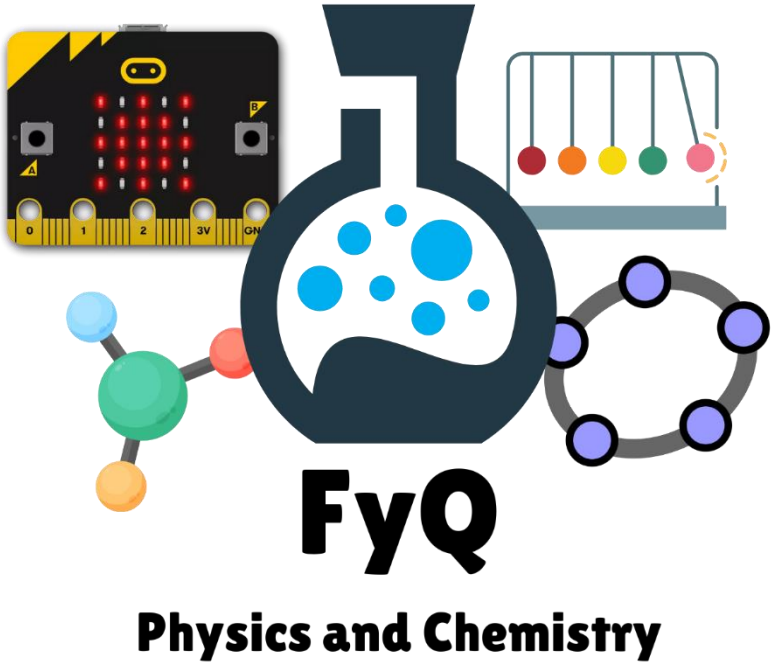
CURSO 2023-2024



2ºESO
Maristas Granada

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 2: COMPRENDEMOS Y ORGANIZAMOS LA INFORMACIÓN: LEER TE CAMBIA LA VIDA

FÍSICA Y QUÍMICA 2ºESO

COLEGIO MARISTA LA INMACULADA
CALLE SÓCRATES, 8
18002 - GRANADA

Índice

0. Ubicación en la programación 2
1. ¿Qué necesitamos saber previamente? 3
1.1. Concepto de Ciencia 3
1.2. ¿Qué es un dato objetivo verificable experimentalmente? 3
1.3. Fases del método científico 3
The scientific method – Rap 4
1.4. Error absoluto 4
1.5. Error relativo 5
1.6. Ejemplo para comprender el método científico y el cálculo de errores: el número pi 5
Actividad manipulativa para obtener el número pi a partir del perímetro de una circunferencia 6
Actividad manipulativa para obtener el área de un círculo dividiéndolo en triangulitos. 6
Actividad manipulativa para relacionar el área de un cuadrado con el área del círculo inscrito 8
1.7. Divisores de un número. Concepto de máximo común divisor 10
Actividad manipulativa para comprender el concepto de divisor: policubos 11
Concepto de M.C.D. de dos o más números 11
Factorizar con números primos y obtener M.C.D. con policubos 12
1.8. Múltiplos de un número. Concepto de mínimo común múltiplo 13
Factorizar con números primos y obtener m.c.m. con policubos 13
2. Robótica y pensamiento computacional: Codificar números en base hexadecimal. Concepto de variable 16
3. Simulación matemática con Geogebra: Circle, vertical lines and horizontal lines 19
4. Descripción de la situación de aprendizaje: George´s Secret Key to the Universe (book) 21
5. Productos finales que se evaluarán 22
6. Ejercicios resueltos para practicar y para pensar 23
7. Por si quieres seguir ampliando y aprendiendo 33

0. Ubicación en la programación

Título: Situación de aprendizaje 2. Comprendemos y organizamos la información: leer te cambia la vida

Evaluación: Primera

Temporalidad: 3 semanas

Número de sesiones: 9 horas

Criterios de evaluación: CriEval-FyQ-1.1, CriEval-FyQ-1.2, CriEval-FyQ-1.3, CriEval-FyQ-2.1, CriEval-FyQ-2.2, CriEval-FyQ-2.3, CriEval-FyQ-3.1, CriEval-FyQ-3.2, CriEval-FyQ-3.3, CriEval-FyQ-4.1, CriEval-FyQ-4.2, CriEval-FyQ-5.1, CriEval-FyQ-5.2, CriEval-FyQ-6.1, CriEval-FyQ-6.2

Actividades de evaluación:

- T.E.C.A. (Trabajo Escrito Con Apuntes)
- Cuaderno
- Programación robótica
- Exposición oral
- Simulación con software matemático
- Respuesta oral a preguntas
- Producto audiovisual digital
- Trabajo diario

Índice de contenidos: Concepto de múltiplo y divisor. Números primos y compuestos. Descomposición factorial de un número. Concepto y cálculo de máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Ejercicios prácticos y resolución de problemas de divisibilidad, máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Lectura de textos científicos, para su análisis, comprensión y debate. Concepto de ciencia y de dato verificable experimentalmente. Fases del método científico. Error absoluto y error relativo. Valor absoluto. Estimación experimental del valor del número pi.

Breve resumen de la situación: Leer de manera comprensiva es fundamental en el desarrollo de cualquier persona. Fomentar el amor por la lectura es uno de los mejores legados que puede ofrecer la escuela.

Los alumnos de 2ºESO deben organizar una “lectura teatralizada” sobre el libro de lectura de clase, para estimular la curiosidad por las historias y los libros sobre ciencia. Además trabajaremos la exposición oral y manipulativa de contenidos científicos, dirigido a alumnos de Primaria.

Alternamos trabajo individual con trabajo grupal a lo largo de las distintas sesiones.

No hay solución única al reto que se plantea. Pero sí hay lecturas teatralizadas y exposiciones mejores organizadas que otras, con un guion más elaborado que otras y con una ejecución más clara, acertada y pedagógica que otras.

1. ¿Qué necesitamos saber previamente?

1.1. Concepto de Ciencia

La Ciencia es el conjunto de conocimientos objetivos y verificables experimentalmente que el ser humano posee sobre la naturaleza y la sociedad de la que forma parte.

1.2. ¿Qué es un dato objetivo verificable experimentalmente?

Un dato objetivo significa que no es inventado por el ser humano y que no es creado ni por sus opiniones ni por sus sentimientos.

Un dato verificable experimentalmente significa que puedo realizar un experimento para comprobar su validez.

Por lo tanto, un dato objetivo verificable experimentalmente es todo aquella afirmación que se puede demostrar gracias a un experimento que no depende de la ideología ni de los prejuicios de los científicos que lo realizan.

1.3. Fases del método científico

El método científico es el proceso que siguen los científicos para dar respuesta a sus interrogantes o hipótesis.

Una hipótesis es una idea inicial que debemos determinar si es verdadera o falsa, con ayuda de un montaje experimental.

Los pasos ordenados que definen el método científico son:

1. **Observación inicial ante algo que nos resulta curioso**. Algo despierta nuestra curiosidad y lo analizamos. Si es algo sensorial, lo tocamos, lo miramos y lo medimos. Si no lo tenemos delante de nosotros, pensamos en él y nos lo imaginamos mentalmente. La observación debe ser detenida y concisa. Si no nos planteamos preguntas iniciales interesantes, las conclusiones serán malas y de poca importancia.
2. **Hipótesis**. Es la explicación que se le da al hecho o fenómeno observado, antes de realizar cualquier comprobación experimental. Puede haber varias hipótesis para un mismo acontecimiento. Las hipótesis tienen que ser sometidas a experimentación para confirmar su veracidad o falsedad.
3. **Experimentación**. Los experimentos nos permiten probar la validez de las hipótesis planteadas o descartarlas, parcialmente o en su totalidad. Miden valores objetivos y medibles de nuestra realidad a estudiar. Un experimento debe ser claro, de tal forma que cualquier científico que lo desee pueda seguir los pasos que indiquemos para reproducirlo.
4. **Conclusiones tras estudiar los resultados experimentales (teorías científicas)**. Se establecen conclusiones a partir de aquellas hipótesis con más probabilidad de confirmarse como ciertas a la luz de los resultados obtenidos en el laboratorio. Una conclusión o teoría científica está formada por un conjunto de afirmaciones que responden a los interrogantes de la observación inicial.
5. **Ley**. Una conclusión o teoría se convierte en ley cuando científicos de todas las partes del mundo, y durante varios años, confirman experimentalmente las mismas hipótesis.

The scientific method – Rap

Watch the video below and fill in the blanks with the lyrics of the song (teacher will give you a document to complete the blanks).

https://www.youtube.com/watch?v=DChofjUH488



The song describes the scientific method phases:

- Observe
- Hypothesize
- Experiment
- Analyze
- Report: It is a scientific paper that explains the conclusions to scientists from all over the world. It is a requisite for the conclusions to become universal law.

1.4. Error absoluto

En toda medida experimental aparecen errores. Imagina que científicos de todo el mundo han establecido una ley científica. Por ejemplo: el cociente entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro se conoce como número pi, y su valor es igual a 3,141592… infinitos decimales sin repetición. Y tú realizas un experimento para confirmar los primeros cuatro decimales del número pi.

El valor asumido por los científicos de todo el mundo se denomina "valor verdadero" o "valor teórico". Si redondeamos a la cuarta cifra decimal, el "valor teórico" del número pi será el famoso 3,1416.

El valor que obtienes en tu experimento se conoce como "valor experimental". ¿Cómo medir de forma objetiva si tu "valor experimental" está próximo del "valor teórico"? Con el concepto de error absoluto.

El error absoluto es la diferencia, en valor absoluto, entre el "valor teórico" y el "valor experimental".

$$Error\ absoluto: E = |Valor\ teórico - Valor\ experimental|$$

Recuerda: el valor absoluto convierte en positivo los resultados que son negativos.

Por ejemplo: si tu "valor experimental" es 3,1523 el error absoluto cometido será:

$$E = |3{,}1416 - 3{,}1523|$$

$$E = |-0{,}0107|$$

$$E = 0{,}0107$$

Si dos científicos realizan dos experimentos para determinar el valor del número pi, el que haya cometido un error absoluto más pequeño será el que habrá realizado un experimento más exacto (es decir, más cercano al valor considerado como verdadero).

En el ejemplo que acabamos de resolver, el valor del número pi no tiene unidades. Pero si el experimento diese como resultado una magnitud física (con su número y su unidad de referencia), el valor del error absoluto también debe ir acompañado de la unidad correspondiente.

1.5. Error relativo

El error relativo es el porcentaje de error que ha cometido nuestro experimento al compararlo con el valor teórico. Es costumbre dar este porcentaje de error en tanto por ciento.

$$error\ relativo: e = \frac{Error\ absoluto}{valor\ teórico} \times 100\%$$

Siguiendo con el ejemplo del apartado anterior, donde ya habíamos calculado el error absoluto de un experimento sobre el número pi, podemos operar de la siguiente forma:

$$e = \frac{0{,}0107}{3{,}1416} \cdot 100\%$$

$$e = 0{,}003406 \cdot 100\%$$

$$e = 0{,}34\ \%$$

Donde hemos escrito el resultado con dos cifras decimales redondeadas. En los porcentajes del error relativo no es costumbre utilizar potencias de base 10 para expresar el resultado final. El error relativo es un porcentaje, por lo tanto no tiene unidades.

Si dos científicos realizan dos experimentos totalmente distintos (por ejemplo, uno busca determinar el valor del número pi y otro busca calcular el radio del planeta Tierra), ¿cómo podemos saber cuál de los dos ha sido más exacto en su trabajo? Con ayuda del error relativo.

Dados dos experimentos completamente distintos uno del otro, el que tenga menor error relativo será el experimento más exacto de los dos (es decir, más próximo al valor considerado como verdadero).

1.6. Ejemplo para comprender el método científico y el cálculo de errores: el número pi

Como aplicación del método científico vamos a obtener, con material manipulativo, una aproximación numérica al número pi.

Es posible que en cursos anteriores te hayan informado de que pi es igual a 3,1415… (infinitos decimales) y que es un número relacionado con el perímetro de la circunferencia. Y también es muy posible que esta información haya quedado en un dato teórico y no lo hayas comprobado experimentalmente. Ahora es el momento de comprobar, con una sencilla experiencia, la veracidad de este dato.

Asumimos como “valor verdadero” o “valor teórico” la cantidad 3,1416 (redondeando al cuarto decimal). Y diseñamos un “experimento” que confirme ese valor. No estamos planteando ninguna hipótesis, porque asumimos como cierto el valor del número pi que lleva miles de años siendo estudiado por científicos y matemáticos de todos los rincones del planeta.

El experimento debe indicar claramente los pasos que deben seguirse y los materiales que se van a utilizar.

Siempre habrá errores. Ya hemos reflexionado sobre esto. No esperes obtener el valor del número pi, con cuatro decimales, sin ningún margen de error, utilizando materiales caseros como los que vamos a emplear.

Actividad manipulativa para obtener el número pi a partir del perímetro de una circunferencia

El número pi es la relación entre el perímetro de la circunferencia y su diámetro.

Da igual el tamaño de la circunferencia. El número pi siempre aparece.

$$\frac{Perímetro}{Diámetro} = \pi$$

¡Vamos a comprobarlo!

