EJERCICIO A

PROBLEMA 3.

a) Calcula los máximos y mínimos absolutos de la función *f(x)* = $x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ en el intervalo [1 , 4]. Justifica que los puntos encontrados son máximos o mínimos absolutos.

b) Estudia la continuidad en el intervalo [0,4] de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & 0 \le x < 1 \\ x^3 - 6x^2 + 9x + 1 & 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

Solución:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

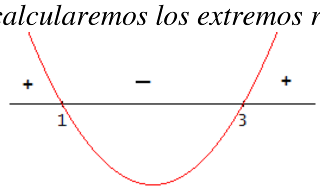
Calculemos, previamente, los extremos relativos de esta función polinómica.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$3x^2 - 12x + 9 = 0$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{4+2}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Estudiando el signo de f´ calcularemos los extremos relativos de f. Lo haremos gráficamente

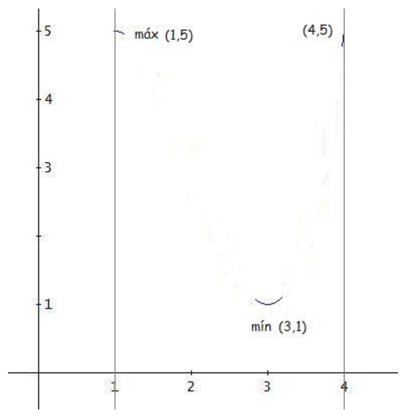


Por lo que f(x) tiene un máximo relativo en x = 1   y   un mínimo relativo en x = 3.

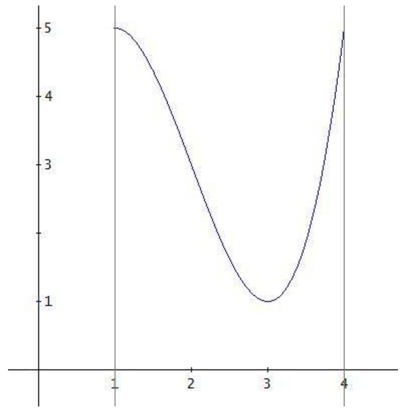
Para encontrar los máximos y mínimos absolutos de f(x) en [1 , 4] representaremos, de forma aproximada, f(x) en este intervalo.

x	$f(x)$
1	$1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 1 = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$ *máx. rel.*
3	$3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 1 = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$ *mín. rel.*
4	$4^3 - 6 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 + 1 = 64 - 96 + 36 + 1 = 5$

Representando los datos de que disponemos:



La función f(x) en [1,4] será:



Por lo tanto la función f(x) en el intervalo [1 , 4] tiene:

un mínimo absoluto en el punto (3 , 1)   y

dos máximos absolutos en los puntos (1 , 5)   y   (4 , 5)

b) *La función de la que debemos estudiar su continuidad está definida "a trozos" por lo que estudiaremos su continuidad en cada trozo y en los puntos de cambio de definición.*

Para $0 \le x < 1$, $f(x) = 2x + 3$, *es un polinomio luego es continua*
Para $1 < x \le 4$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, *es un polinomio luego es continua*
Para $x = 1$, *en* $x = 1$ *hay un cambio de definición, procedemos como sigue,*

a) $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 1 = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$

b) $$\lim_{x \to 1} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x+3) = 2 \cdot 1 + 3 = 5 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(x^3 - 6x^2 + 9x + 1\right) = 5 \end{array} \right\} = 5$$

c) *Función y límite coinciden*

En consecuencia f(x) es continua en x = 1.

Luego hemos obtenido que f(x) es continua en el intervalo [1 , 4]