

1 | Zeitgleichung

1.1 Wo liegt das Problem?

Wir weichen jetzt von der gleichförmig durchlaufenen Kreisbahn der Erde ab und berücksichtigen die elliptische Bahn, die Sonne ist in einem Brennpunkt - es existiert ein Perihelion und Aphelion. Allerdings berücksichtigen wir keine Periheldrehung(0,3 Grad pro Jahrhundert). Das Perihel liegt in den nächsten hundert Jahren am 2. Jänner. Außerdem zeigt die Erdachse auf der Nordhalbkugel auf Polaris - was sich ebenfalls langsam ändert, da die Erde einen Kreisel darstellt auf dem die Sonne ein Drehmoment ausübt (Präzession eines Kreisels). Außerdem bewegt sich nicht die Erde auf der Ekliptik, sondern eigentlich der Schwerpunkt des Erde-Mond Systems, dann ist da noch Jupiter und Saturn, durch die Lichtbrechung sieht man die Sonne auf der Erde noch, obwohl sie bereits untergegangen ist, usw. Also wenn man so will, ist auch die genauere Variante noch nicht genau.

Bevor wir zu rechnen beginnen ein paar Vorbemerkungen:

Die Sonnenzeit (zum Unterschied von UTC oder nach welchen Konventionen sich die Zeiger der Uhren auch drehen) orientiert sich an der Dauer der scheinbaren Umdrehung der Sonne um die Erde. Natürlich wäre es nützlich, wenn die Zeiger der Uhren auch mit der Sonne verknüpft wären:

12 Uhr sollte irgendwie mit "High Noon" (Sonnenhöchststand) korespondieren.

Als wahrer Sonnentag wird die Zeitdauer zwischen zwei Meridiandurchgängen der Sonne bezeichnet, lax ausgedrückt also "von Mittag zu Mittag". In Wahrheit spiegelt sich in dieser Bewegung nur die Drehung der Erde um sich selbst. Weil allerdings im Laufe eines Tages die Erde auch einen beträchtlichen Teil ihres Umlaufs um die Sonne zurücklegt, dauert eine vollständige Erddrehung bezüglich der Sonne länger als eine vollständige Drehung bezüglich der Sterne. Daher ist ein wahrer Sonnentag auch um etwa 4 Minuten länger als ein Sterntag. Der Bezugspunkt der wahren Sonnenzeit kann auch wieder durch den Stundenwinkel ausgedrückt werden. Allerdings soll die Uhrzeit beim Meridiandurchgang der Sonne 12 Uhr betragen, daher ergibt sich die wahre Sonnenzeit als Stundenwinkel der Sonne plus 12 Stunden.

Eine Sonnenuhr zeigt die wahre Sonnenzeit an!

Die Dauer des wahren Sonnentages variiert aber jahreszeitlich. Das ist eine Folge sowohl der Exzentrizität der Erdbahn als auch der Schiefe der Ekliptik (die Schrägstellung der Erdachse). Zum einen werden nach dem zweiten Keplerschen Gesetz (dem Flächensatz) verschiedene Teile

1. Zeitgleichung

der ellipsenförmigen Erdbahn unterschiedlich schnell durchlaufen, so daß auch die Sonne sich unterschiedlich schnell zwischen den Sternen bewegt.

Beide Effekte haben letztlich zur Folge, das die genaue Länge der etwa 4 minütigen Korrektur zum Sterntag schwankt. Die Schiefe der Ekliptik(Tilt) hat dabei den etwas größeren Einfluß - sowohl Tilt als auch "Keplerbewegung" sind in Abb. 1 aus anschaulichen Gründen stark übertrieben. Wir benutzen ein geozentrisches Koordinatensystem für den Jahresumlauf der Sonne - die einzelnen Korrekturen (Kepler/Tilt) sieht man dann als Stundenwinkel!

Die reale Sonne wurde mit RS_e bezeichnet (schwarz, e für "Ekliptik").

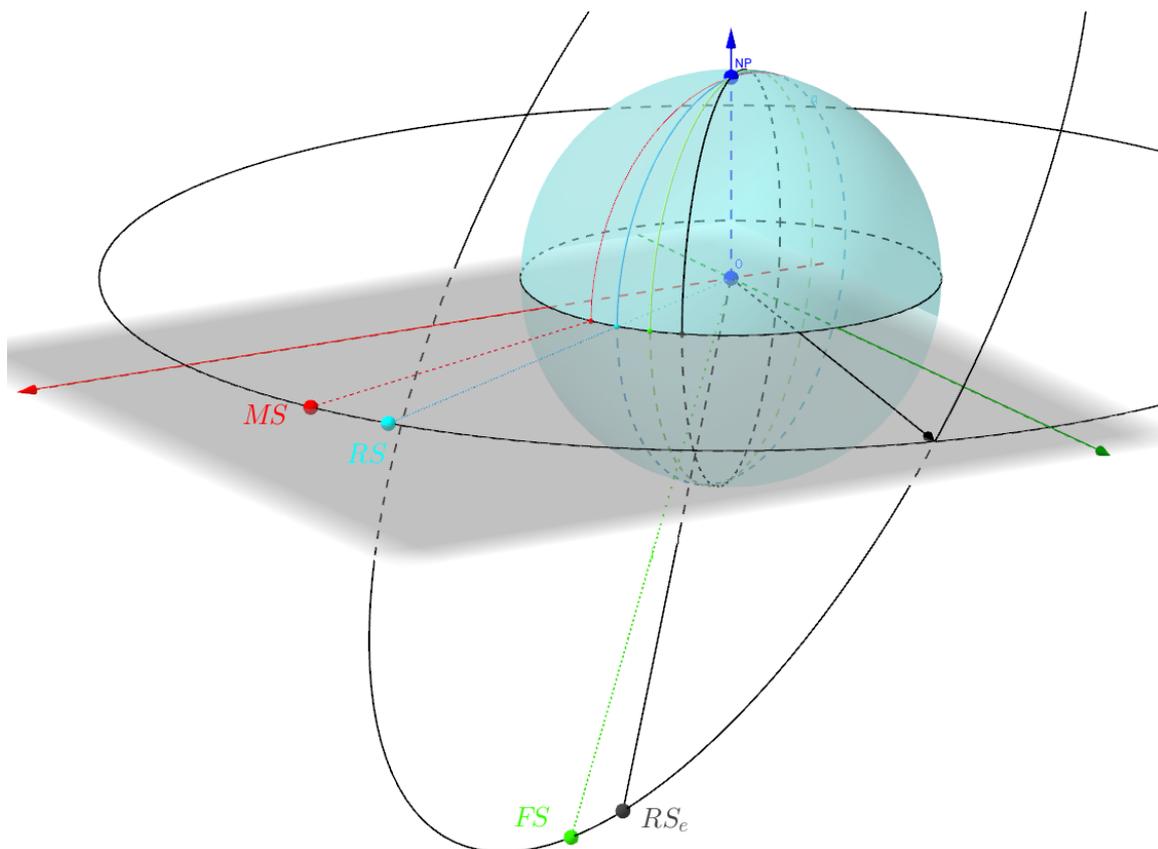


Abb.1 : Kepler- und Tiltkorrektur

Um auf eine gleichmäßig ablaufende Zeitskala(Uhr) zu kommen, definiert man eine fiktive "mittlere Sonne" (mean sun MS , rot). Diese braucht für einen Umlauf von Frühlingspunkt (Schnittpunkt Himmelsäquator mit Ekliptik) zu Frühlingspunkt genauso lange wie die wahre Sonne(RS_e), soll sich aber gleichförmig auf dem Himmelsäquator bewegen. Der Differenz zwischen wahrer und mittlerer Sonnenzeit wird als **Zeitgleichung** bezeichnet - in obiger Zeichnung entspricht dies dem Äquatorbogen zwischen rotem und schwarzen Meridian, wobei 2π natürlich 24 Stunden entsprechen.

Um diesen "Gesamteffekt" zu zerlegen, definieren wir in der Ekliptik eine gleichförmig umlaufende Sonne FS ("fictitious sun", grün), die sich mit MS zu den Tag- und Nachtglei-

chen(Equinoxen) “trifft”. Auf FS die Keplerbewegung angewendet, ergibt dann RS_e . Diese Zerlegung entspricht also eher eine **Hintereinanderausführung** der Differenzen:

$$\underbrace{\Delta(MS, FS)}_{\text{rot,grün}} + \underbrace{\Delta(FS, RS_e)}_{\text{grün,schwarz}} = \underbrace{\Delta(MS, RS_e)}_{\text{rot,schwarz}} \quad \text{Zeitgleichung}$$

Es führt nicht zum Ziel, MS mit FS (Tilt) zu vergleichen und MS mit RS (blau) (reine Keplerbewegung, ohne Tilt) - dies kann man in Abb. 1 leicht erkennen. In der Literatur wird bei der Zerlegung immer wieder behauptet:

1. Effekt auf Grund von Tilt
2. Effekt auf Grund der Keplerbewegung **alleine**

Hier wird meist unterschlagen, dass bei 2) als Bezugspunkt FS verwendet wird, und daher durch die Schrägstellung der Ekliptik der Stundenwinkel verkürzt wird!

Diese zwei Effekte besitzen unterschiedliche Periodenlänge und damit ergeben sich pro Jahr zwei Minima und zwei Maxima der Zeitgleichung! Ungefähre Werte sind z.B.

11.Feb ~ 14.5 min 14.Mai ~ 4 min 26.Jul ~ 6.4 min 3.Nov ~ 16.3 min

Die **Zeitgleichung** bewirkt auch asymmetrische Verschiebungen von Sonnenauf- und -untergangszeiten. So findet z.B. der früheste Sonnenuntergang nicht bei der Wintersonnenwende am 22.Dez.statt, sondern etwa 11 Tage zuvor. Der späteste Sonnenaufgang kommt dagegen rund 10 Tage nach der Wintersonnenwende. Aus demselben Grund sind Vor- und Nachmittag auch bei den Tag- und Nachtgleichen am 21.März und 23.September nicht gleich lang.

Also halten wir fest:

Will man von einer Sonnenuhr die “Uhrzeit” ablesen muss man eine Korrektur anbringen - sie heißt **Zeitgleichung!**
(Grund: Keplerbewegung und Tilt)

1.2 Wo ist gleichzeitig Mittag?

Theorem 1.1

Die Punkte auf der Erde, die gleichzeitig Mittag haben (Sonnenhöchststand), befinden sich auf einem Meridian!

Die Sonne befinde sich in einem Koordinatensystem (wie Abb. ??) in $\vec{s} = (\cos \phi_S, 0, \sin \phi_S)$, ein Punkt auf der Erde habe die geograf. Koordinaten $\vec{p}_E = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, \sin \phi)$ -

1. Zeitgleichung

wobei $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ die geograf. Breite darstellt, $\theta \in [0, 2\pi]$ die Länge. Soll der Winkel zwischen diesen Vektoren minimal werden, muss das skalare Produkt beider Vektoren maximal werden (wir halten dabei die geograf. Breite fest $\phi = \phi_P$ - wir bewegen uns auf einem Breitenkreis der Erde):

$$f(\theta) = \cos \phi_P \cos \phi_S \cos \theta + \sin \phi_P \sin \phi_S \rightarrow \max$$

Obiger Ausdruck wird maximal falls θ verschwindet. Wir suchen also jene \vec{p}_E mit verschwindendem θ :

$$(\cos \phi, 0, \sin \phi) \rightarrow \text{der der Sonne zugewandte Halbkreis}$$

1.3 Schiefstellung der Erdachse - geozentrisch

Ausgangszeitpunkt sei der Frühlingspunkt (vernal equinox). Mittelpunkt der Erde ist der Koordinatenursprung. x -Achse zeigt zum Frühlingspunkt. z -Achse steht senkrecht zur Ekliptik - es ist praktisch das System aus Abb. 1 nur um α (= Winkelabstand Perihel-Frühlingspunkt, bei der Erde $78,45^\circ$) gegen den Uhrzeigersinn um die z -Achse gedreht. Die Sonnenbahn $\vec{s}(\tau)$ und die Erdachse \vec{a} haben dort die Darstellungen

$$\vec{s} = (\cos \tau, \sin \tau, 0)^T \quad \vec{a} = (0, \sin \varepsilon, \cos \varepsilon)^T$$

Wir rotieren um die x -Achse mit R_x (Wikipedia¹ oder "Über Rotationsmatrizen"²) um den Winkel ε **math. negativ** und **passiv** (die letzten beiden Eigenschaften negieren ε zweimal, sodass wir einfach R_x mit $+\varepsilon$ verwenden können:

$$\vec{s}' = (\cos \tau, \cos \varepsilon \sin \tau, \sin \varepsilon \sin \tau)^T \quad \vec{a}' = (0, 0, 1)^T \quad (1.1)$$

Nun simulieren wir dies in Geogebra: Den Radius der Ekliptik setzen wir o.B.d.A. auf 3. Im folgendem Abschnitt ist von der "realen Sonne" die Rede, aber es handelt sich offenbar um die "fictitious sun" FS in Abb. 1, also jene fiktive Sonne, die gleichförmig in der Ekliptikebene umläuft - also keine Keplerbewegung ausführt!