Rodea con un hilo el cilindro que te ha entregado el profesor. Y con ayuda de una regla mide la longitud de la parte de hilo que has utilizado para rodear el cilindro. Ese valor es el perímetro de la circunferencia.

Para calcular el diámetro puedes encajar el cilindro entre dos policubos paralelos y medir directamente la distancia de separación entre los policubos.





Dividiendo directamente el valor del perímetro entre el valor de diámetro tendrás una estimación experimental del número pi. Trabaja con las mismas unidades en las dos medidas (o bien todo en centímetros o bien todo en milímetros).

La siguiente animación de Geogebra es otra forma de "visualizar" el valor del perímetro de la circunferencia.

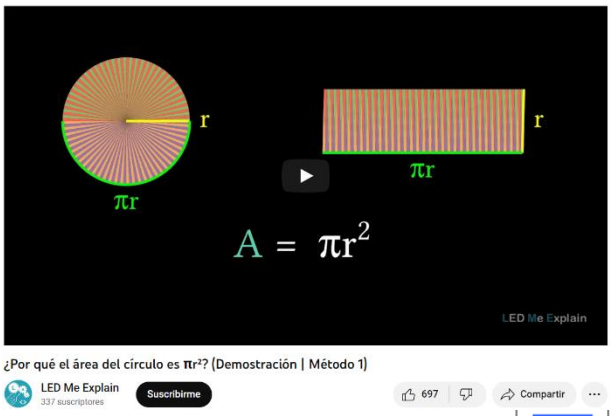
https://www.geogebra.org/m/VdVgERYy#material/ezcmWNjn

Actividad manipulativa para obtener el área de un círculo dividiéndolo en triangulitos.

El siguiente vídeo del canal "LED Me Explain" y la animación Geogebra muestran de manera muy visual el área de un círculo.

https://www.youtube.com/watch?v=qMoP0LAhbkc

https://www.geogebra.org/m/VdVgERYy#material/ryXkqHrR



Un círculo de radio r tiene por área el producto del número pi por el radio al cuadrado. Vamos a comprobarlo, "convirtiendo" la forma del círculo en la forma de un rectángulo (que está formado, a su vez, por triángulos). Obtendremos el área de ese rectángulo simplemente multiplicando su base por su altura.

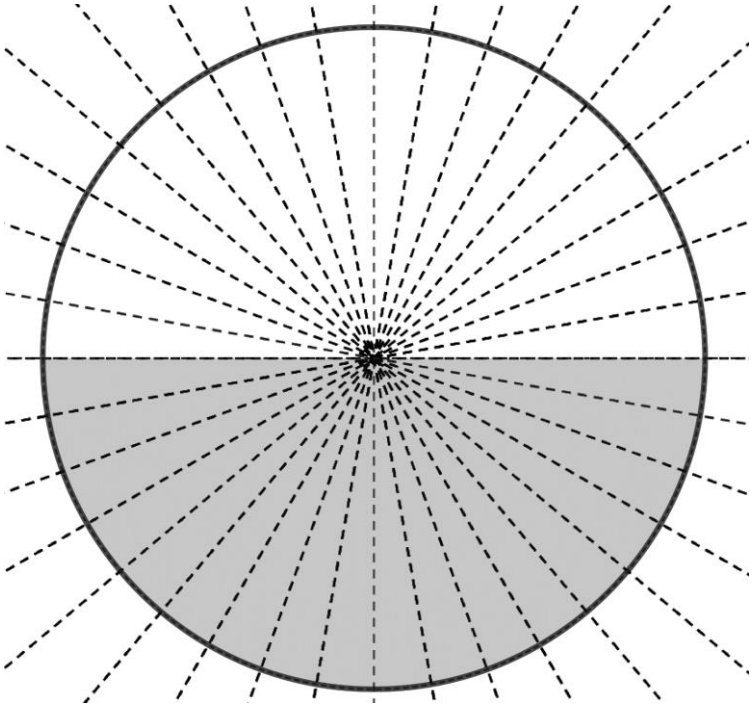
Es muy importante que nos acostumbremos a tomar nota de los vídeos que vemos y sacar ideas claras. De nada sirve ver un vídeo si después… no nos acordamos o no hemos comprendido nada. Si algo no lo comprendes, pregunta al profesor, por favor.

En primer lugar, necesitamos dibujar una circunferencia que dividiremos en partes iguales con rectas que pasen por su centro. La parte inferior de la circunferencia la sombreamos de color gris, dejando la parte superior de color blanco.

En segundo lugar, recordamos el dato que confirmamos con material manipulativo en el apartado anterior: el valor del perímetro de una circunferencia es igual al número pi multiplicado por el diámetro. O lo que es lo mismo: $\pi \cdot 2 \cdot radio$.

Tras recortar convenientemente el círculo, llegaremos a un rectángulo de base $\pi \cdot radio$ y altura igual al $radio$. Y al multiplicar la base por la altura obtendremos la fórmula del área del círculo:

$$Área\ del\ círculo = \pi \cdot radio^2.$$



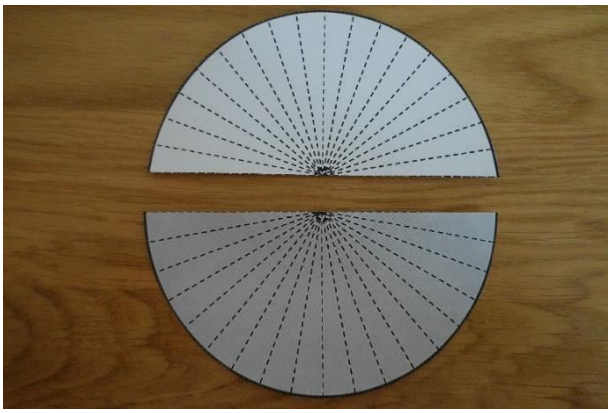
El profesor te entregará una fotocopia del diámetro del círculo superior, con un diámetro de $13{,}3 \pm 0{,}1$ cm. Por lo tanto, el radio será 6,65 cm. El área del círculo será:

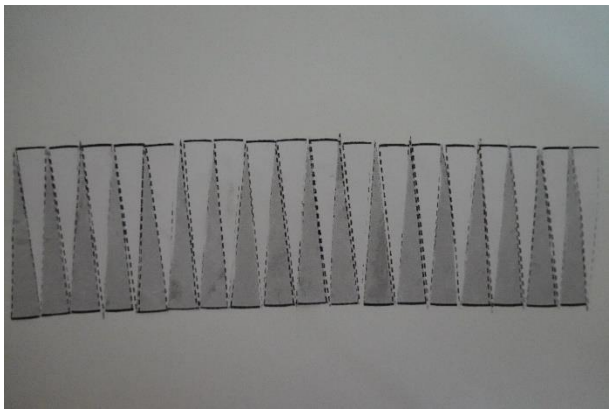
$$Área\ del\ círculo = \pi \cdot radio^2$$

$$Área\ del\ círculo = \pi \cdot (6{,}65)^2$$

$$Área\ del\ círculo = 138{,}93\ cm^2$$

El método experimental para aproximar este valor del área del círculo es el siguiente. Con unas tijeras, recortamos el círculo por la mitad. También cortamos por encima de las líneas discontinuas. Quedarán 18 “triángulos curvos” de color gris y 18 “triángulos curvos” de color blanco.





Con paciencia, y con pegamento, formamos un "rectángulo" alternando triángulos grises y blancos. Con una regla medimos la base y la altura del rectángulo. El área de este rectángulo es una "buena aproximación" al área del círculo.

$$Área\ del\ círculo\ \approx Área\ del\ rectángulo = base \cdot altura$$

El resultado final de las operaciones será nuestra estimación al valor teórico del área de $138{,}93\ cm^2$.

PARA PENSAR 1. ¿Cómo obtendrías el error absoluto de tu experimento sobre el área del círculo? ¿Tiene sentido obtener la media de las áreas de toda la clase para reducir el error experimental?

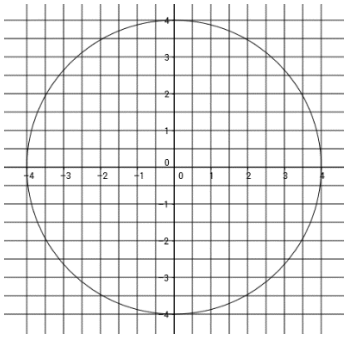
Actividad manipulativa para relacionar el área de un cuadrado con el área del círculo inscrito

Ya sabemos y "hemos visto" que el área de un círculo es igual a:

$$Área\ del\ círculo = \pi \cdot radio^2$$

Vamos a seguir trabajando con esta fórmula y vamos a calcular la relación que existe entre el área de un cuadrado y el área de un círculo contenido en su interior (y que corta una sola vez a cada lado del cuadrado).

Imagina un círculo de radio 4 unidades y con el centro en el origen de coordenadas formado por dos ejes perpendiculares entre sí. Trazamos líneas verticales y horizontales separadas una misma distancia. La separación entre líneas paralelas va a ser de 0,5 unidades.

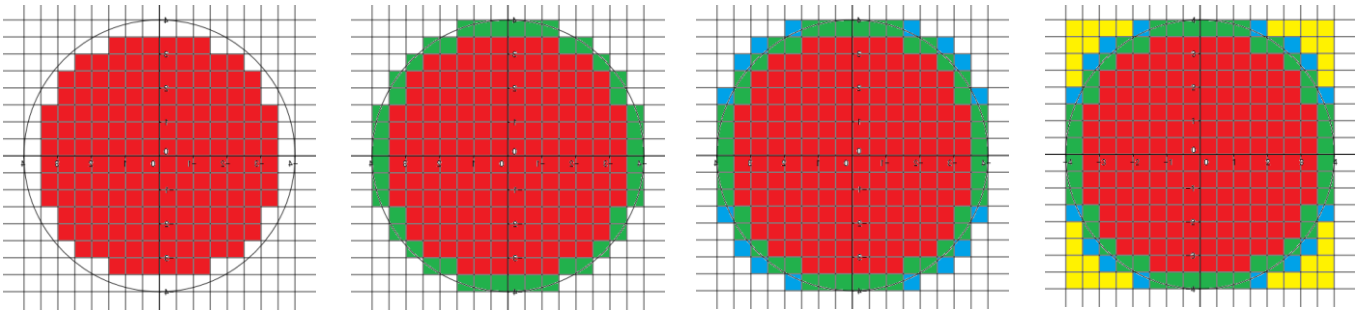


Vamos a colorear en rojo todos lo cuadraditos que estén contenidos por completo dentro del círculo.

Coloreamos en verde aquellos cuadraditos que tienen partes dentro y fuera del círculo, pero que la mayor parte queda dentro del círculo.

En azul indicamos los cuadraditos que tienen partes dentro y fuera del círculo, pero que la mayor parte queda fuera del círculo.

Y en amarillo coloreamos los cuadraditos que están por completo fuera del círculo, hasta completar un gran cuadrado exterior que tenga 8 unidades de base y 8 unidades de altura.



PARA PENSAR 2. ¿Cuántos cuadraditos hay de cada color? Fíjate que la figura posee simetría, lo cual facilita el cálculo final de cuadraditos de cada color.

En las imágenes vemos claramente que el radio del círculo es igual a 4 unidades. Por lo tanto, el diámetro es de 8 unidades (dos veces el radio).

El lado del cuadrado exterior coincide con el diámetro del círculo. Por lo tanto:

$$lado\ del\ cuadrado = 2 \cdot radio$$

Sabemos bien que el área de un cuadrado es el producto de sus lados:

$$Área\ del\ cuadrado = (2 \cdot radio) \cdot (2 \cdot radio)$$

$$Área\ del\ cuadrado = 4 \cdot radio^2$$

Si dividimos el área del cuadrado entre el área del círculo, nos queda:

$$\frac{Área\ del\ cuadrado}{Área\ del\ círculo} = \frac{4 \cdot radio^2}{\pi \cdot radio^2}$$

Como en el numerador hay un producto y en el denominador también hay un producto, podemos simplificar lo que se repite (factor común). Y llegamos a la relación:

$$\frac{Área\ del\ cuadrado}{Área\ del\ círculo} = \frac{4}{\pi}$$

Si consideramos el valor teórico del número pi con cuadro decimales igual a 3,1416, el cociente quedará:

$$\frac{Área\ del\ cuadrado}{Área\ del\ círculo} = \frac{4}{3{,}1416} \approx 1{,}27\ \ldots$$

PARA PENSAR 3. Si en el numerador y en el denominador hubiésemos tenido una suma del tipo $\frac{4 + radio^2}{\pi + radio^2}$, ¿podríamos haber simplificado, eliminando arriba y abajo lo que se repite?

