno dei parametri ed il grafico di una parabola
  Testo:
  http://www.cuppari.an.it/matematica/compitiCasa/ParabolaParametriTesto.pdf
  Soluzioni:
  http://www.cuppari.an.it/matematica/compitiCasa/ParabolaParametriSoluzioni.pdf
- Problema sulla parabola: calcolo equazione, tangenti, grafico (testo + svolgimento + soluzione).
  http://www.cuppari.an.it/matematica/cclasse/problemaParabola.pdf