Konstruktionsprotokoll	
Name	Beschreibung
1 Punkt O	
2 Kugel e	Kugel mit Mittelpunkt O und Radius 1
3 Kreis c	Kreis mit Mittelpunkt O und Radius 3, Achse parallel zu zAchse
4 Winkel α	
5 Kreis ekl	c gedreht um Winkel α um xAchse
6 Winkel τ	
7 Punkt MS	$3(\cos(\tau), \sin(\tau), 0)$
8 Punkt RS	MS gedreht um Winkel α um xAchse
9 Strecke f	Strecke [O, RS]
10 Punkt A	Schnittpunkt von e, f
10 Punkt M1	Schnittpunkt von e, f
11 Punkt NP	
12 Punkt SP	
13 Kreis d	Kreis durch NP, SP, M1
14 Strecke g	Strecke [O, MS]
15 Punkt B	Schnittpunkt von e, g
15 Punkt C	Schnittpunkt von e, g
16 Kreis h	Kreis durch C, NP, SP
17 Punkt D	Schnittpunkt von d, xyEbene
17 Punkt E	Schnittpunkt von d, xyEbene
18 Punkt X	
19 Strecke i	Strecke [O, D]
20 Winkel σ_2	Winkel zwischen X, O, MS
21 Winkel σ_1	Winkel zwischen X, O, D
22 Winkel $\Delta\sigma$	$\sigma_2 - \sigma_1$
23 Punkt P	$(\tau, \Delta\sigma \cdot 24 \cdot 60 / (2\pi))$

Abb.2 : Konstruktionsprotokoll Tilt-only

- 2 Einheitserde
- 3 Bahn der "mittleren Sonne"
- 4 u. 6 Slider für τ und ε
- 5 Bahn der "realen Sonne"
- 7 u. 8 Position der "mittleren Sonne" und "realen Sonne"
- 11 u. 12 die Pole werden hinzugefügt
- 13 Mittagsmeridian für die reale Sonne
- 16 Mittagsmeridian für die mittlere Sonne (12 auf der Uhr)
- 17 D ist Schnittpkt. des Mittagsmeridians der realen Sonne
- 20 σ_1 ist der Stundenwinkel der realen Sonne
- 21 σ_2 ist der Stundenwinkel der mittleren Sonne
- 22 $\Delta\sigma$ Differenz - 24h entsprechen 2π
- 23 $P(\tau, \Delta\sigma \cdot 24 \cdot 60 / (2\pi))$ zieht als Spur den Graph des "Mittagsunterschieds"

Beachte: Während σ ein Stundenwinkel ist, ist τ ein Jahreswinkel!

Um den Graph $f(\tau) = P(\tau, \Delta\sigma \cdot 24 \cdot 60 / (2\pi))$ auch richtig wiederzugeben, müssen die Winkel σ_i von 0 bis 360 Grad wiedergegeben werden, statt 0 bis 180. Damit die Winkel σ_i von 0 bis 360 Grad wiedergegeben werden und damit auch der Graph $f(\tau)$, müssen sie mit einer Richtung (senkrecht zum Umlauf) - hier die z-Achse - festgelegt werden. Dieser Befehl erscheint nicht im Tooltip und muss in der Befehlszeile händisch eingegeben werden - er erscheint auch nicht im Konstruktionsprotokoll (Geogebra 5.0.258-3D). Auch ist ein Umschreiben des "normalen" Winkelbefehls

$$\sigma_1 = \text{Winkel [X, O, MS]}$$

im Eigenschaftsfenster nicht möglich. Also hier die Eingabe in der Befehlszeile (Hervorhebung von mir):

$$\sigma_1 = \text{Winkel [X, O, MS, zAchse]}$$

1. Zeitgleichung

Ein Blick auf die Ergebnisse:

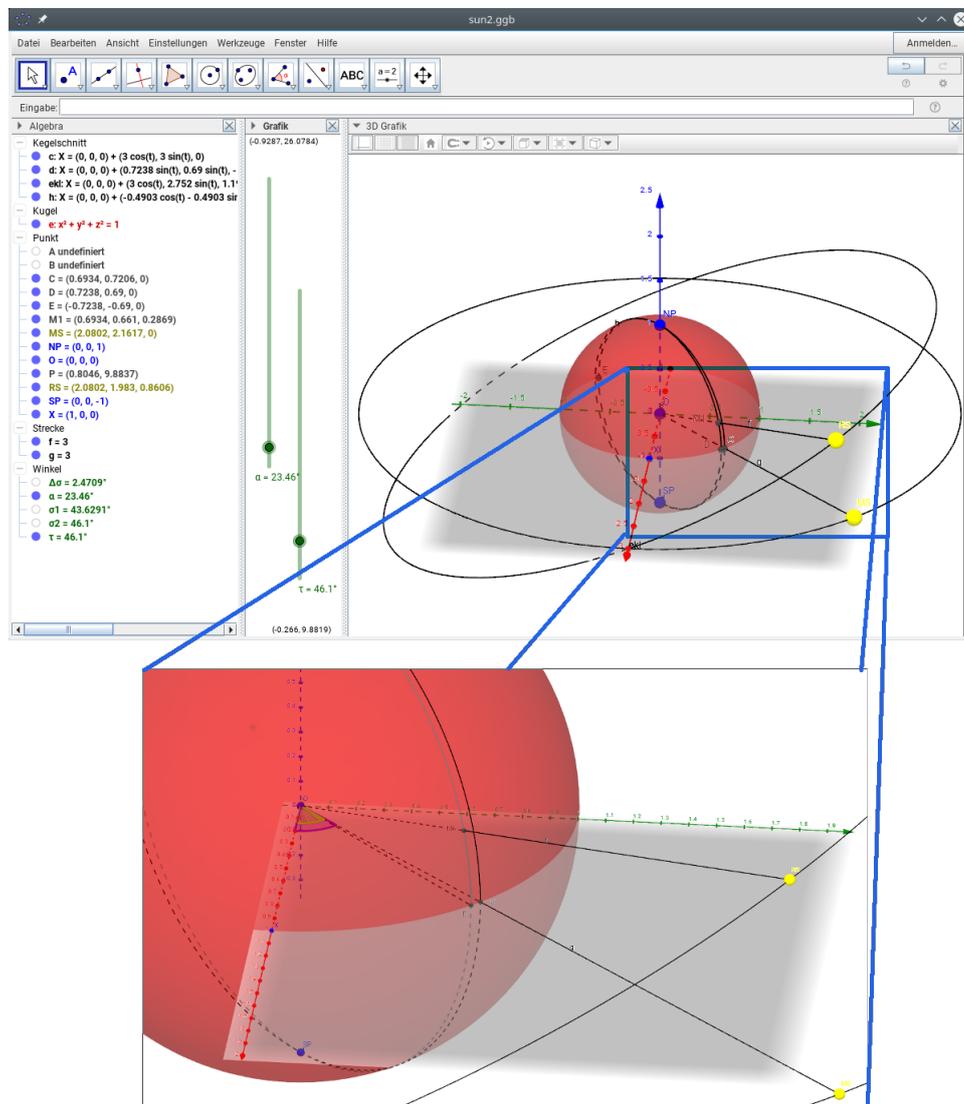


Abb.3 : Mittagverschiebung wegen Schiefstellung der Erdachse

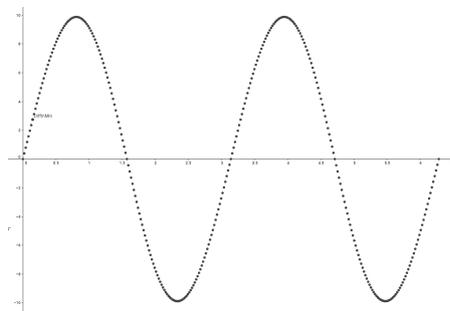


Abb.4 : Spur von P

Man kann sehen (zumindest wenn man genauer hinsieht), dass die mittlere Sonne (Uhrzeit) einen anderen “Mittag” besitzt als die “reale Sonne” (Sonnenuhr)! Ein Maximum von $\Delta\sigma$ ergibt sich bei $\tau = 46.1^\circ = 365.25/360 \cdot 46.1$ Tagen nach dem Frühlingspunkt (6. Mai) und beträgt ca. 10 Minuten - wie der Graph von P offenbart(Bei P die Spur einschalten in der 2D-Graphik bei der Betätigung des Schieberegler für τ).

An den Äquinoxen und an den Sonnenwenden gibt es keine Korrektur zur mittleren Sonne (= lokale Uhrzeit), dazwischen pendelt sie "sinusartig" zwischen 10 und -10 Minuten. Zuerst hinkt die reale Sonne hinterher, dann überholt sie zur Sommersonnenwende, eilt voraus bis zur Herbst-Tag-und-Nachtgleiche, hinkt hinterher usw.

Da wir die Erdachsenneigung in unserem Geogebra-Blatt leicht durch einen Schieberegler verändern können, untersuchen wir wie "sinusartig" sich unser Tilt-Fehler verhält, wenn wir die Achsenneigung ordentlich erhöhen:

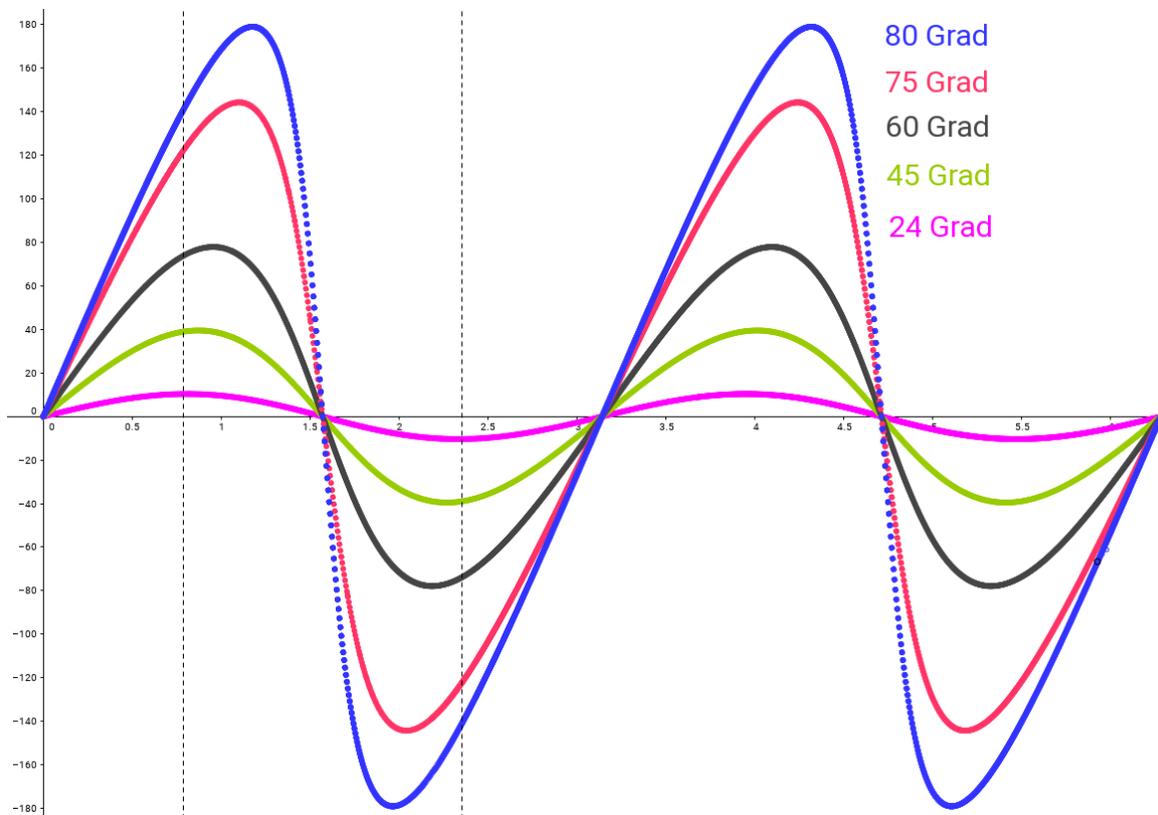


Abb.5 : verschiedene Achsenneigungen

Man sieht: Den Tilt-Fehler durch eine einfache Sinusfunktion anzunähern mag bei der Erde noch durchgehen (sieht man allerdings in vielen Publikationen), bei größeren Achsenneigungen bricht die Symmetrie um $x = (2k + 1)\pi/4$, $k \in \mathbb{N}$ ein! Hier würde vermutlich eine Fouriertransformation für eine Näherung helfen!

1. Zeitgleichung

Wir überprüfen unser Ergebnis mit *wxMaxima* und verwenden eine etwas andere Methode: Unser KS habe wieder die Erde im Ursprung, die x -Achse zeige zur Sonne im Frühlingspunkt, die z -Achse steht senkrecht zur Ekliptik! Wir führen jetzt wieder dieselbe Drehung um die x -Achse durch, wie im Abschnitt 1.3 dieses Kapitels und landen bei den Gleichungen 1.1. Ein beliebiger Punkt am Äquator der Erde - nehmen wir der Einfachheit $P = (1, 0, 0)^T$ - rotiert um die Erdachse $n = 366.25$ -mal im Jahr, dadurch ergibt sich ein Jahresumlauf mit 365.25 Tagen. Wann sind die Sonnenhöchststände (lokale Mittage)?