El área del cuadrado exterior es igual a la suma de las áreas de todos los cuadraditos coloreados: 16 x 16 = 256 cuadraditos. El área del círculo se puede aproximar de dos formas:

- Sumar las áreas de los cuadraditos rojos y verdes: 208 cuadraditos
- Sumar las áreas de los cuadraditos rojos, verdes y azules: 224 cuadraditos

Así podremos realizar dos divisiones entre áreas para poder aproximar el valor teórico 1,27. Como el área de cada cuadradito es la misma, independientemente de su color, la división entre áreas se reduce a dividir simplemente número de cuadraditos.

$$\frac{Número\ de\ cuadraditos\ totales}{Número\ de\ cuadraditos\ rojos\ y\ verdes} = \frac{256}{208} \qquad \frac{Número\ de\ cuadraditos\ totales}{Nº\ de\ cuadraditos\ rojos, verdes\ y\ azules} = \frac{256}{224}$$

$$Aproximación\ del\ valor\ \frac{4}{\pi} \approx 1{,}23\ \ldots \qquad Aproximación\ del\ valor\ \frac{4}{\pi} \approx 1{,}14\ \ldots$$

$$Error\ absoluto = |1{,}27 - 1{,}23| = 0{,}04 \qquad Error\ absoluto = |1{,}27 - 1{,}14| = 0{,}13$$

$$error\ relativo = \frac{0{,}04}{1{,}27} \times 100\% = 3{,}15\% \qquad error\ relativo = \frac{0{,}13}{1{,}27} \times 100\% = 10{,}24\%$$

PARA PENSAR 4. Viendo los errores, la aproximación con los cuadraditos rojos y verdes es más exacta que la aproximación con los cuadraditos rojos, verdes y azules. ¿Cómo podríamos mejorar este método para conseguir una menor tasa de error y obtener así resultados más exactos?

1.7. Divisores de un número. Concepto de máximo común divisor

Piensa en dos números naturales. Al primero lo llamamos D y al segundo lo llamamos d.

Si al dividir $\frac{D}{d}$ el resto es 0, decimos que d es un divisor de D. No sacamos decimales en la división.

Si tenemos D=10 y d=2, decimos que 2 es un divisor de 10 porque la división $\frac{10}{2}$ es exacta (cociente 5 y resto 0).

Si tenemos D=11 y d=4, el número 4 no es un divisor de 11 porque la división $\frac{11}{4}$ no es exacta (cociente 2 y resto 3).

Desde Primaria conocemos muchas reglas de divisibilidad:

- Un número siempre es divisible por sí mismo y por 1.
- Todos los números pares son divisibles por 2.
- Todos los números cuyas cifras sumen un múltiplo de 3 son divisibles por 3.
- Todos los números que terminan en 0 o en 5 son divisibles por 5.

En el siguiente recurso online encontrarás una sencilla animación para visualizar el concepto de divisibilidad.

Debes repartir los vasos entre los camareros, de tal forma que todos los camareros lleven el mismo número de vasos.

Si al final no quedan vasos en la estantería, significará que la división es exacta.

https://www.geogebra.org/m/GvFnhxVG

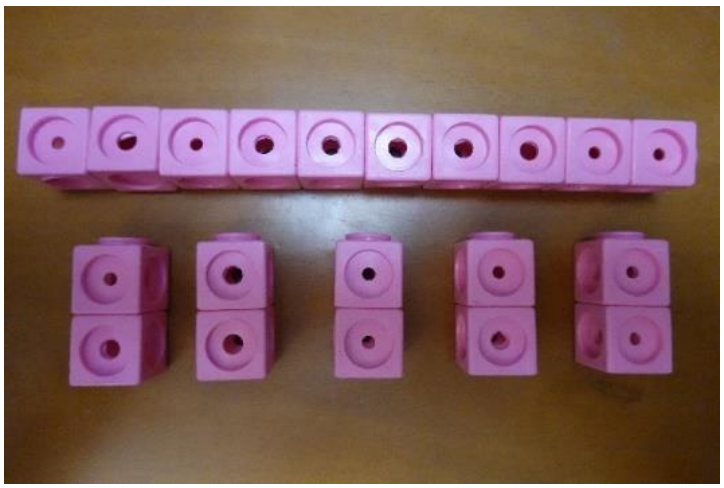
Si, por ejemplo, hay 10 vasos, verás que los divisores de 10 son $\{1, 2, 5, 10\}$.



Actividad manipulativa para comprender el concepto de divisor: policubos

Con policubos es muy sencillo visualizar el concepto de divisor. Si simbolizas un número "D" como una torre con "D" policubos, los divisores de "D" coincidirán con aquellos números "d" en los que se pueda separar en partes iguales los policubos.

Por ejemplo: el número 10 se representa por una torre de 10 policubos, como muestra la siguiente imagen.



Esa torre se puede "romper" en 5 trozos iguales (cada trozo, formado por 2 policubos). Por lo tanto, el número 5 es un divisor del número 10.

¿Por qué 6 no es divisor de 10? Porque es imposible separar los 10 policubos en 6 grupos con el mismo número de policubos.

¿Por qué 4 no es divisor de 10? Porque es imposible separar los 10 policubos en 4 grupos con el mismo número de policubos.

Concepto de M.C.D. de dos o más números

El máximo común divisor (M.C.D.) de un conjunto de números es el divisor más grande que sea común a todos los números.

Por ejemplo, si tenemos los números 8, 16 y 20, los divisores de cada uno serán:

$$divisores\ de\ 8\text{: } \{1, 2, \mathbf{4}, 8\}$$

$$divisores\ de\ 16\text{: } \{1, 2, \mathbf{4}, 8, 16\}$$

$$divisores\ de\ 20\text{: } \{1, 2, \mathbf{4}, 5, 10, 20\}$$

Tal y como aparece resaltado en rojo, el número 4 es el divisor común más grande. Conclusión: 4 es el M.C.D. de la terna de valores 8, 16 y 20.

Factorizar con números primos y obtener M.C.D. con policubos

¿Qué era un número primo? Aquel que solo tiene dos divisores: el 1 y el propio número. ¡Ojo! El número 1 no es primo porque no tiene dos divisores distintos.

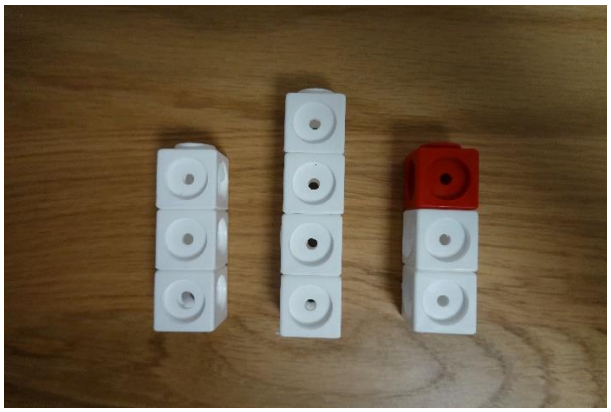
Cualquier número entero que no sea primo, salvo el 1, puede escribirse como un producto de factores primos. Podemos usar policubos para expresar estos factores primos. Y con policubos podemos obtener, también, el M.C.D. de un conjunto de números.

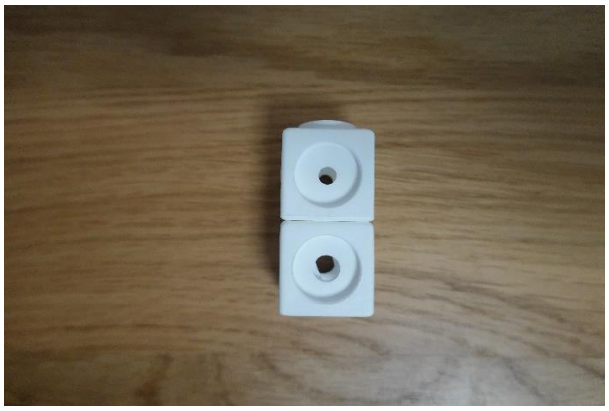
Los policubos que tenemos en clase están organizados en 10 colores. Estos 10 colores los vamos a relacionar con los 10 primeros números primos.

Blanco	Rosa	Rojo	Naranja	Amarillo	Verde claro	Verde oscuro	Azul	Marrón	Negro
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29

Así, los números 8, 16 y 20 pueden "expresarse" de la siguiente forma:

- 8 = Blanco x Blanco x Blanco (2 x 2 x 2)
- 16 = Blanco x Blanco x Blanco x Blanco (2 x 2 x 2 x 2)
- 20 = Blanco x Blanco x Rojo (2 x 2 x 5)





EL M.C.D. es el divisor común más grande. Con policubos el M.C.D. significa escoger solo los colores que se repitan en todos los números y con la menor repetición posible (para que esa cantidad sea común a todos los números). En las imágenes superiores tenemos la representación, con policubos, de los números 8, 16 y 20:

- El color blanco se repite en las tres torres y aparece dos veces en la primera torre (número 8), cuatro veces en la segunda torre (número 16) y dos veces en la tercera torre (número 20).
- El color rojo no se repite en las tres torres.

$$M.C.D.(8, 16, 20) = Blanco\ x\ Blanco$$

$$M.C.D.(8, 16, 20) = 2 \times 2$$

$$M.C.D.(8, 16, 20) = 4$$

Solo cuando ya tengas claro cómo razonar con policubos para sacar el valor del M.C.D., utiliza la "receta" que te permite acortar tiempo en el cálculo del máximo común divisor, usando factores primos: el M.C.D. de un conjunto de números es igual al producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente.

Es decir, volviendo a nuestro ejemplo anterior:

$$8 = 2^3$$

$$16 = 2^4$$

$$20 = 2^2 \times 5$$

¿Qué factores primos aparecen en la descomposición de los tres números? Solo el número 2 aparece en todas las descomposiciones. El 5 solo aparece en el tercer número.

¿Mínima potencia en la que aparece el factor 2? Al cuadrado.

¿Valor del máximo común divisor? $M.C.D.(8, 16, 20) = 2^2 = 4$

PARA PENSAR 5. ¿Qué ocurre si no hay factores primos comunes a todos los números? Con otras palabras, ¿qué ocurre si no hay un color que sea común a todos los números? ¿Valdría 0 el M.C.D.?

Para un conjunto grande de números, o para cantidades muy altas, el proceso puede ser algo tedioso. Por lo que siempre es bueno tener a mano una calculadora online de M.C.D. para comprobar nuestras operaciones:

https://es.calcuworld.com/calculadoras-matematicas/mcd

¡Ojo! Estos recursos online son una herramienta rápida para comprobar resultados. Pero nunca, nunca, nunca, nunca, pueden sustituir al proceso personal de comprender lo que se está estudiando.

De nada serve pulsar un botón para calcular el M.C.D. si no sabemos que significa verdaderamente el M.C.D.

1.8. Múltiplos de un número. Concepto de mínimo común múltiplo

Piensa nuevamente en dos números naturales. Al primero lo llamamos "m" y al segundo lo llamamos "M".

Decimos que "M" es múltiplo de "m" si el número "m" está contenido un número exacto de veces dentro de "M".

Los múltiplos son como las tablas de multiplicar.

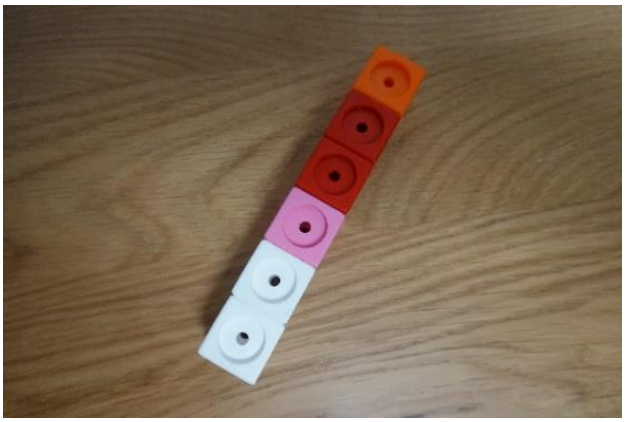
Por ejemplo, los múltiplos de m=3 son los números 3, 6, 9, 12, 15, 18, etc. porque si hacemos "una vez tres" obtenemos 3, si hacemos "dos veces tres" obtenemos 6, si hacemos "tres veces tres" obtenemos 9, si hacemos "cuatro veces tres" obtenemos 12, si hacemos "cinco veces tres" obtenemos 15, etc.

Factorizar con números primos y obtener m.c.m. con policubos

Por ejemplo, los números 12, 25 y 70 pueden "expresarse" con nuestro código de colores de policubos:

- 12 = Blanco x Blanco x Rosa (2 x 2 x 3)
- 25 = Rojo x Rojo (5 x 5)
- 70 = Blanco x Rojo x Naranja (2 x 5 x 7)





El mínimo común múltiplo de un conjunto de números es el múltiplo más pequeño que sea común a todos los números.

Mirando los policubos de colores de la imagen superior, podemos obtener el m.c.m. de los números 12, 25 y 70 quedándonos con todos los colores y con la mayor repetición que aparezca en alguna torre. De esta forma todos los números de partida estarán contenidos en el m.c.m.

- El blanco aparece hasta dos veces en la primera torre y una sola vez en la tercera torre.
- El rosa aparece una sola vez en la primera torre.
- El rojo aparece hasta dos veces en la segunda torre y una sola vez en la tercera torre.
- El naranja aparece una sola vez en la tercera torre.

$$m.c.m.(12, 25, 70) = Blanco\ x\ Blanco\ x\ Rosa\ x\ Rojo\ x\ Rojo\ x\ Naranja$$

$$m.c.m.(12, 25, 70) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$$

$$m.c.m.(12, 25, 70) = 2.100$$

PARA PENSAR 6. ¿Qué pasaría, en el ejemplo anterior, si el color blanco lo cogemos tres veces en vez de dos (dos veces de la primera torre y una vez de la tercera torre) y el color rojo lo cogemos tres veces en vez de dos (dos veces de la segunda torre y una vez de la tercera torre)? ¿El resultado final seguiría siendo un múltiplo de 12, 25 y 70?