Gießen wir diese Fragestellung in Formeln:

Position P' während der Drehungen: $P' = R_z(n) \cdot P = (\cos(n\tau), \sin(n\tau), 0)^T$

Zur Erinnerung die Position der Sonne: $\vec{s}' = (\cos \tau, \cos \varepsilon \sin \tau, \sin \varepsilon \sin \tau)^T$

Winkel zwischen P' und Sonne: $\cos(\angle(P', \vec{s}')) = \cos(n\tau) \cdot \cos \tau + \sin(n\tau) \cdot \cos \varepsilon \sin \tau$

Der Winkel $\angle(P', \vec{s}')$ wird am kleinsten (Sonnenhöchststand), wenn der Cosinus sein Maximum erreicht, wo also besitzt die Funktion

$$f(\tau) = \cos(n\tau) \cos \tau + a \sin(n\tau) \sin \tau \quad \text{mit } a = \cos \varepsilon \in [-1, 1]$$

ihre Maxima - natürlich in der Nähe $2\pi/365.25 \times$ Tagesanzahl - mit dieser Näherung können wir ein Newtonverfahren starten!

Vorerst schreiben wir allerdings $f(\tau)$ noch um (die Produkte in additive Terme) - damit wird die Ableitung um einiges "einfacher":

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \cos(n\tau) \cos \tau + a \sin(n\tau) \sin \tau = \\ &= \frac{\cos(n \cdot \tau - \tau) + \cos(n \cdot \tau + \tau)}{2} - \frac{a \cdot (\cos(n \cdot \tau + \tau) - \cos(n \cdot \tau - \tau))}{2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Die Ableitung $f'(\tau)$ ergibt sich dann zu (konstanter Faktor wurde weggelassen):

$$f'(\tau) = -(1-a)(1+n) \sin((n+1)\tau) - (1+a)(n-1) \sin((n-1)\tau)$$

Hier jetzt die Implementation in *wxMaxima*:

Zuerst überprüfen wir unsere obige Gleichung 1.2

$$\begin{aligned} & \cos(n\tau) \cos \tau + a \sin(n\tau) \sin \tau = \\ & = 1/2 (\cos((n+1)\tau) + \cos((n-1)\tau)) - a/2 (\cos((n+1)\tau) - \cos((n-1)\tau)) \end{aligned}$$

```
(%i2) term:1/2*(expand(cos((n+1)*t)+cos((n-1)*t))
      -a/2*expand(cos((n+1)*t)-cos((n-1)*t));
```

```
(%i3) trigexpand(term);
```

$$(\%o3) \quad a \cdot \sin(t) \cdot \sin(n \cdot t) + \cos(t) \cdot \cos(n \cdot t)$$

Wir eliminieren den für die Lage der Extremwerte unwesentlichen Faktor 1/2

```
(%i4) f(t):=ratsimp(2*term)$
```

Wir berechnen die Ableitung als Funktion der Zeit t und Achsenneigung a

```
(%i5) define(f_s(t,a),diff(f(t),t));
```

$$(\%o5) \quad f_s(t,a) := -(1-a) \cdot (1+n) \cdot \sin((n+1) \cdot t) - (1+a) \cdot (n-1) \cdot \sin((n-1) \cdot t)$$

Festlegung der Umdrehungszahl der Erde (Beachte: $n = N$ bedeutet (N-1)-Tage im Jahr

```
(%i6) n:366.249$
```

Wir programmieren ein Newton-Verfahren, θ wird dabei auf 23.5° festgelegt, die Abbruchgenauigkeit wird auf 10^{-10} gesetzt

```
(%i7) newton(x0):=block([x_alt:x0,d:1,%theta:cos(%pi/180*23.5),accuracy:10^(-10)],
  define(g_s(t), f_s(t,%theta)),
  define(g_ss(t), diff(g_s(t),t)),
  for i: 1 unless d<accuracy do (
    x_neu: float(x_alt - g_s(x_alt)/g_ss(x_alt)),
    d:abs(x_neu - x_alt),
    x_alt: x_neu
  ),
  x_alt
)$
```

Wir bestimmen nun für jeden Tag des Jahres (0 entspricht dem Frühlingspunkt (21. März) den Unterschied zwischen Sonnenhöchststand und 12 Uhr (Uhrzeit) herauszufinden; als Startpunkt für das Newton-Verfahren verwenden wir die Uhrzeit(=mittlere Sonne); day =Winkel pro Jahrestag Alternativ könnte man auch die in *wxMaxima* eingebaute Funktion *find_root* benutzen!

```
(%i8) findTiltError(days):=block([mins:[0.0],noons:[0.0],
  day:2*%pi/(n-1),root:0.0, %theta:cos(%pi/180*23.5)],
  for d thru days do (
    /*root:find_root(f_s(t,%theta),t,d*day-day/20,d*day+day/20),*/
    root:newton(d*day),
    mins:cons(float(root),mins), /* local noon */
    noons:cons(float(d*day),noons) /* actual noon on clock = 12h */
  ),
  reverse(noons - mins)
)$
```

1. Zeitgleichung

Funktion: Winkel(Einheiten *rad*) → in Minuten

```
(%i9) rad2min(rad):=block(  
    float(365.25*24*60/(2*%pi)*rad)  
)$
```

Wir rechnen die Winkeldifferenzen für 365 Tage in Minuten um - diese Werte bilden eine Liste

```
(%i10) diffsInMin:=map(rad2min,findTiltError(365))$
```

Wir suchen die ersten 11 Tage und hängen sie "hinten" an - 376 Tage

```
(%i11) tail:makelist(diffsInMin[i],i,2,11)$
```

Wir erstellen die Argumenteliste für das Plotten: 0 bis 375 (376 Tage)

```
(%i12) args:makelist(i,i,0,375)$
```

Anhängen - wie oben erwähnt

```
(%i13) diffsInMin:=append(diffsInMin,tail)$
```

Als Zugabe eine Funktion: Tagenummer(0 bis 365) *rightarrow* Datum

```
(%i14) determineDate(dayNr):=block([d:[10,30,31,30,31,31,30,31,30,31,31,28,21],  
    size:13, accList:[10], month:1, date:0,  
    monthNames:['März','April','Mai','Juni','Juli','Aug','Sep','Okt',  
                'Nov','Dez','Jan','Feb','März']],  
    if (dayNr<0 or dayNr>365) then  
        return (disp("Tag nicht zwischen 0 und 365 --> Fehler!")),  
    for i:2 thru size do accList:cons(accList[1]+d[i],accList),  
    accList:reverse(accList),  
    /*display(accList),*/  
    for i:1 while accList[i] < dayNr do month:i+1,  
    if (month = 1) then date:21+dayNr else date:dayNr - accList[month-1],  
    print(date,". ",monthNames[month])  
)$
```

```
(%i15) determineDate(182);  
19. Sep
```

Jetzt sind wir soweit - wir erstellen den Plot

```
(%i16) plot2d([discrete, args, diffsInMin], [x,0,375])$
```

An welchen Tagen ist der Fehler ungefähr 0?

```
(%i17) searchForRoots(L):=block([size:length(L), pred:0, succ:0, indexList:[]],  
    for i thru size do (  
        if (abs(L[i]) < 0.3) then indexList:cons(i-1,indexList)  
    ),  
    reverse(indexList)  
)$
```

```
(%i18) searchForRoots(diffsInMin);
```

```
(%o18) [0, 91, 92, 182, 183, 274, 365]
```

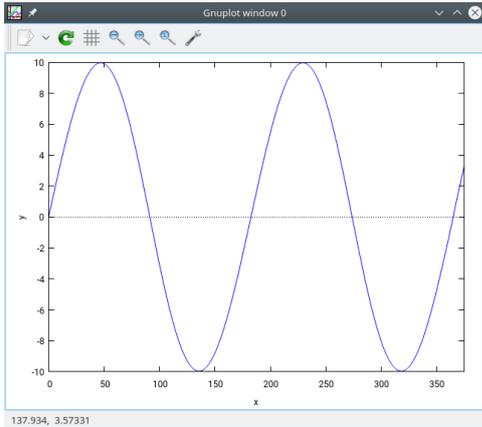


Abb.6 : Plot aus wxMaxima

Hier nun das Ergebnis des Plots - wie man sieht ist es eine Bestätigung unserer Geogebra-Simulation. Aber bei genauerer Untersuchung kommt man darauf, dass die Herbst-Tag-und-Nachtgleiche auf den 19. September fällt!

Wir haben ja die Keplerbewegung nicht berücksichtigt und nach dem Frühlingspunkt bewegt sich die reale Sonne langsamer als die mittlere Sonne (unsere Uhr) - daher tritt die Herbst-Tag-und-Nachtgleiche später ein als geplant!

1.4 Position der wahren Sonne $\psi(t)$ - Keplerkorrektur

Polarform einer Ellipse mit den Halbachsen a und b (wobei $a > b$) mit Koordinatenursprung im Brennpunkt (Sonne). Für den Polarwinkel ψ gilt die Entsprechung $2\pi \hat{=} 365,249 \cdot 24$ Stunden:

$$r(\psi) = \frac{a^2 - e^2}{a + e \cos(\psi)} \quad \text{wobei } e = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ die lineare Exzentrizität ist}$$

Für die Erdbahn (mit obigen Vorbehalten) und der Längeneinheit $a = 1$ gilt:

$$e = \varepsilon (= e/a) = \kappa = 0,016722, \quad \alpha = 78,5^\circ, \quad \epsilon = 23,45^\circ \quad (1.3)$$

($\alpha = \angle(\text{Perihel, Frühlingspunkt})$, $\epsilon = \angle(\text{Ekliptiknormale, Erdachse})$)

Die Fläche A ergibt sich mit obigen Einheiten

$$\kappa = \sqrt{1 - b^2} \Rightarrow b = \sqrt{1 - \kappa^2} \Rightarrow A = ab\pi = \pi\sqrt{1 - \kappa^2}$$

Übrigens der kleine Wert von κ zeigt, dass unsere obige Näherung so schlecht nicht war - aber wie die obere Tabelle zeigt, eine Viertelstunde kann man schon daneben liegen, dazu kommt natürlich noch der Abstand vom "zeitgebenden Längengrad".

Wenden wir zuerst Kepler an: Der Flächenzuwachs vom Radiusvektor pro Zeit soll konstant sein! Also (wenn wir die Zeit in rad messen $2\pi \hat{=} 1$ Jahr)

$\dot{A}(t) = c \Rightarrow A(t) = c \cdot t + c_1$ mit den Randbedingungen $A(0) = 0$ und $A(2\pi) = ab\pi$ ergibt sich

$$c_1 = 0 \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \kappa^2}$$

also mit Differentialen geschrieben: $\frac{dA}{dt} = c = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \kappa^2}$ (1.4)

1. Zeitgleichung

Erinnern wir uns

$$\int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x \quad \text{mit } \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i * \Delta x \text{ und } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

genauso lässt sich zeigen, wenn $r(\psi)$ die Polarform einer Kurve darstellt, dass sich der Flächeninhalt ergibt zu

$$A(\psi_1, \psi_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [r(\xi_i)]^2 \Delta\psi = \frac{1}{2} \int_{\psi_1}^{\psi_2} [r(\psi)]^2 d\psi$$

also mit Differentialen geschrieben:
$$\frac{dA}{d\psi} = \frac{1}{2} [r(\psi)]^2 \quad (1.5)$$

Aus (1) und (2) lässt sich über die Kettenregel $\dot{\psi}(t)$ gewinnen:

$$\dot{\psi}(t) = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{dA} \frac{dA}{dt} = \left(\frac{dA}{d\psi} \right)^{-1} c = \frac{2}{r^2} c = (1 + \kappa \cos \psi)^2 (1 - \kappa^2)^{-\frac{3}{2}}$$

diese Differentialgleichung für ψ gilt es zu lösen:

$$\dot{\psi}(t) = (1 - \kappa^2)^{-\frac{3}{2}} (1 + \kappa \cos \psi)^2 \quad (1.6)$$

Damit die Argumentationslinie nicht durchbrochen wird, habe ich die Diskussion über deren Lösung auf einen anderes Kapitel (siehe 2) verschoben. Im Folgenden werden wir mit dieser Näherung der Lösung weiterrechnen:

$$\psi(t) = t + \underbrace{2\kappa \sin(t) + \frac{5}{4}\kappa^2 \sin(2t)}_{\delta(t)} = t + \delta(t) \quad \text{wobei } \delta(0) = \delta(\pi) = \delta(2\pi) = 0$$

Es handelt sich also um eine gleichförmige Bewegung (uniform motion) mit einer "Störung". Berechnen wir diese sich akkumulierende "Störung" mit wxMaxima:

Exzentrizität und Anzahl der Tage im Jahr werden festgelegt

```
(%i1) k:0.016722$ year:365$
```

Jetzt obige Näherungsformel für $\psi(t)$

```
(%i3) %psi(t):= t+ 2*k*sin(t)+ 5/4*k^2*sin(2*t);
```

```
(%o3)  $\psi(t) := t + 2k \sin(t) + \frac{5}{4}k^2 \sin(2t)$ 
```

Wie groß ist der Unterschied zur gleichförmigen Bewegung? Input: day-number; (0 entspricht 3. Jänner(Perihel))

```
(%i4) define(errorkepler(day),2*%pi/year*day-%psi(2*%pi/year*day))$
```

Umrechnung in Minuten und Werteliste (values) erstellen; $v[1] = \psi(21.Dez)$

```
(%i5) v:makelist(24*60*errorkepler(i)/(2*%pi),i,-13, year),numer$
```

Punktliste p erstellen: dayNr -13 → 21. Dez.(Sonnenwende), dayNr 0 → 3. Jan. (Perihel)

```
(%i6) p:makelist([i,v[i+14]],i,-13,year)$
```

Jetzt plotten wir die Argument-Werteliste $p(\text{points})$

```
(%i7) plot2d([[discrete,p ]],[y,-10,10], [style,[lines]], [color, magenta],
[legend,"Fehler in Minuten"]);
```

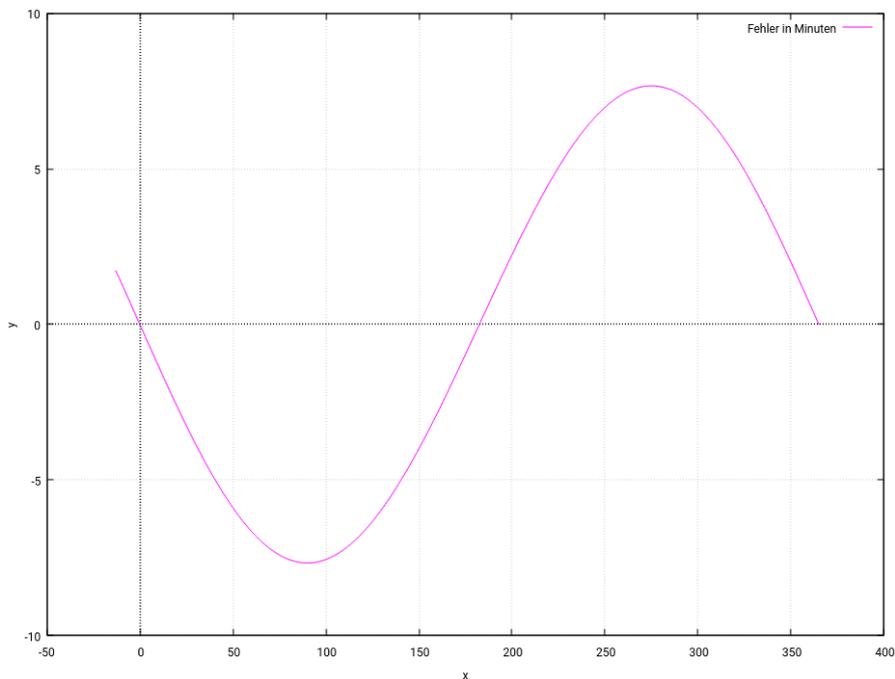


Abb.7 : Fehler auf Grund der “Keplerbewegung”

Der Graph der Zeitgleichung (**nur die Keplerbewegung betreffend**) ist natürlich

$$t - \psi(t) = 2\kappa \sin(t) + \frac{5}{4}\kappa^2 \sin(2t) = \delta(t) \quad \text{wobei } t \hat{=} \frac{2\pi}{365}n$$

Der Wert $\Delta\psi = \text{errorkepler}(\text{day})$ ist eine Korrektur des Stundenwinkels $1 \text{ rad} \hat{=} \frac{60 \times 24}{2\pi} \text{ min}$
 Der Fehler auf Grund der Keplerbewegung fällt also etwas geringer aus als jener auf Grund der Erdachsenneigung (ca. 10 Minuten). Wir halten fest:

Der Fehler schwankt zwischen -8 und $+8$ Minuten

1. Zeitgleichung

Jetzt zur Simulation mit Geogebra-3D - zuerst das Konstruktionsprotokoll:

Konstruktionsprotokoll		
...	Name	Beschreibung
1	Zahl k	
2	Funktion f	$f(t) = t + 2k \sin(t) + 5 / 4 k k \sin(2t)$
3	Winkel τ	
4	Winkel ε	
5	Punkt O	
6	Kugel e	Kugel mit Mittelpunkt O und Radius 1
7	Kreis c	Kreis mit Mittelpunkt O und Radius 3, Achse parallel zu z Achse
8	Punkt MS	$3(\cos(\tau), \sin(\tau), 0)$
9	Funktion ψ	f
10	Punkt NP	
11	Punkt SP	
11	Punkt SP	
12	Strecke g	Strecke $[O, MS]$
13	Punkt B	Schnittpunkt von e, g
13	Punkt C	Schnittpunkt von e, g
14	Kreis h	Kreis durch C, NP, SP
15	Punkt X	
16	Punkt RS	$3(\cos(\psi(\tau)), \sin(\psi(\tau)), 0)$
17	Strecke i	Strecke $[RS, O]$
18	Punkt A	Schnittpunkt von e, i
19	Kreis d	Kreis durch A, NP, SP
20	Winkel σ_1	Winkel zwischen X, O, MS
21	Winkel σ_2	Winkel zwischen X, O, RS
22	Winkel $\Delta\sigma$	$\sigma_2 - \sigma_1$
23	Punkt Diffn...	$(\tau, \Delta\sigma 24 (60 / (2\pi)))$

- 1 κ wird festgelegt
- 2 $\psi(t)$ wird als Hilfsfkt. f festgelegt - Verschiebung möglich mit $\psi(t) = f(t + c)$
- 3,4 Schieberegeler für Zeit und Ekliptikwinkel
- 5,6,7 Ursprung und "Erdkugel" und "Sonnenlauf"
- 8-11 Mittlere Sonne(MS), $\psi(t)$, Nord- und Südpol
- 12,13 Strecke zur MS und Schnittpunkt mit Erde(C)
- 14 Meridian durch C
- 15 "Hilfspkt" X auf x -Achse für später
- 17-19 Reale Sonne und Mittagsmeridianbestimmung
- 20-22 Stundenwinkelunterschied der Mittagsmeridiane
- 23 "Graphenpunkt" für Unterschied in Minuten

Abb.8 : Konstruktionsprotokoll-Keplerfehler

Hier die "bildlichen" Ergebnisse:

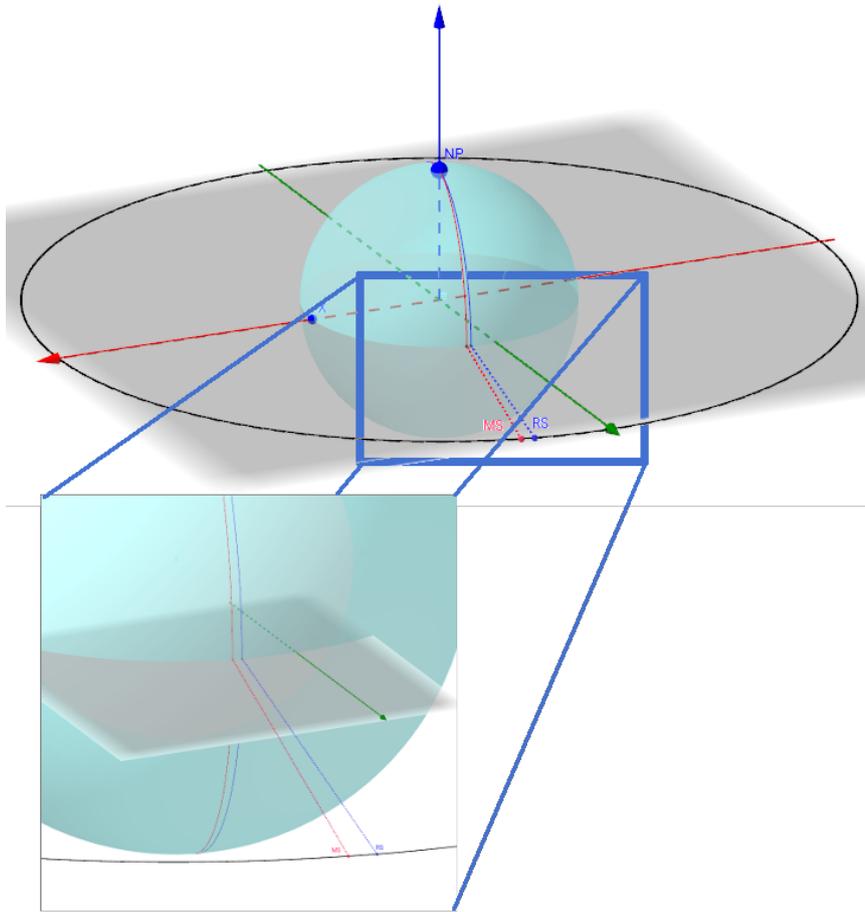


Abb.9 : Keplerfehler-Zeichnung

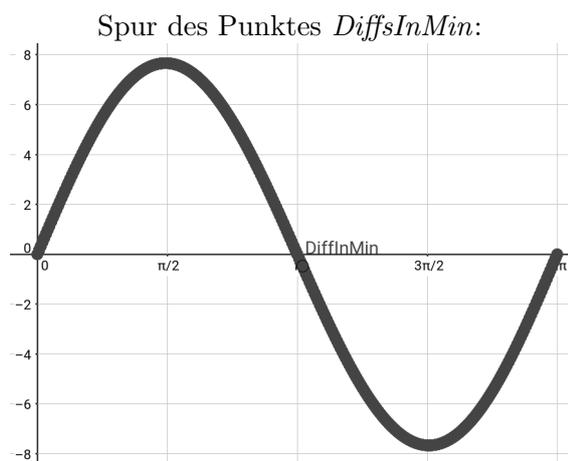


Abb.10 : Fehler in Minuten ($2\pi \cong 1$ Jahr)

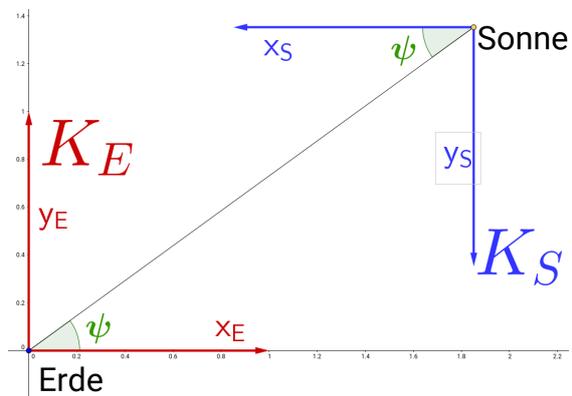


Abb.11 : heliozentrisch vs. geozentrisch

1. Zeitgleichung

Die Abweichung "Uhrzeit" - "Sonnenzeit" schwankt mit ± 8 Minuten!
(in Übereinstimmung mit unserer Rechnung!)

Vielleicht noch ein Wort, warum wir plötzlich ein geozentrisches Koordinatensystem(KS) K_E benutzen, obwohl wir die Keplernäherung mit einem heliozentrischen KS K_S hergeleitet haben. Wenn man den Koordinatenursprung von der Sonne in die Erde verschiebt und die Richtung der Koordinatenachsen umdreht, hat die Sonne dieselben Koordinaten (insbesondere in Polarform) wie vorher die Erde! (Siehe Abb. 11)

1.5 Kepler- und Schiefstellungskorrektur

Natürlich hätten wir das gleich machen können, aber hätten Sie dann gewusst, dass der Einfluss der Schiefstellung der Erdachse größer ist als die Keplerkorrektur? Also jetzt alles zusammen - die Zeitgleichung!