Y ahora sí, **una vez que hemos "visualizado" con colores y policubos el significado del múltiplo común más pequeño posible, podemos dar el paso a la típica "receta" para acortar tiempo: el m.c.m. es igual al producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente**. Es decir:

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$25 = 5^2$$

$$70 = 2 \times 5 \times 7$$

¿Factores primos que aparecen en la descomposición de los tres números? Ninguno.

¿Factores primos que no son comunes a la descomposición de los tres números? 2, 3, 5 y 7.

¿Máxima potencia en la que aparece el factor 2? Al cuadrado.

¿Máxima potencia en la que aparece el factor 3? Elevado a uno.

¿Máxima potencia en la que aparece el factor 5? Al cuadrado.

¿Máxima potencia en la que aparece el factor 7? Elevado a uno.

¿Valor del mínimo común múltiplo? $m.c.m.(12, 25, 70) = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 2.100$

Con el tiempo, nos acostumbraremos a razonar rápido con números primos. Mientras llega ese momento, sigamos razonando con los policubos de colores el tiempo que necesitemos.

Puedes practicar con los números (y policubos) que desees. Sabiendo que los diez colores de los policubos "solo" llegan hasta el número primo 29. Para números grandes, puedes usar la siguiente calculadora online de m.c.m:

https://es.calcuworld.com/calculadoras-matematicas/mcm

2. Robótica y pensamiento computacional: Codificar números en base hexadecimal. Concepto de variable

Estamos acostumbrados a contar en base decimal. Contamos de 1 a 10 porque tenemos diez dedos en las manos.

Usamos diez símbolos para expresar cantidades: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Cualquier cantidad se expresa usando estos diez símbolos. Además, nuestro sistema numérico es posicional. No es lo mismo tener "2" en la posición de las unidades, que tener "2" en las decenas, o tener "2" en las centenas:

- El símbolo 2 significa dos unidades.
- El símbolo 22 significa veintidós unidades: 20 + 2
- El símbolo 222 significa doscientas veintidós unidades: 200 + 20 + 2.

A partir de nueve unidades necesitamos una segunda cifra para expresar diez, once, doce, etc. A partir de noventa y nueve unidades necesitamos una tercera cifra para expresar cien, ciento uno, ciento dos, etc. Y así sucesivamente.

¿Sólo podemos escribir números con base decimal? No. Podemos usar la base que queramos.

Con micro:bit vamos a mostrar en su pantalla LED dieciséis números en base hexadecimal, usando los símbolos del 0 al 9 y las letras de la A hasta la F. ¿Qué significa una letra para expresar un número? Fíjate en la siguiente tabla.

Decimal (cifras de 0 a 9)	Hexadecimal (cifras de 0 a 9 y de A a F)
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F

El algoritmo que vamos a desarrollar debe cumplir los siguientes requisitos:

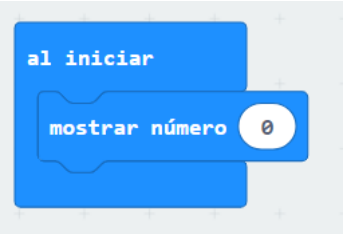
- Cuando la placa se encienda, debe mostrar 0 en la pantalla.
- Pulsando el botón "B" se incrementa en una unidad el número mostrado en pantalla.
- Pulsando el botón "A" se reduce en una unidad el número mostrado en pantalla.
- Después del 9, la cantidad diez se expresa con una letra A. La cantidad once se expresa como B. La cantidad doce se expresa como C. La cantidad trece se expresa como D. La cantidad catorce se expresa como E. Y la cantidad quince se expresa como F.

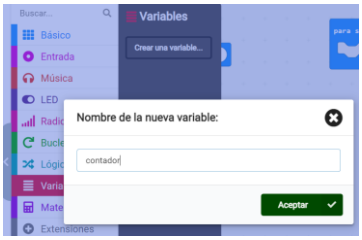
- Si en pantalla aparece F y pulsamos el botón “B”, debe sonar un sonido de error porque solo vamos a mostrar hasta la cantidad 15 como máximo.
- Si en pantalla aparece 0 y pulsamos el botón “A”, debe sonar un sonido de error porque solo vamos a mostrar hasta la cantidad 0 como mínimo.

En primer lugar, mostramos el número 0 en el bloque “al iniciar”.

Debemos saber si estamos sumando +1 al número de la pantalla (por pulsar el botón “B”) o si estamos restando -1 (por pulsar el botón “A”). Para ello creamos una variable que se llamará “contador”. Una variable es una posición de la memoria de la placa que puede cambiar fácilmente el valor que almacena.

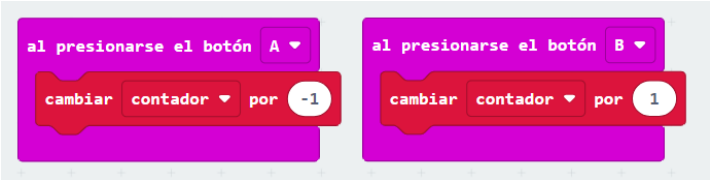
Iniciamos la variable al valor de partida 0.



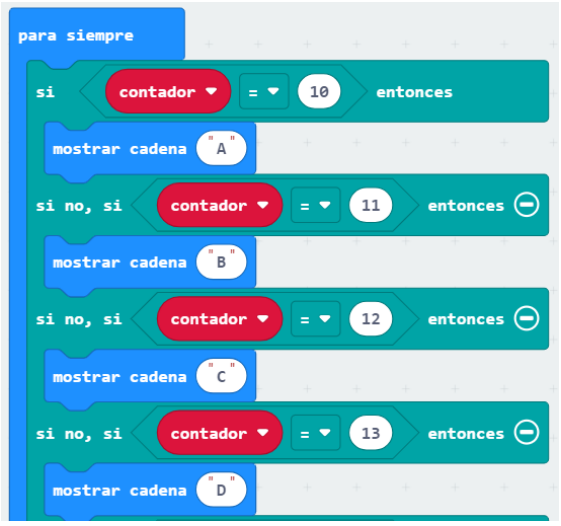


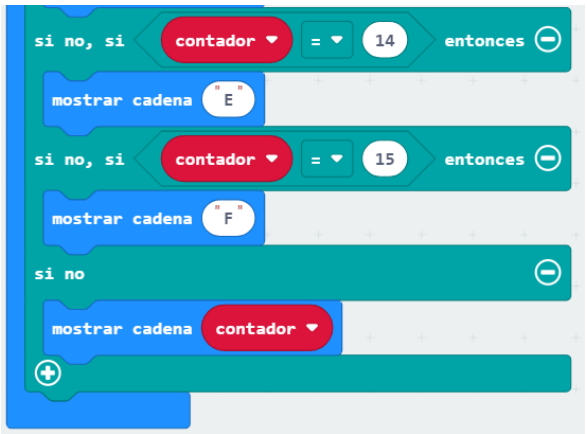


Si pulsamos el botón “A” el valor del contador se reduce en una unidad. Y si pulsamos el botón “B” el valor del contador se incrementa en una unidad. Usamos los bloques “al presionarse el botón…”.



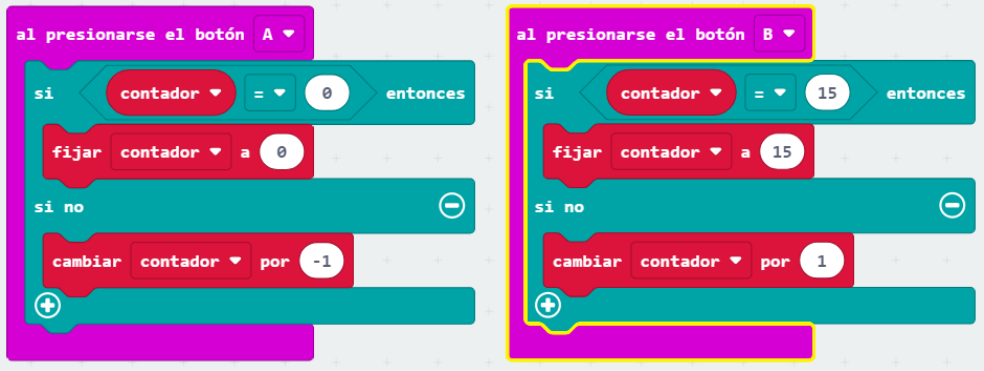
El algoritmo que llevamos hasta este punto muestra los números en formato decimal. Debemos pasar a hexadecimal para las cantidades superiores a nueve. En un bucle “para siempre” vamos a enlazar condicionales del tipo “si… entonces”. Este condicional se encuentra en el menú Lógica. Fíjate cómo hacemos el cambio a hexadecimal:





Ya mostramos en pantalla desde 0 hasta F. Debemos solucionar que el contador no aumente por encima de 15 y no disminuya por debajo de 0.

¿Cómo lo conseguimos? Metiendo un nuevo bloque "si… entonces" tanto al pulsar el botón A como al pulsar el botón B.



En el código de la imagen superior, al pulsar "A" comprobamos primero si el contador vale 0. Si es así, dejamos su valor en 0. En caso contrario, restamos 1.

Al pulsar "B" comprobamos primero si el contador vale 15. Si es así, dejamos su valor en 15. En caso contrario, sumamos 1.

PARA PENSAR 7. Para terminar nuestro algoritmo, solo queda introducir el sonido para avisar que no podemos bajar de 0 ni podemos subir de F. ¿Se te ocurre qué bloques usar y dónde situarlos para conseguir estas alarmas sonoras?

La base hexadecimal es muy utilizada en electrónica y robótica. Como ejemplo, la secuencia de la película "Marte".

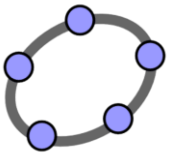


El actor principal (Matt Damon) queda atrapado en Marte, por accidente. Para comunicarse con la Tierra emplea una antigua cámara que gira sobre su eje. Cada giro de la cámara da lugar a un símbolo del código hexadecimal, con el que recibe (con paciencia) mensajes desde la Tierra.

Secuencia película desde minuto 44:30 hasta minuto 52:50 (Película disponible en Disney+).

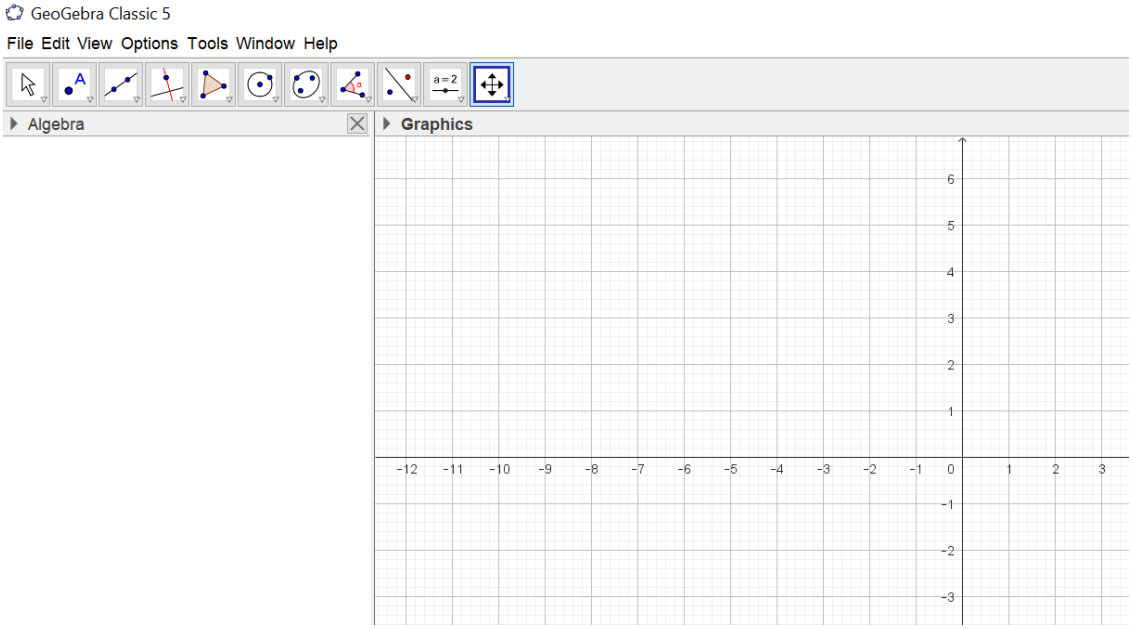
3. Simulación matemática con Geogebra: Circle, vertical lines and horizontal lines

GeoGebra is a dynamic mathematics software for all levels of education.