Konstruktionsprotokoll		
Nr.	Name	Beschreibung
1	Punkt X	
2	Punkt SP	
3	Punkt NP	
4	Punkt O	
5	Winkel τ	
6	Winkel ϵ	
7	Zahl α	
8	Zahl k	
9	Kugel e	Kugel mit Mittelpunkt O und Radius 1
10	Vektor vequ	$3(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)$
11	Kreis k1	Kreis mit Mittelpunkt O und Radius 1, Achse parallel zu zAchse
12	Punkt MS	$3(\cos(\tau), \sin(\tau), 0)$
13	Strecke g	Strecke [O, MS]
14	Funktion ψ	$\psi(t) = t + 2k \sin(t) + 5 / 4 k k \sin(2t)$
15	Punkt RS	$3(\cos(\psi(\tau)), \sin(\psi(\tau)), 0)$
16	Punkt RS_e	RS gedreht um Winkel ϵ um Gerade[O, vequ]

Abb.12 : Protokoll beide Fehler 1

16	Punkt RS_e	RS gedreht um Winkel ϵ um Gerade[O, vequ]
17	Strecke i	Strecke [RS_e , O]
18	Punkt A	Schnittpunkt von i, e
19	Kreis d	Kreis durch NP, A, SP
20	Punkt D	Schnittpunkt von d, k1
21	Kreis c	Kreis mit Mittelpunkt O und Radius 3, Achse parallel zu zAchse
22	Punkt C	Schnittpunkt von g, e
23	Kreis h	Kreis durch C, NP, SP
24	Winkel σ_1	Winkel zwischen X, O, MS
25	Winkel σ_2	Winkel zwischen X, O, D
26	Winkel $\Delta\sigma$	$\sigma_2 - \sigma_1$
27	Punkt DiffInMin	$(\tau, \Delta\sigma 24 (60 / (2\pi)))$
28	Kreis ekl	c gedreht um Winkel ϵ um Gerade[O, vequ]
29	Punkt FS	MS gedreht um Winkel ϵ um Gerade[O, vequ]
30	Punkt Perihel	$3\text{Vektor}[(\cos(\epsilon), 0, -\sin(\epsilon))]$
31	Punkt P	$(\tau, -\Delta\sigma 24 (60 / (2\pi)))$

Abb.13 : Protokoll beide Fehler 2

- 1-9 Festlegung von Konstanten und Slider; X (Eineitspkt. auf x -Achse); Südpol (SP), Nordpol (NP), Ursprung (O); Slider τ (Zeit) und ε (Achsen-schiefstellung); α (\angle (Perihel, Frühlingspunkt)), κ wird festgelegt; Erdkugel;
- 10 Vektor zum Frühlingspunkt
- 11 Erdäquator
- 12,13 Mittlere Sonne(MS) mit Verbindungsstrecke
- 14 Winkelnäherung $\psi(t)$ für reale Sonne
- 15 “reale Sonne” auf Himmelsäquator
- 16 die **reale Sonne** in der Ekliptik RS_e ;Bestimmung der “Hilfsobjekte” für $\Delta\sigma$;
- 29 fiktive Sonne (FS) (gleichförmig auf Ekliptik)
- 31 “Graphenpunkt” P

Hier wieder die “bildlichen” Ergebnisse:

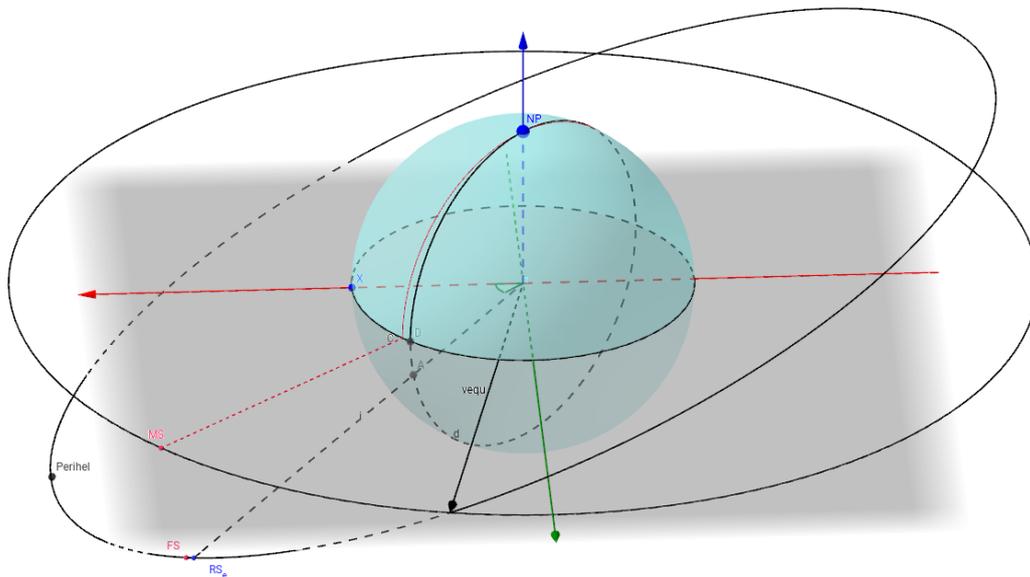


Abb.14 : Zeichnung Zeitgleichung

Eingezeichnet ist hier auch noch die “fictitious sun” (FS) also die fiktive Sonne, die in der Ekliptik gleichmäßig umläuft (gedreht um den Frühlingspunkt). Sie “trifft” die mittlere Sonne in den Equinoxen (wie in Abb. 1 beschrieben).

In der Astronomie wird als Näherung folgende Formel für die Zeitgleichung verwendet:

$$\text{WOZ} - \text{MOZ} = -0.171 \sin(0.0337 T + 0.465) - 0.1299 \sin(0.01787 T - 0.168) \text{ Stunden}$$

WOZ bedeutet “wahre Ortszeit” (Sonnenuhr)

MOZ bedeutet “mittlere Ortszeit” (Uhrzeit)

T bedeutet Nummer des Tages (bietet 24 Stunden $\cong 2\pi/365$ rad “Spielraum”)

1. Zeitgleichung

Natürlich müssen wir die “mittlere Sonne” $\tau \in [0, 2\pi]$ in Tagesnummern umrechnen (beachte τ beginnt im Perihelion - dies entspricht dem 3. Jänner):

$$T(\tau) = \frac{365}{2\pi}\tau + 3$$

Hier die Spur des Punktes $P(\tau)$ (schwarz) und obige Formel(grün):

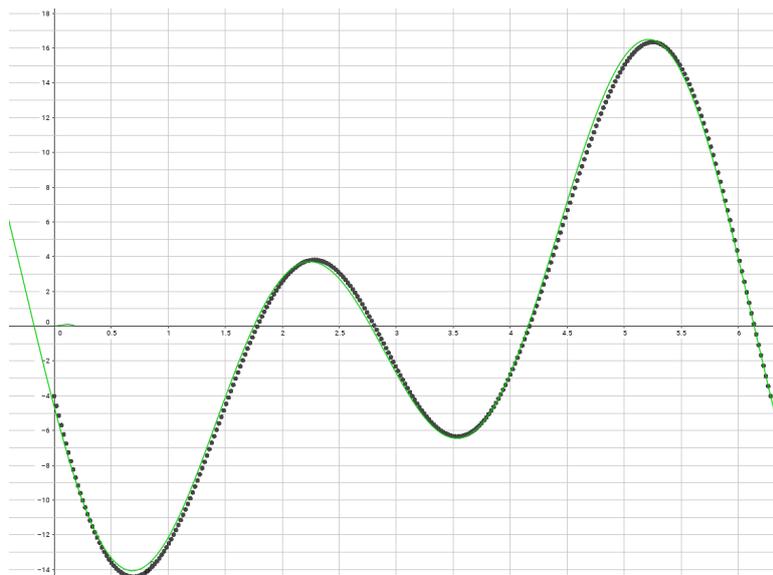


Abb.15 : Zeitgleichung

In der Nähe des Perihelions (3. Jänner) geht die “Armbanduhr” vor, der Fehler akkumuliert sich und baut sich bis zum Aphelion wieder ab und im nächsten halben Jahr läuft es umgekehrt. Die Zeitgleichung (Graph) wird nun so angewendet, dass ihr Wert zur “Armbanduhrzeit” addiert wird, um die lokale wahre Sonnenzeit zu erhalten:

Z.B.: Wie groß ist Abweichung am 4. März? gerechnet wird vom 3. Jänner:

$28+28+4=60$ - dort beträgt der Wert der Zeitgleichung ca. -6.5 Minuten, d.h. um 12Uhr 6.5 Minuten ist Mittag!

2 | Erdbahngleichung

Hier die versprochene Beschäftigung mit der “Erdbahngleichung” 1.6:

$$\dot{\psi}(t) = (1 - \kappa^2)^{-\frac{3}{2}} (1 + \kappa \cos \psi)^2 \quad \psi(0) = 0 \quad \kappa \ll 1 \quad (2.1)$$

Qualitative Überlegungen

Taxonomie: Es handelt sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung (ODE first order) und zwar um eine autonome, d.h. die rechte Seite ist nicht von t abhängig. Normalerweise gilt:

$$\dot{y} = F(x, y) \quad \text{hier} \quad \dot{y} = F(y)$$

Zeichnen wir den Graph $F(y)$ der Steigungen:

Bei einer autonomen ODE 1. Ordnung kümmert man sich um die “kritischen Punkte”, wo gilt

$$F(y) = 0$$

es ist leicht einzusehen, dass es hier keine solchen gibt!

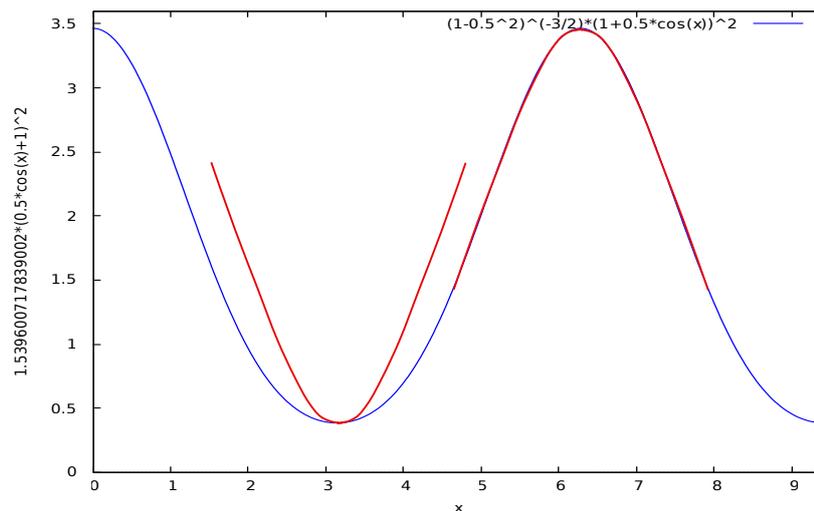


Abb.16 : Rechte Seite der Diffgl. für $\kappa = 0.5$

2. Erdbahngleichung

Wir schauen uns erst einmal die rechte Seite von 2.1 an: Für kleine κ ist der erste Faktor ungefähr 1, der zweite eine periodische "Störung" um 1. Die einfachste Näherung ist also

$$\dot{\psi}(t) \approx 1 \Rightarrow \psi(t) = t$$

- das entspricht einer gleichförmigen Bewegung! Selbst bei $\kappa = 0.5$ wie in Abb. 16 ist dies noch gut zu sehen!

Erzeugt wurde dieser Graph mit folgendem *wxMaxima-Code*;
Die "Nachbehandlung" erfolgte mit *Inkscape*.

```
f(x):=0.75^(-3/2)*(1+0.5*cos(x))^2$  
  
plot2d([f(x)], [x,0,3*pi], [y,0,3.6],  
[legend,"(1-0.5^2)^(-3/2)*(1+0.5*cos(x))^2"])$
```

Wie aus dem Term ersichtlich ist (und auch aus dem Graph) ist die Funktion periodisch mit 2π und symmetrisch um π . Die Steigungen in den "Bögen" sind allerdings verschieden - wie der "rote Graph" deutlich macht - der Bogen links von 2π ist ein anderer als rechts von π (auch wenn in der nächsten Zeichnung dies kaum auffällt!). In π ist außerdem das Minimum (also Wendepunkt von ψ).

Als nächstes schauen wir uns das Richtungsfeld von 2.1 an:

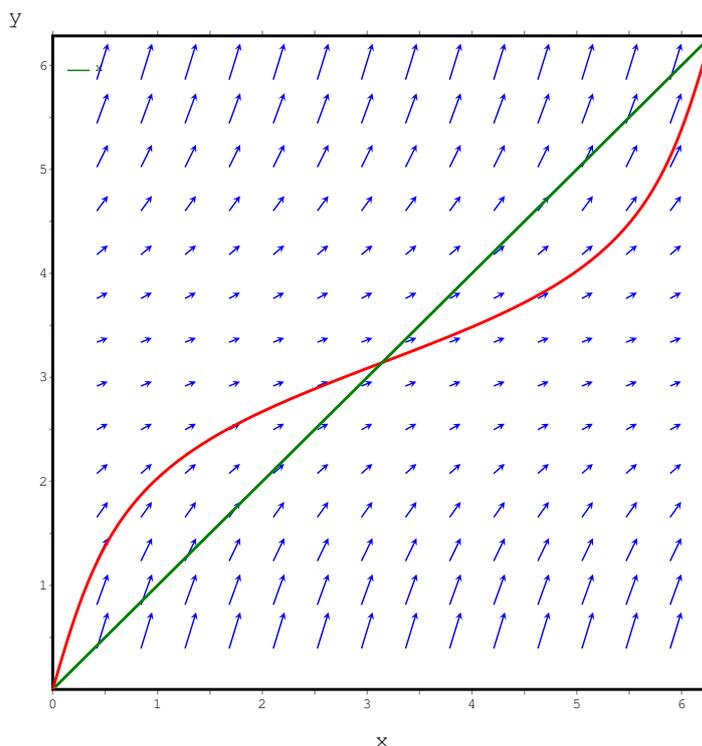


Abb.17 : Richtungsfeld der Diffglg.

Abb. 17 zeigt das Richtungsfeld für $\kappa = 0.5$. Außerdem wurde die spätere Näherung für unser Anfangswertproblem eingezeichnet und zur Orientierung die Funktion für die gleichförmige Bewegung (Gerade).

Erzeugt wurde dieser Graph mit folgendem *wxMaxima-Code* (damit der Befehl `plotdf` (plot direction field) funktioniert, muss das Paket "xmaxima" installiert sein!):

```
plotdf(0.75^(-3/2)*(1+0.5*cos(y))^2, [xfun, "x"],
      [trajectory_at,0,0], [y,0,2*%pi], [x,0,2*%pi])$
```

2.1 Numerisch: Runge-Kutta

Wir verschaffen uns einen Überblick über die Lösung mit dem Runge-Kutta-Verfahren

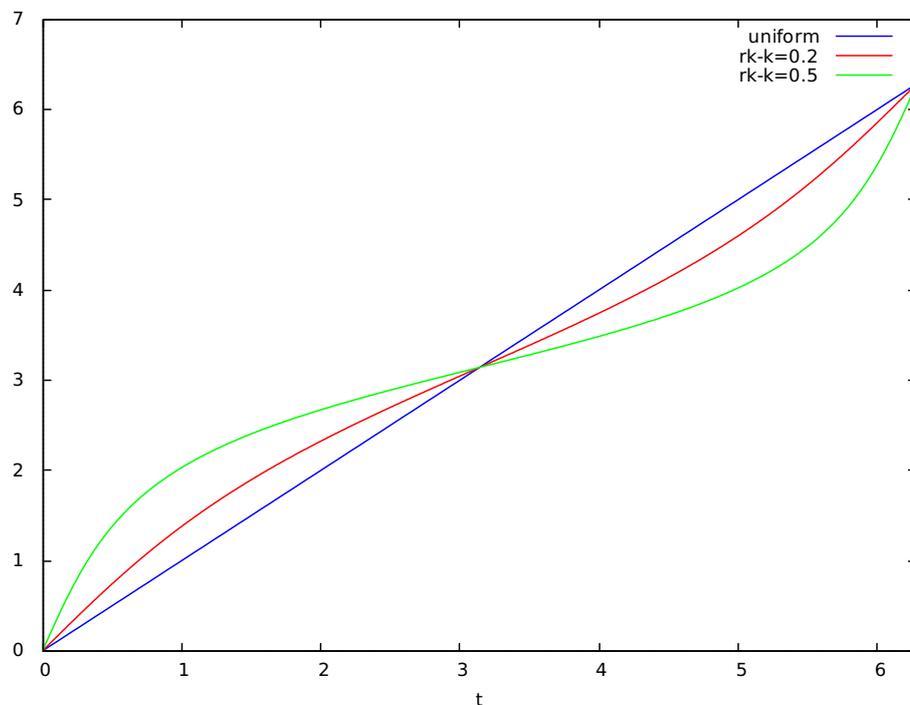


Abb.18 : Runge-Kutta-Verfahren

Auch wenn wir keinen Term für $\psi(t)$ bekommen, so sehen wir doch am Graph einige Eigenschaften:

- Je größer κ , umso größer die Abweichung von der gleichförmigen Kreisbahn
- Im Perihel ($t = 0$ bzw. 2π) und Aphel ($t = \pi$) stimmen die Durchgangspunkte mit der gleichförmigen Bahn (1. Mediane) überein

2. Erdbahngleichung

- $\psi(t)$ ist gegenüber dem Punkt (π, π) zentrisch symmetrisch! (Dies ist leicht an Hand der Eigenschaften von $\dot{\psi}(t)$ einzusehen: Minimum bei π (Wendepunkt für $\psi(t)$), symmetrisch um π)
- Leider sind die “Bögen” selbst nicht symmetrisch - wie man bei $\kappa = 0.5$ erkennen kann

Erzeugt wurde dieser Graph mit folgendem *wxMaxima-Code*:

```
k:0.2$a:(1-k^2)^(-3/2)$
points1:rk(a*(1+k*cos(u))^2,u,0,[t,0,2*%pi,0.01])$
k:0.5$a:(1-k^2)^(-3/2)$
points2:rk(a*(1+k*cos(u))^2,u,0,[t,0,2*%pi,0.01])$
plot2d([t,[discrete,points1],[discrete,points2]],
[t,0,2*%pi],[legend,"uniform","rk-k=0.2","rk-k=0.5"])$
```

rk steht natürlich für das Runge-Kutta-Verfahren, angegeben wird der Term für die Ableitungsfunktion, die abhängige Variable, ihr Anfangswert, dann in einer Liste die unabhängige Variable, Startwert und Endwert und schließlich die Schrittweite des Verfahrens.

2.2 Numerisch: Integrieren mit Taylor-Näherung

Als nächstes verschaffen wir uns eine Näherung für $\psi(t)^{-1}$ indem wir das Integral mit einer Taylorreihenentwicklung nach κ lösen:

$$\int \underbrace{(1 + \kappa \cos \psi)^{-2}}_{f(\kappa) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \kappa^i} d\psi(t) = (1 - \kappa^2)^{-\frac{3}{2}} t$$

Wir führen das in *wxMaxima* durch:

Wir entwickeln den Integranden nach κ bis zum Grad 3 an der Stelle 0

```
(%i1) define(f(x),taylor((1+k*cos(x))^(-2),k,0,3));
```

```
(%o1) f(x) := 1 - 2 cos(x) k + 3 cos(x)^2 k^2 - 4 cos(x)^3 k^3 + ...
```

Wir integrieren

```
(%i2) ratsimp(define(F(x),integrate(f(x),x)));
```

```
(%o2) F(x) := 
$$\frac{9k^2 \sin(2x) + 16k^3 \sin(x)^3 + (-48k^3 - 24k) \sin(x) + (18k^2 + 12)x}{12}$$

```

Setzen jetzt κ und den Koeffizienten

```
(%i3) k:0.2;
```

```
(%o3) 0.2
```

```
(%i4) a:(1-k^2)^(-3/2);
```

```
(%o4) 1.063146589749643
```

Hier die Gleichung, die es fur t aufzulosen gilt

```
(%i5) eq1:F(%psi)=a*t, numer;
```

```
(%o5) .06 (0.5 sin(2 psi) + psi) - .032 (sin(psi) - .333 sin(psi)^3) - 0.4 sin(psi) + psi = 1.063146589749643 t
```

```
(%i6) define(U(%psi), F(%psi)/a), numer;
```

```
(%o6) U(psi) := .940604061 (.06 (0.5 sin(2 psi) + psi) - .032 (sin(psi) - .333 sin(psi)^3) - 0.4 sin(psi) + psi)
```

Hier der Term fur die Umkehrfunktion $\psi(t)^{-1}$

```
(%i7) expand(U(%psi));
```

```
(%o7) .0282 sin(2 psi) + 0.01 sin(psi)^3 - .4063 sin(psi) + .99704 psi
```

Wir basteln eine Argument und Werteliste der Umkehrfunktion und geben diese Listen im Plot-Befehl weiter unter in umgekehrter Reihenfolge an

```
(%i8) args:makelist(i*0.1, i, 0, 62)$
```

```
(%i9) vals:map(lambda([x], U(x)), args), numer$
```

Hier wieder das Runge-Kutta-Verfahren zum Vergleich

```
(%i10) points1:rk(a*(1+k*cos(u))^2, u, 0, [t, 0, 2*pi, 0.01])$
```

Jetzt schauen wir uns das an:

```
(%i11) plot2d([x, U(x)], [discrete, vals, args], [discrete, points1], [x, 0, %pi],
  [style, lines, [lines, 0, 0], [points, 1, 5, 6], lines],
  [gnuplot_preamble, "set key bottom"],
  [legend, "uniform", "Umkehrfkt", "Taylor-Numerisch", "Runge-Kutta"]);
```

2. Erdbahngleichung

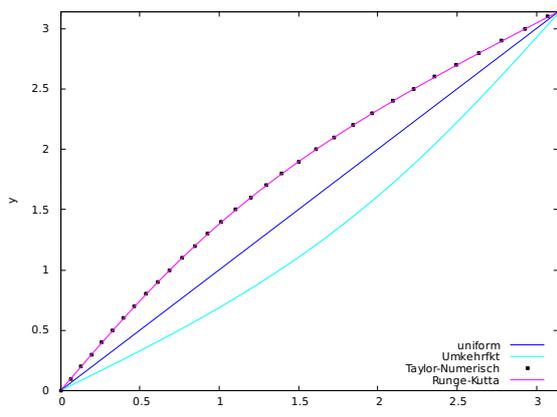


Abb.19 : Taylor Näherung

Selbst für $\kappa = 0.2$ ist unsere Lösung vom Runge-Kutta-Verfahren nicht mehr zu unterscheiden. Dies muss erst recht für kleinere κ gelten. Die Fortsetzung des Graphen können wir über die zentrische Symmetrie bekommen.

Nachteil: Wir haben nur einen Näherungsterm für die Umkehrfunktion statt für $\psi(t)$

2.3 Näherungsterm für $\psi(t)$

Die obige Reihenentwicklung der Umkehrfunktion bringt uns auf die Idee, ob wir $\psi(t)$ - das ja nur eine leichte Störung $\delta(t)$ der identischen Funktion ist - direkt als Reihe entwickeln können:

$$\psi(t) \approx t + \underbrace{\kappa f_1(t) + \kappa^2 f_2(t)}_{\delta(t)}$$

da wir später $\cos \psi$ benötigen und dies mit κ multipliziert wird, berücksichtigen wir bei der Näherung nur die linearen Terme in κ :

$$\cos \psi = \cos(t + \delta) = \underbrace{\cos t}_{\approx 1} \underbrace{\cos \delta}_{\approx 1} - \underbrace{\sin t}_{\approx \delta} \underbrace{\sin \delta}_{\approx \delta} \approx \cos t - \sin t (\kappa f_1(t)) \Rightarrow$$

$$1 + \kappa \cos \psi \approx 1 + \kappa \cos t - \kappa^2 f_1(t) \sin t \Rightarrow$$

$$(1 + \kappa \cos \psi)^2 \approx 1 + 2\kappa \cos t - 2\kappa^2 f_1(t) \sin t + \kappa^2 \cos^2 t$$

Jetzt vereinfachen wir noch den Koeffizienten $(1 - \kappa^2)^{-\frac{3}{2}}$: nach Taylor gilt

$$(1 - x)^{-\frac{3}{2}} \approx 1 + \frac{3}{2}x \Rightarrow (1 - \kappa^2)^{-\frac{3}{2}} \approx 1 + \frac{3}{2}\kappa^2$$

damit ergibt sich

$$(1 - \kappa^2)^{-\frac{3}{2}} (1 + \kappa \cos \psi)^2 \approx 1 + 2\kappa \cos t - 2\kappa^2 f_1(t) \sin t + \kappa^2 \cos^2 t + \frac{3}{2}\kappa^2$$

Jetzt nehmen wir die Differentialgleichung als Bedingung

$$0 = \dot{\psi}(t) - (1 - \kappa^2)^{-\frac{3}{2}} (1 + \kappa \cos \psi)^2 =$$

$$= 1 + \kappa \dot{f}_1(t) + \kappa^2 \dot{f}_2(t) - \left(1 + 2\kappa \cos t - 2\kappa^2 f_1(t) \sin t + \kappa^2 \cos^2 t + \frac{3}{2}\kappa^2 \right) =$$

$$= \boxed{\kappa(\dot{f}_1(t) - 2 \cos t) + \kappa^2 \left(\dot{f}_2(t) + 2f_1(t) \sin t - \cos^2 t - \frac{3}{2} \right) = 0}$$

Da linke und rechte Seite für alle Zeiten verschwinden müssen, haben wir Bedingungen für f_1 und f_2 gefunden - das sind zwar wieder Differentialgleichungen - die sind aber trivial:

$$(1) \quad \dot{f}_1(t) = 2 \cos t \Rightarrow f_1(t) = 2 \sin t$$

$$(2) \quad \dot{f}_2(t) = \underbrace{\cos^2 t}_{1-\sin^2 t} - 4 \sin^2 t + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \left(-2 \sin^2 t + \underbrace{1}_{\sin^2 t + \cos^2 t} \right) = \frac{5}{2} (\cos 2t) \Rightarrow \\ \Rightarrow f_2(t) = \frac{5}{4} \sin 2t$$

Also halten wir fest

$$\psi(t) \approx t + \underbrace{\kappa 2 \sin t + \kappa^2 \frac{5}{4} \sin 2t}_{\delta(t)}$$

Wie gut ist nun unsere Näherung?