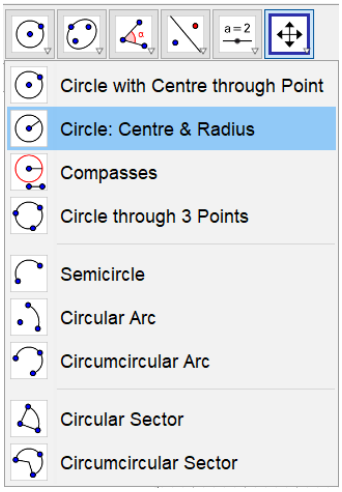


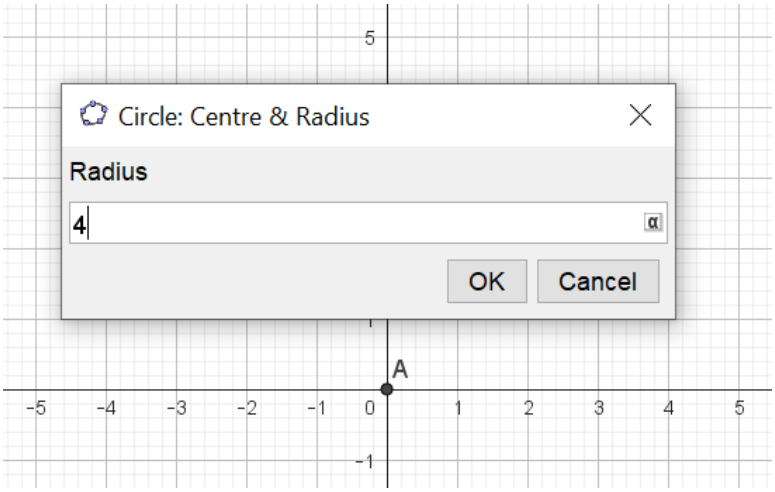
Geogebra website: https://www.geogebra.org

You can download the app and install it on your computer (version 5 or 6). You can also work online.

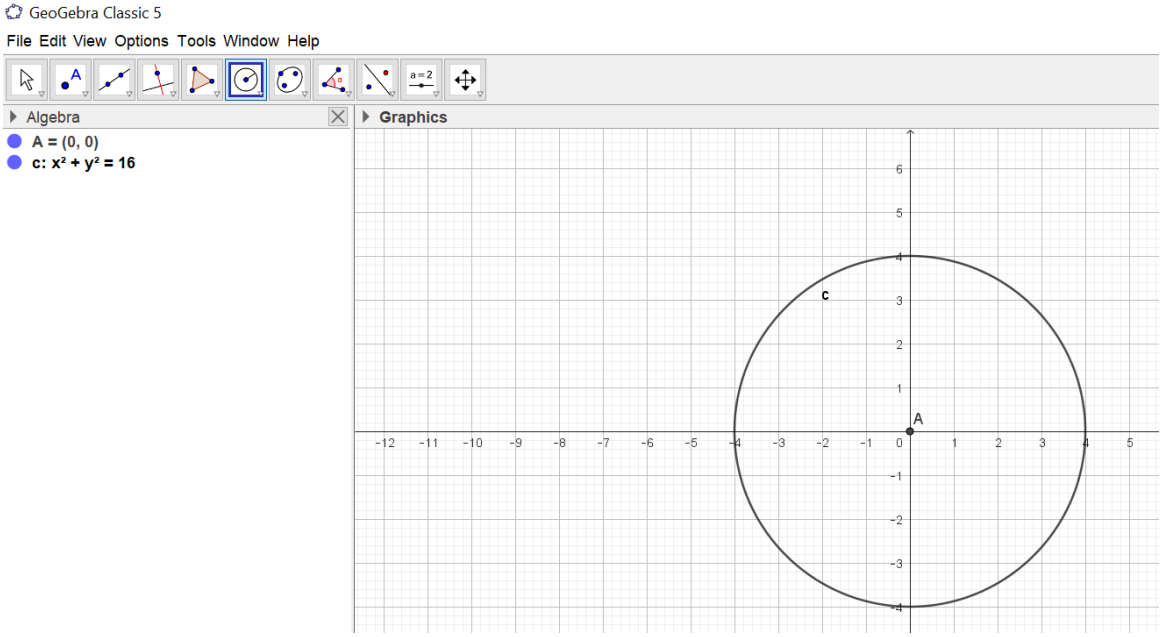


Our first activity is to draw a circle. Select the option "Circle: Centre & Radius". Click on the coordinate origin (0,0). Type 4 as radius.





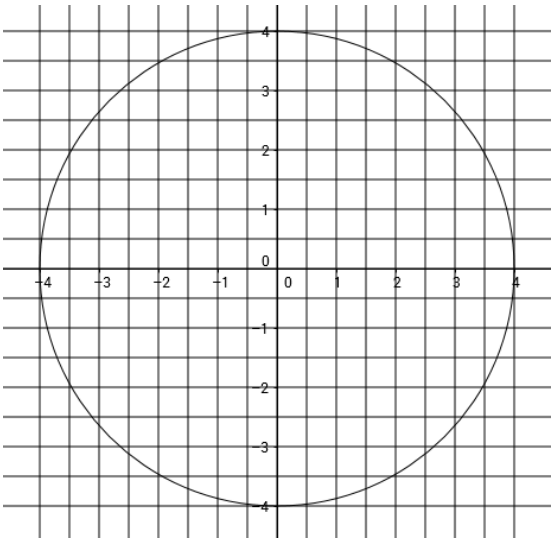
The centre of the circle is (0,0). And the coordinates (4,0), (0,4), (-4,0) and (0,-4) are some points on the perimeter of the circunference.



You can draw vertical and horizontal lines with the following input commands:

- Vertical lines: x=0.5, x=1, x=1.5, x=2, x=2.5, x=3, x=3.5, x=4.
- Horizontal lines: y=0.5, y=1, y=1.5, y=2, y=2.5, y=3, y=3.5, y=4.

Can you complete the input commands to get the following final image?



Save your file! Don't lose your Geogebra activity!

PARA PENSAR 8. Utiliza Geogebra para crear varias circunferencias inscritas a un cuadrado. Usa el comando ´´Area" para demostrar que la división entre el área del cuadrado y el área del círculo siempre es igual al valor 1,27 que hemos razonado en apartados anteriores. Además, usando el botón "Distance or length" mide la longitud del perímetro de la circunferencia en Geogebra. Divide ese perímetro por el diámetro de la circunferencia y comprueba que el resultado coincide con el valor del número pi.

4. Descripción de la situación de aprendizaje: George´s Secret Key to the Universe (book)

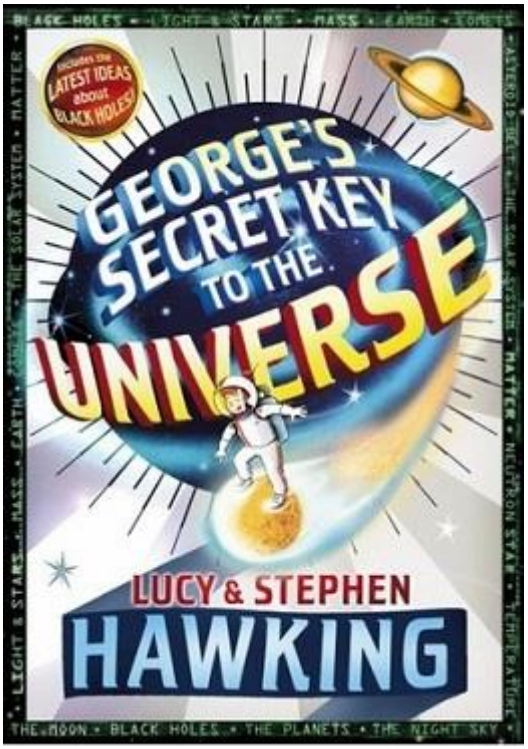
Summary:

George's Secret Key to the Universe is a 2007 children's book written by Lucy and Stephen Hawking.

Cosmos is the world's most powerful computer that can draw doors allowing people to travel into outer space.

George is a child who lives an amazing adventure with Cosmos and with his friend Annie.

Book describes plenty of topics of the Universe and of the Physics laws.



Tips for understanding the book:

- Keep calm and read.
- Ask the teacher about anything you don't understand.
- Write some sentences with highlights about the book: who are the protagonists?, what is their relationship with Cosmos?, why are they interested in studying the Universe?, etc.

Tras leer los seis primeros capítulos del libro, diseña y organiza en grupo la siguiente actividad calificable:

- Crea un grupo de 4-5 alumnos.
- Debéis redactar el guion de una obra de teatro que resuma los capítulos leídos en clase (del capítulo 1 al capítulo 6). El profesor puede solicitar el guion escrito en papel para su revisión.
- La lectura del guion debe durar entre 4 y 5 minutos. Ni menos ni más.
- Deben explicarse claramente quiénes son los protagonistas de la historia, cómo se relacionan entre ellos, quién es Cosmos y cuál es su principal cualidad como superordenador.
- El objetivo último de la actividad es animar a la lectura de obras y novelas de contenido científico.
- Es obligatorio una participación equilibrada, en tiempo y contenido, de todos los miembros del grupo durante la representación teatral.
- La actividad se entrega en formato audio, como “lectura teatralizada”. Una lectura teatralizada no es una “lectura plana”, sino una lectura de una obra de teatro donde los actores leen como si estuvieran realmente interpretando sobre el escenario
- El archivo en formato audio debe entregarse por Teams al profesor. Cada grupo envía un único archivo de audio para su corrección. La nota será la misma para todos los miembros del grupo

5. Productos finales que se evaluarán

- T.E.C.A. Trabajo escrito con apuntes sobre todos los contenidos que llevamos trabajados en el curso. En el momento en que terminemos la segunda situación de aprendizaje, el profesor puede realizar el T.E.C.A. el día que considere oportuno. Sin necesidad de informar previamente a los alumnos.
- Cuaderno de clase (**no olvides los criterios de orden, presentación y limpieza presentados al inicio de curso**)
    - Portada con el número y el título del tema
    - Indica las 5 fases del método científico y descríbelas con tus palabras (no copies literalmente).
    - Copia las fórmulas para calcular el error absoluto y el error relativo.
    - Copia la fórmula del perímetro de la circunferencia. Anota los valores del perímetro y el diámetro de la circunferencia que has utilizado con tu grupo en la actividad manipulativa sobre el número pi. Realiza la división entre el perímetro y el diámetro. Calcula el error absoluto de tu medida, considerando 3,1416 como "valor teórico" del número pi.
    - Copia la fórmula del área del círculo. Recorta y pega con paciencia en tu cuaderno los triángulos curvos en que se divide el círculo en la actividad manipulativa sobre el área. Indica la longitud de la base de tu rectángulo y la altura. Calcula tu valor experimental del área del rectángulo. Calcula el error absoluto y el error relativo de tu medida, considerando $138{,}93\ cm^2$ como "valor teórico".
    - Indica todos los divisores de los números 24, 30 y 36. Factorízalos también en números primos. Calcula el M.C.D y el m.c.m. de estos números usando colores de policubos y usando números primos.
- Producto audiovisual digital. En grupos de 4-5 alumnos grabad (con la grabadora de audio de un teléfono móvil) un resumen de las páginas leídas del libro en formato "lectura teatralizada". Una lectura teatralizada no es una "lectura plana", sino una lectura de una obra de teatro donde los actores leen como si estuvieran realmente interpretando sobre el escenario. La duración debe ser entre 4 y 5 minutos. **Si utilizas el idioma inglés para redactar todo o una parte del guion, se valorará positivamente en la nota**.
- Exposición oral. En grupos de 7-8 alumnos exponer a los alumnos de Primaria la actividad manipulativa para estimar el valor del número pi con cuerda, cilindro y regla. El grupo debe llevar el material necesario para que trabajen los alumnos de Primaria en pequeños grupos, de forma que cada 2-3 alumnos de Secundaria puedan atender a un grupo de Primaria. Esta actividad manipulativa no debe superar los 10 minutos de duración.
- Robótica: Copia en tu cuaderno las condiciones que iniciales del algoritmo que vienen descritas debajo de la tabla hexadecimal. Haz un esquema de los bloques "al presionarse el botón A" y "al presionarse el botón B" que incluya el efecto sonoro de alarma que se explica al final del apartado de robótica.
- Simulación matemática con Geogebra: Enseña al profesor el archivo de Geogebra con la circunferencia de radio 4 centrada en el origen de coordenadas y con rectas horizontal y verticales separadas entre sí 0,5 unidades. Recuerda que el profesor puede preguntarte en cualquier momento que le expliques cómo has hecho la actividad.
- Respuesta oral a preguntas.
- Trabajo diario.

6. Ejercicios resueltos para practicar y para pensar

INTENTA LOS EJERCICIOS POR TI MISMO.

SI ALGO NO TE SALE, PUEDES MIRAR LA SOLUCIÓN.

SI NO COMPRENDES ALGÚN PASO, PREGUNTA AL PROFESOR (NO AL PROFESOR PARTICULAR NI A LA ACADEMIA, SINO AL PROFESOR DE LA ASIGNATURA EN EL COLEGIO).

1. Un número es múltiplo de 4 si el número representado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 4. Y un número es múltiplo de 8 si el número representado por sus tres últimas cifras es múltiplo de 8. ¿Por qué son así estas dos reglas?

El razonamiento es muy parecido en ambos casos.

Piensa, por ejemplo, en el número 2646. Lo puedes expresar con potencias de base 10 de la forma:

$$2646 = 100 \times 26 + 46$$

La primera parte de la descomposición siempre será una cantidad múltiplo de 4, porque 100 es múltiplo de 4. Por lo tanto, mirando solamente las dos últimas cifras podemos decidir si el número total es múltiplo de 4.

$$46\ no\ es\ múltiplo\ de\ 4$$

Conclusión: 2646 no es múltiplo de 4.

Pensemos otro número más grande: 302.456. Podemos escribirlo como:

$$302.456 = 100 \times 3.024 + 56$$

La primer aparte de la descomposición, al estar multiplicada por 100, es múltiplo de 4. Mirando las dos últimas cifras:

$$56\ es\ múltiplo\ de\ 4$$

$$16\ veces\ 4\ es\ igual\ a\ 56$$

Conclusión: 302.456 es múltiplo de 4.

Pasemos a la prueba del 8. Y elijamos, por ejemplo, el 62.432. Podemos escribirlo como:

$$62.432 = 1.000 \times 62 + 432$$

La primera parte de la descomposición es múltiplo de 8 porque 1.000 es un número múltiplo de 8. Por lo tanto, solo debemos mirar las últimas tres cifras:

$$432\ es\ múltiplo\ de\ 8$$

$$54\ veces\ 8\ es\ igual\ a\ 432$$

PARA PENSAR 9. Con lo que has aprendido en este ejercicio, ¿se te ocurre alguna forma de descomponer el número 432 en suma de múltiplos de 8 para poder concluir, sin necesidad de hacer la división, que 432 es efectivamente múltiplo de 8?

2. Aplica la criba de Eratóstones para obtener los números primos comprendidos entre los 100 primeros números naturales.

El matemático griego Eratóstenes (s. III a.C.) da nombre a un conjunto de reglas ordenadas para detectar los números primos inferiores a un entero conocido. Nosotros lo vamos a desarrollar hasta el número 100.

~~1~~	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tachamos el número 1 (que ya sabemos que no es primo). El siguiente número después del 1 es el 2. Por lo que tachamos todos los múltiplos de 2. Es decir, tachamos los números 4, 6, 8, 10, 12, 14…

El siguiente número sin tachar, después del 2, es el número 3. Tachamos todos los múltiplos de 3 que no estén ya tachados por ser múltiplos de 2. Es decir, tachamos los números 9, 15, 21, 27…

Después del 3, el siguiente número sin tachar es el 5. Tachamos todos los múltiplos de 5 que no estén ya tachados por ser múltiplos de 2 o de 3. Es decir, tachamos los números 25, 35, 55…

Y razonamos así, sucesivamente, buscando el siguiente número, después de 3, no tachado.

PARA PENSAR 10. ¿Podemos parar el proceso en algún momento o tenemos que probar, hasta llegar a 100, con el siguiente número que no esté tachado? ¿Demostró Eratóstenes algún teorema para saber cuándo parar la búsqueda?

3. Responde de manera razonada.

a) ¿Por qué 40 es múltiplo de 8?

Porque 8 está contenido, exactamente, 5 veces dentro de 40: cinco veces ocho es 40.

b) ¿Por qué 6 es divisor de 24?

Porque la división 24/6 es exacta (resto 0). El número seis está contenido, exactamente, cuatro veces dentro de 24. O lo que es lo mismo, 24 es múltiplo de 6.

c) ¿Cuánto debe valer A para que el número A51 sea divisible entre 3?

La suma de los dígitos (A + 5 + 1) debe ser múltiplo de tres. Es decir, la cantidad A + 6 debe resultar un múltiplo de 3.

El valor de la cifra A puede oscilar de 0 a 9, por lo que es fácil realizar un listado de posibles soluciones:

- A= 0 genera 051. La suma 5+1=6 es múltiplo de 3.
- A=1 genera 151, es decir, 1+5+1=7. No es múltiplo de 3.
- A=2 genera 251, es decir, 2+5+1=8. No es múltiplo de 3.
- A=3 genera 351, es decir, 3+5+1=9. Es múltiplo de 3.
- …
- **PARA PENSAR 11.** ¿Tenemos que ir probando con todas la cifras hasta llegar al valor A=9, o podemos encontrar un patrón en el razonamiento que nos permita acotar tiempo en la resolución?

4. Escribe, con colores de policubos, la descomposición en número primos de 24, 75 y 90. Obtener el M.C.D. y el m.c.m. de los tres números.

Blanco	Rosa	Rojo	Naranja	Amarillo	Verde claro	Verde oscuro	Azul	Marrón	Negro
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29

24 = Blanco x Blanco x Blanco x Rosa (2 x 2 x 2 x 3)

75 = Rojo x Rojo x Rosa (5 x 5 x 3)

90 = Rosa x Rosa x Blanco x Rojo (3 x 3 x 2 x 5)

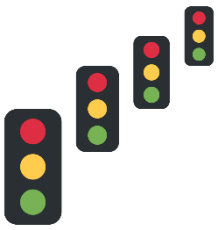
Recuerda que el producto es conmutativo. Por lo tanto, puedes ordenar los colores como quieras, ya que el resultado final del producto será el mismo.

¿M.C.D. con policubos? Los colores que se repitan en las tres descomposiciones y eligiendo, para cada color, el menor número de repeticiones. Solo se repite el color Rosa (aparece una vez en el 24, una vez en el 75 y dos veces en el 90). Conclusión: MCD (24, 75, 90) = 3.

¿m.c.m. con policubos? Todos los colores que aparecen y eligiendo, para cada color, el mayor número de repeticiones. El blanco aparece, como máximo, tres veces en el 24. El Rosa aparece, como máximo, dos veces en el 90. El Rojo aparece, como máximo, dos veces en el 75. Conclusión: m.c.m. (24, 75, 90) = $2^3 \times 3^2 \times 5^2 = 1.800$.

5. En la calle Camino de Ronda de Granada existen multitud de semáforos para los coches. Todos los días, a las 4 a.m., se reinicia el sistema informático que controla los semáforos y los pone a la vez todos en rojo. A esa hora hay poco tráfico y el reinicio del sistema no genera atascos de vehículos.

En un tramo de 400 metros de la calle hay cuatro semáforos prácticamente consecutivos. El ayuntamiento desea que la coincidencia de pasar a rojo todos a la vez no vuelva a repetirse antes de las 4 a.m. del día siguiente (hora del reinicio del sistema), para evitar atascos en momentos de mayor tráfico.



El semáforo 1 está 10 segundos en rojo, 43 segundos en verde y 3 segundos en ámbar.

El semáforo 2 está 12 segundos en rojo, 50 segundos en verde y 3 segundos en ámbar.

El semáforo 3 está 14 segundos en rojo y 63 segundos en verde y 3 segundos en ámbar.

El semáforo 4 está 16 segundos en rojo y 71 segundos en verde y 3 segundos en ámbar.

¿Con estos tiempos de funcionamiento en rojo, verde y ámbar se consigue el objetivo del ayuntamiento?

En caso de no lograrse, ¿puedes proponer unos tiempos de encendido en cada semáforo, próximos a los indicados en el enunciado, para conseguir lo que necesita el ayuntamiento?

A partir de las 4 a.m. se cumple el siguiente razonamiento:

- El primer semáforo se pone en rojo cada 56 segundos (10 + 43 + 3).
- El segundo semáforo se pone en rojo cada 65 segundos (12 + 50 + 3).
- El tercer semáforo se pone en rojo cada 80 segundos (14 + 63 + 3).
- El cuarto semáforo se pone en rojo cada 90 segundos (16 + 71 + 3).

Los cuatro semáforos volverán a ponerse en rojo a la vez cuando pase un tiempo que sea múltiplo de los cuatro tiempos de ciclo de funcionamiento de cada uno.

- Múltiplos de 56: 56, 112, 168…
- Múltiplos de 65: 65, 130, 195…
- Múltiplos de 80: 80, 160, 240…
- Múltiplos de 90: 90, 180, 270…

Buscar así, por fuerza bruta, el primer múltiplo que sea común a los cuatro números puede ser un proceso muyyyyyyyy largo. ¿Solución? Podemos descomponer en números primos y aplicar la frase “producto de comunes y no comunes elevados al mayor exponente”. O bien, hacer uso del siguiente enlace para obtener el resultado directamente:

https://es.calcuworld.com/calculadoras-matematicas/mcm

$$m.c.m(56, 65, 80, 90): 65.520$$

Es decir, los cuatro semáforos vuelven a ponerse a la vez en rojo cuando hayan pasado 65.520 segundos desde las 4 a.m.

El ayuntamiento necesita que esta concurrencia de semáforos en rojo no se repita antes de las 4 a.m. del día siguiente. De 4 a.m. de un día hasta las 4 a.m. del día siguiente pasan 24 horas. Por lo que necesitamos saber cuántas horas son nuestros 65.520 segundos.

Si recuerdas de la unidad anterior, para pasar de segundos a horas debemos dividir por 3.600 segundos (que son los segundos que hay en una hora).

$$\frac{65.520\ segundos}{3.600} = 18{,}2\ h$$

¡El ayuntamiento tiene un problema! Poco más de 18 horas después de las 4 a.m. los cuatro semáforos vuelven a pasar a rojo a la vez. Poco después de las 22.00 (4 + 18,2) de la noche aparece la concurrencia se semáforos en rojo.

¿Qué valores podemos tomar?

Si deseamos que el primer múltiplo común sea un número muy grande, podemos recurrir a los números primos (que solo son divisibles por sí mismo y por 1). Así reducimos la posibilidad de factores en común.

Entre 56 y 90 segundos están los cuatro tiempos de ciclo de los semáforos. Por lo que podemos escoger números primos que están en ese intervalo. Como vimos en la criba de Eratóstenes, entre el 56 y el 90 encontramos los siguientes números primos:

$$primos\ entre\ 56\ y\ 90\colon 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83\ y\ 89$$

Podemos proponer, por ejemplo, pequeñas variaciones de segundos para obtener tiempos de ciclo iguales a números primos:

- El semáforo 1 está 12 segundos en rojo, 44 segundos en verde y 3 segundos en ámbar (59 segundos en total).
- El semáforo 2 está 12 segundos en rojo, 46 segundos en verde y 3 segundos en ámbar (61 segundos en total).
- El semáforo 3 está 14 segundos en rojo y 62 segundos en verde y 3 segundos en ámbar (79 segundos en total).
- El semáforo 4 está 16 segundos en rojo y 70 segundos en verde y 3 segundos en ámbar (89 segundos en total).

Y con estos cuatro tiempos, el mínimo común múltiplo resulta:

$$m.c.m(59, 61, 79, 89)\colon 25.304.569$$

La concurrencia de los cuatro semáforos en rojo ocurre ahora a los 25.304.569 segundos. Si dividimos por 3.600, nos daremos cuenta de que esa cantidad son más de 7.000 horas. Es decir, deben pasar más de 290 días para que los cuatro semáforos pasen a la vez en rojo.

Con estos valores primos podemos reiniciar el sistema informático una vez al año, en vez de una vez al día. ¡Olé por los números primos!

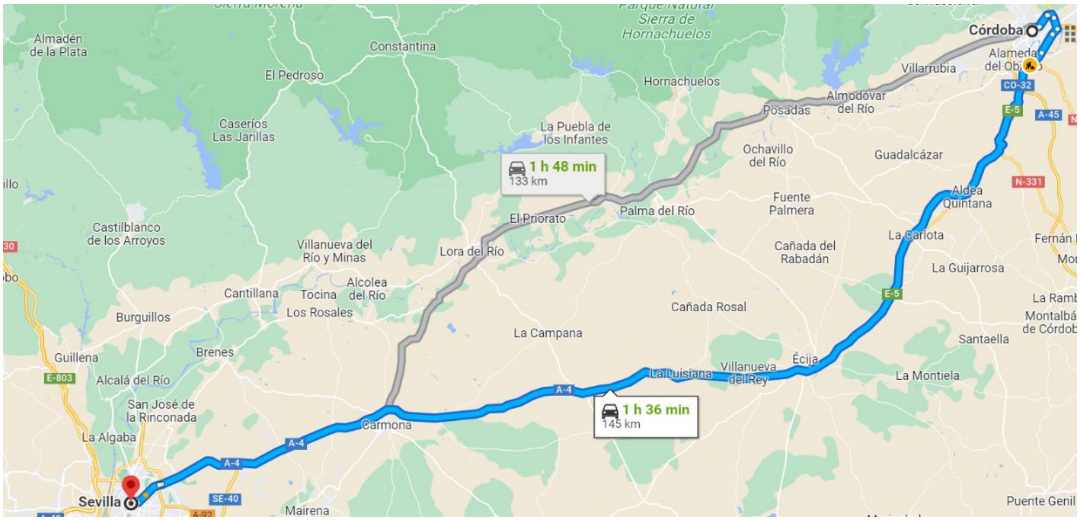
6. La carretera A4 une, entre otras ciudades, Córdoba con Sevilla.

a) Según Google Maps, qué distancia separa Córdoba de Sevilla y cuánto tiempo tarda un coche en realizar el viaje (en condiciones normales de ausencia de atascos y de respeto de las normas de circulación).

b) Elige una población entre Córdoba y Sevilla, por donde pase la carretera A4 y que aproximadamente esté a mitad de camino entre ambas capitales de provincia.

c) Si por esa población pasa un autobús hacia Sevilla cada 6 horas y un autobús hacia Córdoba cada 4, y a las 13.00 horas exactamente pasan los dos por la estación de autobuses, ¿a qué hora volverán a coincidir?

a) Teclea en Google Maps "Córdoba" y pulsa "¿Cómo llegar?" para escribir "Sevilla" como lugar de salida (también puedes hacerlo en sentido inverso).