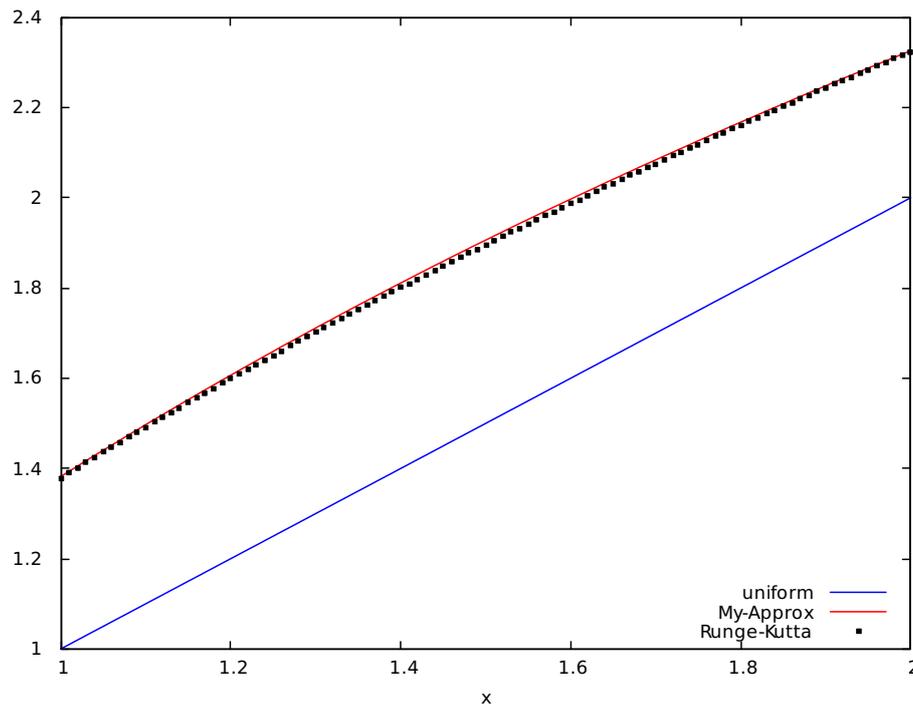


Abb.20 : Term Näherung für $\Psi(t)$

Wir sehen selbst für $\kappa = 0.2$ ist unser Näherungsterm vom Runge-Kutta-Verfahren kaum mehr zu unterscheiden, obwohl der Graph bei der stärksten Abweichung (ca. $t = 1.5$) gezeichnet wurde. Bei "unserem" $\kappa = 0.016$ wäre ein Unterschied zum Runge-Kutta-Graphen nicht mehr erkennbar!

2. Erdbahngleichung

Hier noch der *wxMaxima*-Code:

```
(%i1) k:0.2$a:(1-k^2)^(-3/2)$
(%i3) p(t):=t+2*k*sin(t)+5/4*k^2*sin(2*t);
(%o3) p(t):=t+2k sin(t)+5/4 k^2 sin(2t)
(%i4) points1:rk(a*(1+k*cos(u))^2,u,0,[t,0,2*%pi,0.01])$
--> plot2d([x,p(x), [discrete, points1]], [x,1,2],
           [style, lines, lines, [points,0,5,6]],
           [gnuplot_preamble,"set key bottom"],
           [legend,"uniform","My-Approx","Runge-Kutta"])$
```

2.4 Alternative Herleitung von $\psi(t)$

1. Wir vereinfachen den Koeffizienten $(1 - \kappa^2)^{-\frac{3}{2}}$ nach Taylor:

$$(1 - x)^{-\frac{3}{2}} \approx 1 + \frac{3}{2}x \Rightarrow (1 - \kappa^2)^{-\frac{3}{2}} \approx 1 + \frac{3}{2}\kappa^2$$

2. Es gilt die Identität (wenn Sie wollen die Fourierreihenentwicklung)

$$2 \cos^2 x = \cos 2x + 1$$

3. Damit ergibt sich mit 1) und 2)

$$\begin{aligned} (1 - \kappa^2)^{-\frac{3}{2}} (1 + \kappa \cos \psi)^2 &\approx \left(1 + \frac{3}{2}\kappa^2\right) (1 + 2\kappa \cos \psi + \kappa^2 \cos^2 \psi) = \\ &= \left(1 + \frac{3}{2}\kappa^2\right) \left(1 + 2\kappa \cos \psi + \kappa^2 \frac{1}{2} (\cos 2\psi + 1)\right) \end{aligned}$$

4. Ausmultiplizieren und höhere Terme als κ^2 vernachlässigen und $\psi \approx t$:

$$\dot{\psi}(t) \approx 1 + 2\kappa \cos t + 2\kappa^2 + \kappa^2 \frac{1}{2} \cos 2t$$

5. Jetzt gilt aber $\psi(\pi) = \pi$ und $\psi(2\pi) = 2\pi$, d. h. aber, dass die Zusatzterme neben 1 dort verschwinden (bzw. sich aufheben) müssen, wenn wir $2\kappa^2$ einfach weglassen ist das zwar der Fall, aber wir lassen den "größeren Teil" der κ^2 -Glieder weg, da ist es besser wir schlagen ihn zum Cosinusterm dazu

$$\dot{\psi}(t) \approx 1 + 2\kappa \cos t + \frac{5}{2}\kappa^2 \cos 2t$$

das ist zwar etwas ungenauer, aber damit sind unserer Bedingungen erfüllt - die Integration liefert dann unsere Näherung!

2.5 Historische Variante von Kepler

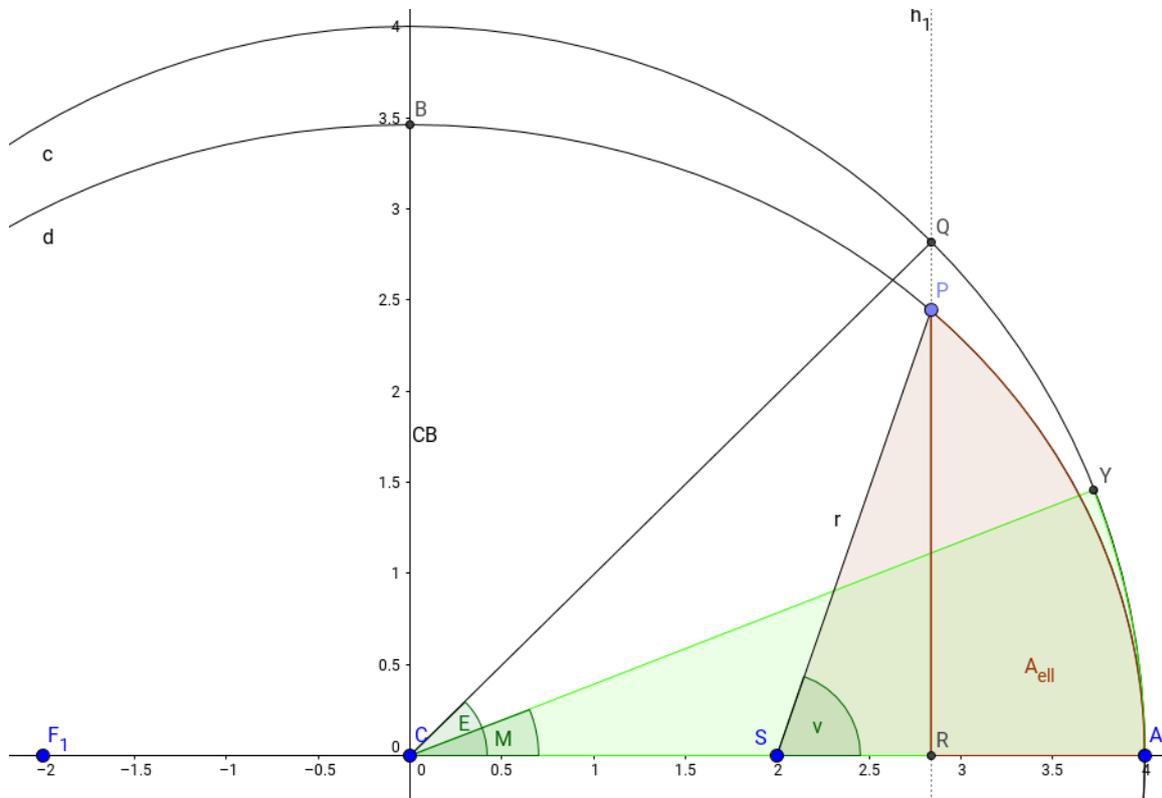


Abb.21 : Keplers Nomenklatur

d	Umlaufellipse (des Planeten)
S	Brennpunkt (Sonne)
c	Umkreis
C	Mittelpunkt (Ellipse/Umkreis)
CA	große Halbachse a
CB	kleine Halbachse b
v	reale Anomalie (bei uns ψ)
P	umlaufender Planet
E	exzentrische Anomalie
M	mittlere Anomalie

M ist ein mit der Zeit linear zunehmender Winkel (Y bewegt sich gleichförmig) - wie wir zeigen werden. Kepler gelang folgende Berechnungskette:

$$M(t) = \frac{2\pi}{T}t \rightarrow E(t) = f(M(t)) \rightarrow v(t) = g(E(t))$$

Obwohl es keine elementare Darstellung $v(t) = \psi(t)$ gibt, ist das Problem über diese Zwischenschritte lösbar. Meine Hochachtung vor Kepler. Erst später gelang Lagrange bzw. Bessler eine Darstellung von $v(t)$, die allerdings alles andere als elementar ist.

2. Erdbahngleichung

Argumentationskette

- Kreissektor CYA (Fläche A_{CYA}) hat pro Zeiteinheit immer den gleichen Flächenzuwachs (2. Kepler) - daher bewegt sich Y gleichförmig $M = \frac{2\pi}{T}t$ (T ist Umlaufdauer)

- $\overline{PR} = \frac{b}{a}\overline{QR}$ - die Ellipse ist eine affine Abbildung des Kreises!

- Laut Kepler ist der Flächenzuwachs von A_{PSA} pro Zeit konstant, formal

$$A_{PSA}(t) = k \cdot t \quad \text{und} \quad A_{PSA}(T) = ab\pi \Rightarrow A_{PSA}(t) = \frac{2\pi}{T} \frac{ab}{2} = M \frac{ab}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{2}{ab} A_{PSA}} \quad (2.2)$$

- Wir zerlegen jetzt A_{PSA}

$$A_{PSA} = A_{PRA} + A_{PSR} = \frac{b}{a} \underbrace{A_{QRA}}_{\text{Sektor-Dreieck}} + A_{PSR} =$$

$$= \frac{b}{a} \left[\frac{a^2}{2} E - \frac{1}{2} (e + r \cos \nu) \overline{QR} \right] + \frac{1}{2} (r \cos \nu) \frac{b}{a} \overline{QR} \quad \underbrace{=}_{\overline{QR} = a \sin E}$$

$$= \frac{ab}{2} \left(E - \frac{e}{a} \sin E \right) = \boxed{\frac{ab}{2} (E - \varepsilon \sin E) = A_{PSA}} \quad (2.3)$$

- Wir setzen 2.3 in 2.2 ein und erhalten die "Kepler-Gleichung":

$$\boxed{M = E - \varepsilon \sin E} \quad (2.4)$$

Für Kepler war hier Schluss - nur numerisch gelang eine Lösung von 2.4.

Um die Argumentationskette nicht zu durchbrechen, setzen wir voraus $E(M(t))$ sei bekannt.

- Da bei der Erde $T = 2\pi$ gilt, wird durch ableiten nach t aus 2.4

$$1 = \dot{E}(t)(1 - \varepsilon \cos E(t)) \Rightarrow (1 - \varepsilon \cos E(t)) = \dot{E}(t)^{-1} \quad (2.5)$$

- Aus der Ellipsengleichung $r(\psi) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \psi}$, $a = 1$ und $\kappa = \varepsilon$ folgt

$$1 + \varepsilon \cos \psi = \frac{1 - \varepsilon^2}{r} \quad \text{damit wird 2.1 zu} \quad \dot{\psi}(t) = (1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} r^{-2} \quad (2.6)$$

- Aus Abb. 21 sehen wir, dass man die Länge \overline{CR} auf 2 verschiedene Arten darstellen kann

$$\overline{CR} = a \cos E = e + r \cos v \Rightarrow r \cos v = a \cos E - e \quad (2.7)$$

- Gleichung 2.7 setzen wir in die Ellipsengleichung ein:

$$\begin{aligned} r(v) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos v} &\Rightarrow r + \varepsilon r \cos v = a(1 - \varepsilon^2) \xrightarrow{2.7} r + \frac{e}{a}(a \cos E - e) = a - \frac{e^2}{a} \Rightarrow \\ &\Rightarrow r = a - e \cos E = a(1 - \varepsilon \cos E) \xrightarrow{2.5} r = a \dot{E}(t)^{-1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

- Mit 2.8 und $a = 1$ wird 2.6 zu

$$\dot{\psi}(t) = (1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \dot{E}^2 \xrightarrow{\text{Taylor}} \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\right) \dot{E}^2 \quad (2.9)$$

Kennen wir $E(t)$ können wir vielleicht durch Integrieren $\psi(t)$ zu erhalten. Jetzt wird es Zeit aus 2.4 einen Ausdruck für $E(t)$ herzuleiten. Wir benutzen dazu ein Theorem von Lagrange.