PARA PENSAR 12. ¿La distancia de Córdoba a Sevilla es la misma que la distancia de Sevilla a Córdoba? ¿Qué nombre damos en matemáticas a las operaciones donde no importa el orden en que se apliquen?

b) La Luisiana es una población cercana a la carretera A4 que, aproximadamente, se encuentra a mitad de camino entre Córdoba y Sevilla.

c) Los autobuses volverán a coincidir en un tiempo posterior a las 13.00 horas. Todo lo que sea un tiempo futuro implica m.c.m. por ser una cantidad mayor que los valores de partida.

El número 6, descompuesto en factores primos, es 2 x 3.

El número 4, descompuesto en factores primos, es 2 al cuadrado.

El m.c.m. se obtiene como el producto de factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente. Es decir:

$$m.c.m.(4,6) = 2^2 \times 3 = 12$$

Doce hora después de las 13.00 horas, los dos autobuses vuelven a coincidir en La Luisiana. Serán las 01.00 de la madrugada.

7. Un pastelero posee 38 pasteles y cajas de 3 y 7 unidades. Todos los pasteles deben quedar empaquetados, y no pueden quedar cajas con espacios vacíos. ¿De cuántas formas distintas pueden empaquetarse los pasteles?

Podemos afrontar el ejercicio partiendo de los 38 pasteles iniciales, ir quitando paquetes de 7 unidades y comprobar si el resultado final es múltiplo de 3. También podemos partir de los 38 iniciales e ir quitando paquetes de 3 unidades y comprobar si el resultado final es múltiplo de 7.

¿Paquetes de 7 pasteles?	¿Paquetes de 3 pasteles?
1 paquete de 7 pasteles Quedan por empaquetar: 38 – 7 = 31 pasteles	31 no es múltiplo de 3 No hay solución
2 paquetes de 7 pasteles **Quedan por empaquetar: 38 – 14 = 24 pasteles**	**24 sí es múltiplo de 3: 8 paquetes de 3 pasteles** **Si hay solución**
3 paquetes de 7 pasteles Quedan por empaquetar: 38 – 21 = 17 pasteles	17 no es múltiplo de 3 No hay solución
4 paquetes de 7 pasteles Quedan por empaquetar: 38 – 28 = 10	10 no es múltiplo de 3 No hay solución
5 paquetes de 7 pasteles **Quedan por empaquetar: 38 – 35 = 3**	**3 Sí es múltiplo de 3: 1 paquete de 3 pasteles** **Sí hay solución**

El problema tiene dos posiciones soluciones:

- 2 paquetes de 7 pasteles y 8 paquetes de 3 pasteles.
- 5 paquetes de 7 pasteles y 1 paquete de 3 pasteles.



8. Tenemos 50€ en monedas.





Solo contamos con monedas de 50 céntimos, 1 euro y 2 euros.

a) ¿Podemos tener esa cantidad utilizando monedas de 50 céntimos, 1 euro y 2 euro, sabiendo que el número de monedas de 50 céntimos son impares?

b) ¿Podemos tener esa cantidad contando con el mismo número de monedas de cada tipo (mismo número de monedas de 50 céntimos, que de 1 euro y que de 2 euros)?

a) Imposible. Si tenemos un número impar de monedas de 50 céntimos, la cantidad que faltaría hasta llegar a los 50 euros sería un número con decimales (por ejemplo, 35,50 euros). Y no es posible obtener una cantidad decimal con monedas de 1 y 2 euros exclusivamente.

b) La suma de una moneda de 50 céntimos, una moneda de 1 euro y una moneda de 2 euros es igual a 3,5€.

Como tenemos el mismo número de monedas de cada tipo, la única posibilidad de que la situación tenga solución es que el número 50 sea múltiplo de 3,5. Es decir, ¿hay algún número entero que multiplicado por 3,5 de exactamente 50?

Si hacemos 14 veces 3,5 obtenemos 49. No llegamos a los 50 euros.

Si hacemos 15 veces 3,5 obtenemos 52,5. Nos pasamos de los 50 euros.

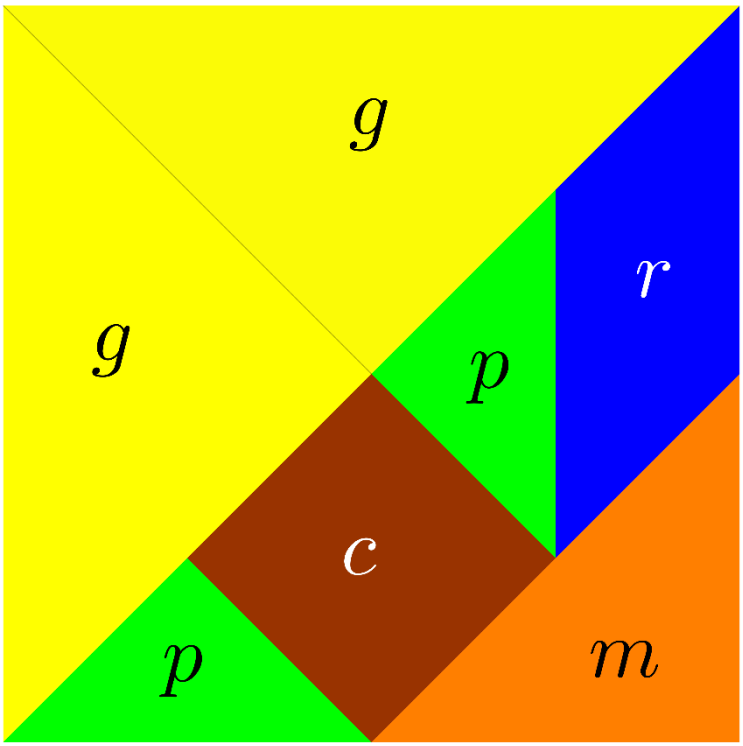
Conclusión: es imposible tener 50€ si contamos con el mismo número de monedas de cada tipo.

9. Divisores con Tangram

El Tangram chino clásico es un puzle lógico de siete piezas con multitud de aplicaciones matemáticas, y no solo de pasatiempo lúdico.

El Tangram (T) está formado por:

- 2 triángulos rectángulos grandes (g)
- 1 triángulo rectángulo mediano (m)
- 2 triángulos rectángulos pequeños (p)
- 1 cuadrado (c)
- 1 romboide (r)



La figura superior del cuadrado formado con las siete piezas del Tangram ya es un primer puzle. En internet, es fácil encontrar multitud de figuras a construir empleando todas o algunas de las siete piezas.

La web https://mathigon.org/tangram es una magnífico recurso para crear, de manera interactiva, figuras con Tangram. Puedes mover las piezas una a una, girarlas, cambiaras de color y aumentar de manera gradual la dificultad de las composiciones.





En esta unidad sobre divisores y múltiplos, no vamos a centrarnos solo en la parte lúdica de montar figuras. También trabajaremos la parte lógico-matemática de relacionar piezas por su tamaño (área).

¿Puedo formar el triángulo mediano (m) con los dos triángulos (p)? Sí. No tienes más que superponer las piezas entre sí. Podemos afirmar (hablando de áreas) que el triángulo mediano es igual a la suma de los dos triángulos pequeños.

$$m = p + p$$

O lo que es lo mismo, el triángulo mediano es el doble del triángulo pequeño.

$$m = 2 \times p$$

O incluso podemos afirmar: el triángulo pequeño es la mitad del triángulo mediano. Con otras palabras: podemos dividir el triángulo mediano en dos triángulos pequeños. **El triángulo pequeño es un divisor del triángulo mediano**.

$$p = \frac{m}{2}$$

Esta forma de escribir relaciones de tamaño empleando números y letras se llama **ecuación**. Estudiaremos muchas ecuaciones durante el curso para relacionar magnitudes como longitud, velocidad, aceleración o fuerza. Ya llegaremos a ellas en el futuro.

¿Puedo formar el cuadrado (c) con los dos triángulos (p)? Sí. Por lo tanto, hablando de superficie, podemos decir que el cuadrado es igual a dos triángulos pequeños.

$$c = p + p$$

O bien decir que el tamaño del cuadrado es el doble del tamaño de los triángulos pequeños.

$$c = 2 \times p$$

También es correcto afirmar que el tamaño de un triángulo pequeño es la mitad del tamaño de un cuadrado. Con otras palabras: el cuadrado se puede dividir en dos triángulos pequeños. **El triángulo pequeño es un divisor del cuadrado**.

$$p = \frac{c}{2}$$

Analizando estas ecuaciones, es fácil visualizar y comprender que el tamaño del triángulo mediano es igual al tamaño del cuadrado. **El triángulo mediano es un divisor del cuadrado, y el cuadrado es un divisor del triángulo mediano**.

$$m = c$$

Si tuviera triángulos grandes suficientes, ¿podría formar el Tangram (T) con triángulos grandes (g)? Sí. Dos triángulos grandes cubren la mitad del Tangram completo. Por lo tanto, necesitaríamos cuatro triángulos grandes para formar todo el Tangram.

$$T = 4 \times g$$

Con otras palabras, el Tangram se puede dividir en cuatro triángulos grandes. **El triángulo grande es un divisor del Tangram**.

$$g = \frac{T}{4}$$

PARA PENSAR 13. ¿Qué relación hay entre la superficie del rombo (r) y la superficie del cuadrado (c)? ¿Cuántos triángulos pequeños (p) serían necesarios para formar todo el Tangram (T)? ¿Cuántos rombos (r) serían necesarios para cubrir una superficie igual a la superficie de todo el Tangram (T)?

10. ¿Cómo medir la diagonal de un cuadrado? No solo el número pi tiene infinitos decimales

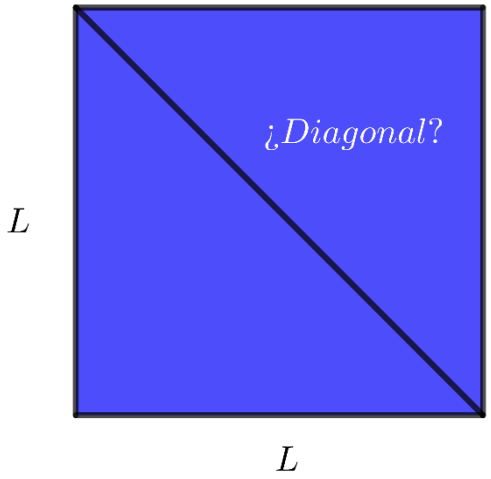
Al comparar las piezas del Tangram, llegamos a la conclusión visual que el cuadrado (c) equivale a dos triángulos pequeños (p).

Esta afirmación es cierta cuando hablamos de superficie. El área del cuadrado es igual a la suma de las áreas de los dos triángulos.

Si llamamos L a la longitud del lado del cuadrado, podemos decir que el triángulo tiene dos lados de longitud también igual a L.

Los triángulos que aparecen en el Tangram son triángulos rectángulos. Y como tienen dos lados iguales, podemos afirmar que son triángulos rectángulos isósceles.

Pero ¿cuánto vale el tercer lado del triángulo, que es el de mayor longitud? Con otras palabras, ¿cuánto vale la diagonal del cuadrado?



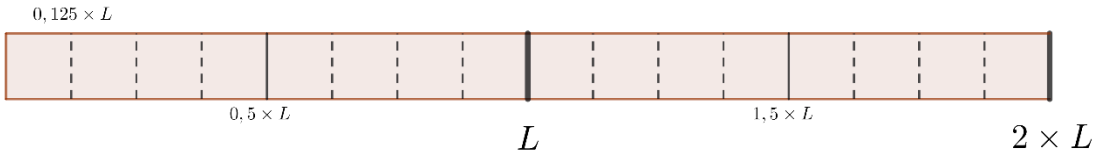
Imprime la imagen del cuadrado con su diagonal.

Vamos a fabricar una regla casera. **En una tira de papel marca la longitud L del lado del cuadrado. A esa longitud la vamos a llamar 1 y será nuestra unidad de referencia de longitud**.

La mitad de L será 0,5 unidades de longitud. Un cuarto de L será 0,25 unidades de longitud. Un octavo de L será 0,125 unidades de longitud.

Diseña tu regla para que llegue hasta 2 veces L, es decir, hasta 2 unidades de longitud. Marca en cada unidad la mitad de L, el cuarto de L y el octavo de L.

Fíjate en la siguiente imagen. Es un ejemplo para que sepas lo que debes fabricar. El valor L de la regla de abajo no coincide con el valor L del cuadrado de arriba. Eres tú mismo quien debe diseñar tu propia regla tomando como referencia el cuadrado que te dará fotocopiado el profesorado.



Utiliza esta regla para aproximar la longitud de la diagonal.

Si L=1 obtendrás el valor de la diagonal para cualquier cuadrado de lado igual a 1.

Si L=2 obtendrás el valor de la diagonal para cualquier cuadrado de lado igual a 2.

Y así puedes razonar para cualquier valor de L.