Theorem 2.1 Lagrange reversion theorem

Hat die Gleichung

$$E = M + \varepsilon \phi(E)$$

eine Lösung, so gilt für eine Funktion f

$$f(E) = f(M) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} \{f'(M) [\phi(M)]^n\}$$

Das ist genau das, was wir brauchen um die Kepler-Gleichung zu knacken, mit $f(x) = id(x) = x$ und $\phi = \sin$. Um die Konvergenz brauchen wir uns kein Kopfzerbrechen machen, da $\varepsilon \ll 1$ und \sin beschränkt ist! (Bei der Erde gilt $M = t$)

2. Erdbahngleichung

So jetzt liegt der Weg klar vor uns:

- Wir berechnen mit Lagrange näherungsweise $E(t)$
- Mit 2.9 näherungsweise $\dot{\psi}(t) = g(t)$, wobei wir nur Terme einer maximalen Ordnung von ε berücksichtigen
- Folgender Punkt kann mit wxMaxima übersprungen werden, da man $\dot{\psi}(t) = g(t)$ mit `trigreduce` "vereinfachen" kann. Zu Demonstrationszwecken hab ich es im folgenden Programm belassen, obwohl dieser Teil redundant ist!
Anschließend unterwerfen wir diese gerade Funktion (nur Cosinusterme kommen in Frage) einer Fourierreihenentwicklung:

$$g(t) = a_0 + a_1 \cos(t) + a_2 \cos(2t) + a_3 \cos(3t) + \dots \left| \int_0^{2\pi} \cos(i \cdot t) dt \quad i \in \{0, 1, 2, \dots\} \right.$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} g(t) dt = a_0 2\pi \quad \text{und}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(i \cdot t) \cos(j \cdot t) dt = \begin{cases} 0, & \text{für } i \neq j \\ \pi, & \text{für } i = j \end{cases}$$

- Nach Berechnung der Fourierkoeffizienten $a_0 \dots a_n$ integrieren wir um $\psi(t)$ zu erhalten.

So das setzen wir jetzt in *wxMaxima* um:

Bis zur welchen Potenz von ε wollen wir Lagrange anwenden?

(%i1) `eps_max_order:3;`

3

(eps_max_order)

Lagrange's Theorem für E

(%i2) `E_1:M+sum(e^n/n!*diff(sin(M)^n,M,n-1),n,1,eps_max_order);`

$$\frac{(6\cos(M)^2 \sin(M) - 3\sin(M)^3) e^3}{6} + \cos(M) \sin(M) e^2 + \sin(M)e + M \quad (\text{E}_1)$$

Wir vereinfachen und bekommen eine Näherungslösung für Keplers Equation

(%i3) `KE:trigreduce(E_1);`

$$\frac{(3 \sin(3M) - \sin(M)) e^3}{8} + \frac{\sin(2M) e^2}{2} + \sin(M)e + M \quad (\text{KE})$$

Für die Erde gilt $M = t$

(%i4) `define(E(t),subst(t,M,KE));`

$$E(t) := \frac{e^3 (3 \sin(3t) - \sin(t))}{8} + \frac{e^2 \sin(2t)}{2} + e \sin(t) + t \quad (\%o4)$$

Wir entwickeln den Wurzelfaktor nach Taylor bis zur gewünschten Ordnung

(%i5) eps_factor(e):=taylor(sqrt((1-e^2)),e,0,eps_max_order);

$$\text{eps_factor}(e) := \text{taylor}\left(\sqrt{1-e^2}, e, 0, \text{eps_max_order}\right) \quad (\%o5)$$

(%i6) eps_taylor:expand(sum(coeff(eps_factor(e),e,i)*e^i,i,0,eps_max_order));

$$1 - \frac{e^2}{2} \quad (\text{eps_taylor})$$

Wir ermitteln $\dot{E}(t) = E_{pt}(t)$

(%i7) define(E_pt(t),diff(E(t),t));

$$E_{pt}(t) := \frac{e^3 (9 \cos(3t) - \cos(t))}{8} + e^2 \cos(2t) + e \cos(t) + 1 \quad (\%o7)$$

Unsere Näherung für $\dot{\psi}(t)$

(%i8) T1:eps_taylor*(E_pt(t))^2;

$$\left(1 - \frac{e^2}{2}\right) \left(\frac{e^3 (9 \cos(3t) - \cos(t))}{8} + e^2 \cos(2t) + e \cos(t) + 1\right)^2 \quad (\text{T1})$$

Für Kontrollzwecke können wir uns den Term anschauen - hier ausdrucken hat keinen Sinn

(%i9) h(t):=expand(T1)\$

Wir holen uns die Koeffizienten von e^i expandieren und vereinfachen sie

(%i10) define(g(t),sum(trigreduce(ratsimp(trigexpand(coeff(h(t),e,i))))*e^i,i,0,eps_max_order));

$$g(t) := -\frac{e^3 (\cos(t) - 13 \cos(3t))}{4} + \frac{5e^2 \cos(2t)}{2} + 2e \cos(t) + 1 \quad (\%o10)$$

Wir integrieren "komponentenweise" und bekommen eine Näherung für $\psi(t)$

(%i11) define(psi(t),sum(ratsimp(integrate(coeff(g(t),e,i),t))*e^i,i,0,eps_max_order));

$$\psi(t) := \frac{e^3 (13 \sin(3t) - 3 \sin(t))}{12} + \frac{5e^2 \sin(2t)}{4} + 2e \sin(t) + t \quad (\%o11)$$

zur Probe mit Fourier - wie im Text angegeben!

(%i12) a[0]:(1/(2*%pi)*integrate(g(t),t,0,2*%pi));

$$1 \quad (\%o12)$$

(%i13) declare(n,integer,i,integer,j,integer);

done (%o13)

2. Erdbahngleichung

(%i14) `integrate(cos(i*x)*cos(j*x),x,0,2*%pi);`

$$0 \quad (\%o14)$$

(%i15) `c:=integrate(cos(i*x)*cos(i*x),x,0,2*%pi);`

$$\pi \quad (c)$$

(%i16) `a[n]:=(1/%pi*integrate(g(t)*cos(n*t),t,0,2*%pi));`

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos(nt) dt \quad (\%o16)$$

Die Fourierreihe für $g_f(t) := \dot{\psi}(t)$

(%i17) `define(g_f(t), expand(ratsimp(a[0]+sum(a[i]*cos(i*t),i,1,eps_max_order))));`

$$g_f(t) := \frac{13e^3 \cos(3t)}{4} + \frac{5e^2 \cos(2t)}{2} - \frac{e^3 \cos(t)}{4} + 2e \cos(t) + 1 \quad (\%o17)$$

(%i18) `define(g_f_orderedBy_e_(t),sum(coeff(g_f(t),e,i)*e^i,i,0,eps_max_order));`

$$g_f_orderedBy_e_ (t) := e^3 \left(\frac{13 \cos(3t)}{4} - \frac{\cos(t)}{4} \right) + \frac{5e^2 \cos(2t)}{2} + 2e \cos(t) + 1 \quad (\%o18)$$

(%i19) `define(psi(t),integrate(g_f_orderedBy_e_(t),t));`

$$\psi(t) := e^3 \left(\frac{13 \sin(3t)}{12} - \frac{\sin(t)}{4} \right) + \frac{5e^2 \sin(2t)}{4} + 2e \sin(t) + t \quad (\%o19)$$

Wie wir sehen stimmen %o11 und %o19 überein und sind von der gewünschten Genauigkeit!

2.6 Implementation in Geogebra

Wir benutzen das Koordinatensystem(KS) von Kepler während bei der Gleichung

$$r(\psi) = \frac{a^2 - e^2}{a + e \cos(\psi)}$$

der Ursprung im Brennpunkt S (Sonne) liegt, d.h. wir erhalten die Ellipse in “unserem” KS Mittelpunkt

$$(x(t), y(t)) = r(\psi(t)) \left[\frac{a^2 - e^2}{a + e \cos(\psi(t))} \right] + (e, 0)$$

Die große Halbachse a benutzen wir wieder als Längeneinheit und als Zeitskala benutzen wir $\frac{T}{2\pi}t$ (im Perihel wird gestartet!), sodass wenn unsere Uhr $2\pi \text{ rad} \approx 1256 * 0,005 \text{ rad}$ anzeigt, 1 Umlauf vollendet ist. Der kleinste “Tick” unserer Uhr ist 0.005 rad - damit teilen wir die Umlaufellipse in 1257 Ortspunkte \vec{r}_i (die Position von P (Planet)) ein!

2.6.1 Die Konstruktion

- $a=1$, Schieberegler für $e \in [0, 0.99]$ und $b=\text{sqrt}(a^2-e^2)$
- Schieberegler für unsere Zeit $t \in [0, 2\pi]$, Schrittweite 0.005; $\varepsilon = \frac{e}{a}$
- Ursprung und Scheitelpunkt: $O=(0,0)$ $A=(a,0)$
- Ellipse, Umkreis und Sonnenposition:
 $(x/a)^2+(y/b)^2=1$, $x^2+y^2=a^2$ und $S=(e,0)$
- Jetzt können wir mit der eigentlichen Konstruktion von Kepler beginnen:
 $Y=a*(\cos(t), \sin(t))$
- $M=\text{Angle}(A, O, Y)$
- Jetzt geht es an die Berechnung des Winkels E aus der Kepler-Gleichung:

$$\underbrace{M + \varepsilon \sin E}_{f(E)} = E$$

E ist also ein Fixpunkt von f . Man kann sich vergewissern, dass f die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt und daher eine Iteration gegen E konvergiert - als Startwert wählen wir M

$$f(x)=M+\varepsilon\sin(x) \quad \text{und} \quad E=\text{Iteration}(f, M, 20)$$

- Damit ist Q jetzt festgelegt: $Q=a*(\cos(E), \sin(E))$
- P liegt auf der Ellipse mit $x_P = x_Q$ und seine y -Koordinate y_P hat dasselbe Vorzeichen wie Q :
 $y_P=\text{sqrt}(1-((x(Q)/a)^2)*b*\text{sgn}(y(Q)))$ und $P=(x(Q), y_P)$

Überprüfung des Flächensatzes: Dabei denkt man als Mathematiker sofort an ein Integral, leichter zum Zeichnen ist allerdings ein Polygonzug mit einer Punktliste - nicht so genau, aber für unsere Zwecke reicht es hier.

Wir brauchen also $P(t_i)$ - die Position von P beim i -ten Uhrentick. Dazu basteln wir uns ein Benutzerwerkzeug:

```
output: P
name: getP
```

Geogebra meint für dessen Konstruktion benötigt es den "Zeitwinkel" t , a , e und den Ursprung O - also glauben wir es.

- Die gesamte Punktliste der Umlaufellipse:
 $L_1=\text{Sequence}(\text{getP}(i* 0.005 \text{ rad}, a, e, 0), i, 0, 1257)$
- Wo befinden wir uns gerade?
 $\text{lastIndex}=t / 0.005 \text{ rad} + 1$

2. Erdbahngleichung

- Ellipsensegment als Polygonzug zeichnen:

`L_2=Sequence(Element(L_1, i), i, 1, lastIndex)` und `L_3={S,A}`
`L_{Poly}={L_2,L_3}` und `q1=Polygon(Join(L_{Poly}))`

Geogebra berechnet uns mit `q1` gleich die Fläche des Polygonzugs - eine Untersumme des Integrals

Für $e = 0.7$ ergeben sich z.B.

<code>t[rad]</code>	<code>q1</code>
0.25	0.0875
0.5	0.1767

 - eine gute Übereinstimmung!



Bei der Erdbahn gilt $\varepsilon = 0.0167$ - dann liegt die Umlaufellipse innerhalb der Linie des Umkreises! Beachtlich was Tycho Brahe und Kepler da geleistet haben!



Eine Animation der Konstruktion ist nicht sinnvoll, da sie einen falschen Eindruck vermittelt - die Berechnungen dauern in späteren Umlaufteilen länger - dadurch benötigt der Planet bei der "Simulation" für die zweite Umlaufhälfte mehr Zeit als für die erste (was natürlich nicht stimmt).

Daher habe ich mich entschlossen, die Geschwindigkeit des Planeten durch einen Geschwindigkeitsvektor zu veranschaulichen (die Zeit t muss man manuell "verstellen"):

$$\vec{v}(t_i) \approx \frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i}{t_{i+1} - t_i}$$

- Implementiert mit dem Hilfsvektor

`v_1=scaleFact*Vector(Element(L_1, lastIndex), Element(L_1, lastIndex + 1))`

wobei `scaleFact` - wie der Name schon nahelegt - ein Skalierungsfaktor für die Vektorlänge ist. Und dann der "eigentliche" Vektor

`velocity = Vector(P, P + v1)`

So jetzt bleibt noch die "Approximation" für $\varepsilon < 0.2$ zu überprüfen:

- $\psi = \varepsilon^3 / 12 * (13 * \sin(3*t) - 3 * \sin(t)) + 5/4 * \varepsilon^2 * \sin(2*t) + 2 * \varepsilon * \sin(t) + t$

- $r = (a^2 - e^2) / (a + e * \cos(\psi))$

- $P_{\text{Approx}} = r * (\cos(\psi), \sin(\psi)) + (e, 0)$

Man sieht, dass unsere Formel die Planetsposition ganz gut wiedergibt für kleine ε !
Das vollständige Arbeitsblatt bei [https://www.geogebra.org/m/gQX7Z838!](https://www.geogebra.org/m/gQX7Z838)



Wie kommt man von Umlaufdauer T , großer Halbachse a und Exzentrizität e auf die tatsächliche Planetenposition?