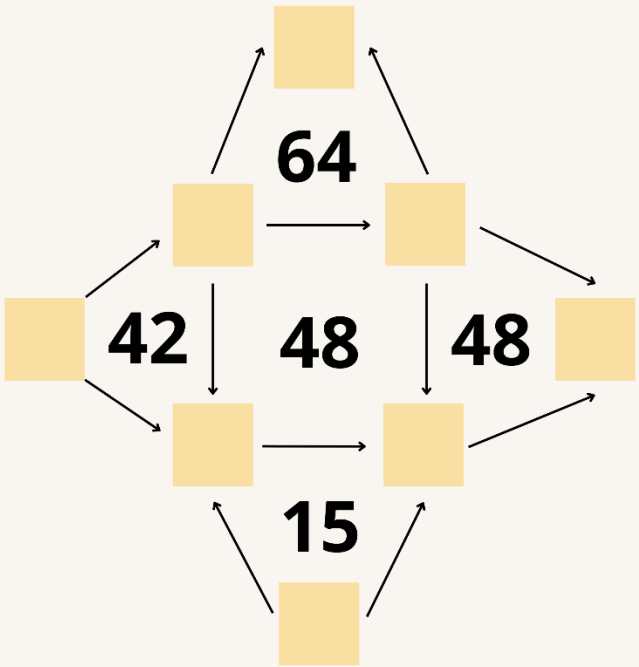
PARA PENSAR 14. ¿Puedes afinar el valor de la diagonal haciendo más pequeña la sensibilidad de la regla? ¿Hasta cuánto eres capaz de dividir en partes iguales el valor de la unidad L en tu regla? ¿Podrías seguir dividiendo en trozos cada vez más pequeños, de manera infinita?

7. Por si quieres seguir ampliando y aprendiendo

1. Piensa y resuelve los siguientes crucigramas numéricos sobre producto de números enteros.

PENSAR EN PRODUCTOS

Coloca las cifras del 1 al 8 sobre las casillas para que el producto de los vértices de cada figura sea igual al número que se indica en su interior.





PENSAR EN PRODUCTOS

En el siguiente producto aparecen, sin repetición, las cifras del 1 al 9.

1	9	6	3
		x	4
7	8	5	2



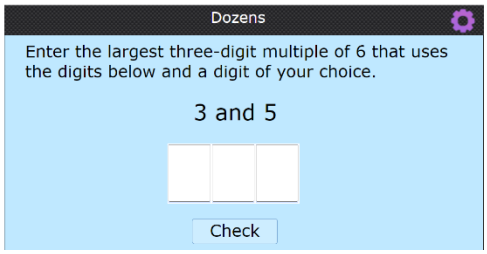
¿Eres capaz de encontrar otra configuración distinta donde aparezcan las nueve cifras, sin repetición?

		x	

2. Actividades enriquecidas sobre múltiplos

La página web de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Cambridge (Inglaterra) es un baúl de infinidad de recursos matemáticos para todas las edades:

https://nrich.maths.org



Todas las actividades que contienen están en la línea de desarrollar el pensamiento lógico-matemático con problemas de enunciados atractivos, que suponen un reto para el estudiante.

El siguiente enlace propone encontrar el número más grande posible que cumpla determinadas condiciones de multiplicidad. ¿Te animas a resolver el reto?

https://nrich.maths.org/dozens

3. Juego de los divisores y de los múltiplos

Juego de dos jugadores (A y B). En el primer turno el jugador A tacha un número inferior a 50. Y el jugador B debe tachar un divisor o un múltiplo del número tachado por A.

En el segundo turno se repite el proceso, pero comienza el jugador B. Y así sucesivamente. Pierde el primer jugador que no pueda tachar un número.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

PARA PENSAR 15. ¿Piensas que hay estrategias que son siempre ganadoras? Explícalas.

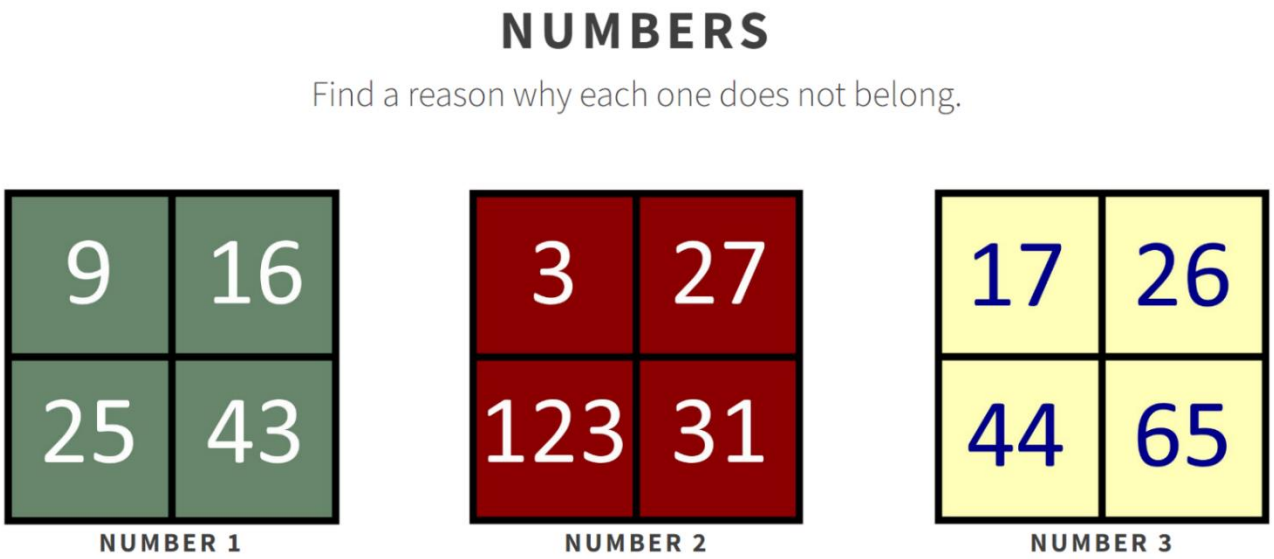
4. Which one's doesn't belong?

Página web donde se ofrecen imágenes de figuras, números, gráficos o patrones numéricos (divididos en bloques de 4) para que reflexionemos sobre cuál de las cuatro opciones sobra. Debemos argumentar, con algún criterio razonable, cuál de las cuatro propuestas no está conectada con las otras tres.

http://wodb.ca

¡Ojo! La solución no es única. Esta actividad abre la puerta a que busquemos patrones y soluciones que cambiarán según el planteamiento de partida.

Aplicar este método de indagación a las siguientes tres imágenes. ¿Qué elemento sobra en cada imagen y por qué?



5. La hipótesis o conjetura de Collatz

En el siguiente enlace, del canal de YouTube "Derivando", conocerás la conjetura de Collatz (hasta minuto 1:55):

https://www.youtube.com/watch?v=HpcYW08Ug7g



Una conjetura es una hipótesis: una idea previa que responde a algo que nos llama la atención. Pero la conjetura o hipótesis de Collatz aún no ha sido demostrada o negada por nadie.

¿Qué dice la conjetura? Si aplicamos el siguiente razonamiento a cualquier número entero, siempre terminaremos en el bucle 4, 2, 1:

- Si el número es par, lo dividimos entre 2.
- Si el número es impar, lo multiplicamos por 3 y le sumamos 1.

Todos los números con los que se ha probado hasta la actualidad cumplen la conjetura.

¿Será cierta para cualquier número, por muy grande que sea? Eso es lo que falta por demostrar.

6. Repaso de los criterios de divisibilidad

La siguiente aplicación creada con Geogebra te permite practicar con los criterios de divisibilidad de los primeros números enteros.



Aparece un repaso de los criterios y la opción de practicar con actividades autocorregibles.

https://emtic.educarex.es/crea/matematicas/divisibilidad/criterios_del_2_3_9_y_10.html

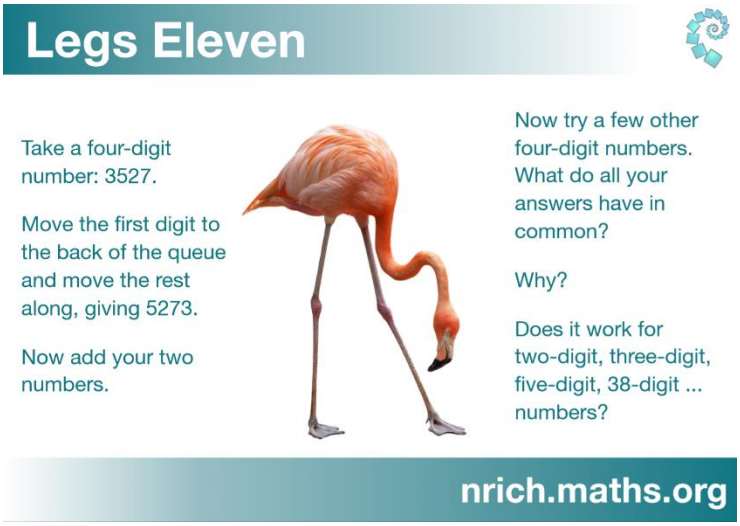
7. Generador de números de cuatro cifras que sean múltiplos de 11

El siguiente recurso de NRICH presenta un algoritmo (rutina) para crear múltiplos de 11 a partir de cualquier número de cuatro cifras:

https://nrich.maths.org/564

En el enlace aparece una imagen animada con un ejemplo y algunas pistas. La imagen de la derecha te plantea algunas preguntas para pensar.

Recuerda el criterio de divisibilidad por 11: sumar por un lado las cifras en posiciones pares, sumar por otro lado las cifras en posiciones impares y restar ambas cantidades. Si el resultado es 0 o un múltiplo de 11, el número de partida será divisible por 11.



PARA PENSAR 16. ¿Funciona este método para cualquier número de cuatro cifras? ¿Por qué? ¿Funciona con números de cinco cifras? ¿Y con seis cifras? ¿Y con cualquier número de cifras?

8. Crear un número que sea, a la vez, múltiplo de 7, múltiplo de 11 y múltiplo de 13. Aplicación para practicar con múltiplos: juego "Pincha el globo".

Los recursos CREA son una creación de la Consejería de Educación de Extremadura con multitud de actividades "para pensar" en clase.

El siguiente enlace te propone cómo modificar un número de tres cifras para obtener otro que sea simultáneamente múltiplo de 7, de 11 y de 13.



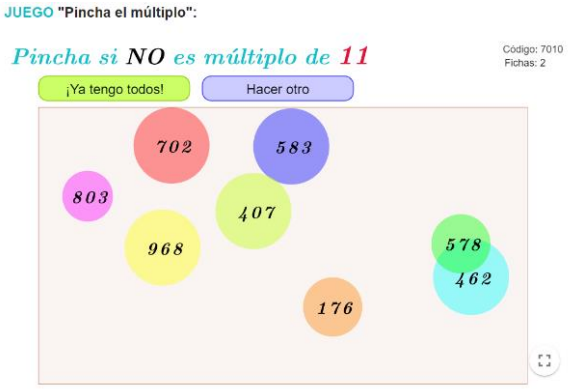
https://emtic.educarex.es/crea/matematicas/divisibilidad/matejuegos_con_mltiplos_y_divisores.html

PARA PENSAR 17. ¿Cómo se explica que funcione este método de crear múltiplos de 7, 11 y 13?

En ese mismo enlace, aparece una aplicación que fomenta el cálculo mental de múltiplos.

Surgen globos de colores con números en su interior, y debes pincharlos según cumplan o no el criterio de multiplicidad que propone el juego.

El juego te avisa de tus errores. Además, puedes cambiar de reto pulsando en "Hacer otro".



9. Factorizar números con bloques rectangulares

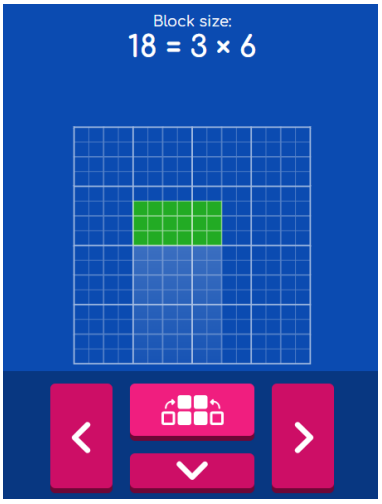
Este entretenido juego de factorización por bloques está disponible en:

https://mathigon.org/factris

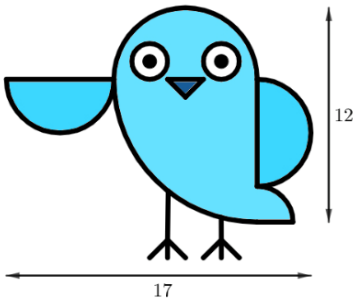
Las normas están basadas en el conocido juego del Tetris, con la novedad de que puedes cambiar la forma de agrupación de cada pieza, creando bloques rectangulares de diferente número de filas y columnas.

La dimensiones de los posible bloques rectangulares que puedes crear dependen de los divisores de la cantidad total representada.

Cada vez que pulsas el botón de reagrupar, obtienes una figura con anchura cada vez menor. ¡Ojo con este dato! Porque el botón no es reversible y no puedes pasar a figuras con mayor anchura.



10. How big is the bird? What is the area of the bird, shown below?



Hint: There are two equal semicircles representing the wings, one semicircle representing the head, one quarter of circle representing the body (with a radius equal to the diameter of the head) and one quarter of circle representing the tail.

Remember! $Surface = \pi \times radio^2$

Solution: https://plus.maths.org/content/how-big-bird-solution