

Der Definitionsbereich

Der Definitionsbereich (auch: Die Definitionsmenge) umfasst alle Werte, die in die Funktion eingesetzt werden dürfen. Häufig ergibt sich der Definitionsbereich aus den Modellgrenzen des Sachkontextes.

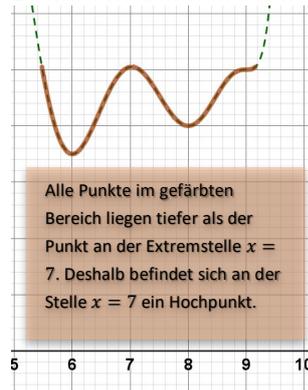
$$1,9 \leq x \leq 9,4$$

In diesem Beispiel umfasst der Definitionsbereich alle Zahlen zwischen 1,9 und 9,4. Die Werte 1,9 und 9,4 sind eingeschlossen.

Der Hochpunkt

In einer Umgebung um den Hochpunkt liegen alle anderen Punkte des Graphen tiefer als der Hochpunkt. Der Hochpunkt muss nicht der höchste Punkt des Graphen im Definitionsbereich sein.

$HP_2(9,3)$ ist ein Hochpunkt, aber nicht der höchste Punkt im Definitionsbereich. $HP_1(3,4)$ ist ein Hochpunkt und auch der höchste Punkt im Definitionsbereich. Deshalb ist 4 das **globale Maximum** der Funktion.



Einen Hochpunkt findet man, indem man alle Lösungen mit $f'(x) = 0$ alle Nullstellen der ersten Ableitung bestimmt. Wenn der Graph der Ableitung an der Nullstelle von + nach - wechselt, dann befindet sich an dieser Nullstelle ein Hochpunkt.

Wenn x_H eine Nullstelle von f' ist, wenn also $f'(x_H) = 0$ gilt und wenn zwischen x_1 und x_2 x_H die einzige Nullstelle ist und wenn

$$f(x_1) > 0$$

und

$$f(x_2) < 0$$

dann befindet sich an der Stelle x_H ein Hochpunkt.

Der Tiefpunkt

In einer Umgebung um den Tiefpunkt liegen alle anderen Punkte des Graphen höher als der Tiefpunkt.

Der Tiefpunkt muss nicht der tiefste Punkt des Graphen im Definitionsbereich sein.



TP_1 ist auch ein Tiefpunkt und auch nicht der tiefste Punkt im Definitionsbereich. Der tiefste Punkt und damit das globale Minimum befindet sich am rechten Rand des Definitionsbereiches. Dort ist $f(9,4) = -0,6879$ der niedrigste Funktionswert und damit das globale Minimum der Funktion. Einen Tiefpunkt findet man, indem man alle Lösungen mit $f'(x) = 0$ alle Nullstellen der ersten Ableitung bestimmt. Wenn der Graph der Ableitung an der Nullstelle von $-$ nach $+$ wechselt, dann befindet sich an dieser Nullstelle ein Tiefpunkt. Wenn x_H eine Nullstelle von f' ist, wenn also $f'(x_H) = 0$ gilt und wenn zwischen x_1 und x_2 x_H die einzige Nullstelle ist und wenn $f(x_1) < 0$

und

$$f(x_2) > 0$$

dann befindet sich an der Stelle x_H ein Tiefpunkt.

$SP(5|2)$ ist ein Sattelpunkt, weil an der Stelle 5 die Steigung 0 ist und vor und hinter dem Punkt die Steigung negativ ist.

Einen Sattelpunkt findet man, indem man alle Lösungen mit $f'(x) = 0$ alle Nullstellen der ersten Ableitung bestimmt.

Wenn der Graph der Ableitung an der Nullstelle die x -Achse nur berührt, aber nicht passiert, dann befindet sich an dieser Nullstelle ein Sattelpunkt.

Wenn x_S eine Nullstelle von f' ist, wenn also $f'(x_S) = 0$ gilt und wenn zwischen x_1 und x_2 x_S die einzige Nullstelle ist und wenn $f(x_1) < 0$ und $f(x_2) < 0$ oder

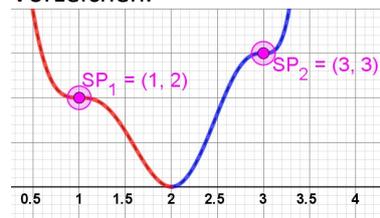
$$f(x_1) > 0 \text{ und } f(x_2) > 0$$

dann befindet sich an der Stelle x_S ein Sattelpunkt.

3 ist ein lokales Maximum, weil $HP_2(9|3)$ ein Hochpunkt ist.

Der Sattelpunkt

An einem Sattelpunkt ist die Steigung 0 und in einer Umgebung um den Sattelpunkt hat die Steigung das gleiche Vorzeichen.



In einer Umgebung (rot) von SP_1 ist die Steigung nur negativ und in einer Umgebung (blau) von SP_2 ist die Steigung nur positiv.

Bei beiden Punkten ist die Steigung 0. Deshalb sind SP_1 und SP_2 Sattelpunkte.

Das lokale Maximum

Der Funktionswert an der Stelle eines Hochpunktes heißt lokales Maximum.

Das lokale Minimum

Der Funktionswert an der Stelle eines Tiefpunktes heißt lokales Minimum.

1,2 ist ein lokales Minimum, weil $TP(8|1,2)$ ein Tiefpunkt ist.

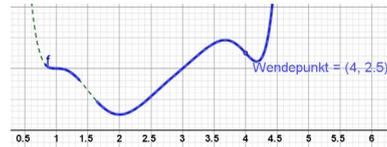
Das globale Maximum	<p>Der höchste Funktionswert im Definitionsbereich einer Funktion heißt globales Maximum.</p> <p>Das globale Maximum befindet sich entweder an der Stelle eines Hochpunktes oder an einer Randstelle des Definitionsbereiches.</p>	<p>Das globale Maximum ist 4, an der Stelle des Hochpunktes HP_1</p> <p>Wie findet man ein globales Maximum?</p> <ul style="list-style-type: none"> • Zunächst bestimmt man alle Extremstellen, an denen sich Hochpunkte befinden. • Man berechnet die Funktionswerte an den Rändern des Definitionsbereiches • Man berechnen die Funktionswerte an den Extremstellen, an denen sich Hochpunkte befinden. <p>Der größte berechnete Funktionswert ist das globale Maximum.</p> <p>Das globale Minimum ist $-0,6879$, am rechten Rand des Definitionsbereiches</p> <p>Wie findet man ein globales Minimum?</p> <ul style="list-style-type: none"> • Zunächst bestimmt man alle Extremstellen, an denen sich Tiefpunkte befinden. • Man berechnet die Funktionswerte an den Rändern des Definitionsbereiches • Man berechnen die Funktionswerte an den Extremstellen, an denen sich Tiefpunkte befinden. <p>Der kleinste berechnete Funktionswert ist das globale Minimum.</p> <p>In der Regel bestimmt man die globalen Extrema gleichzeitig:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Zunächst bestimmt man alle Extremstellen • Man berechnet die Funktionswerte an den Rändern des Definitionsbereiches • Man berechnen die Funktionswerte an den Extremstellen <p>Der kleinste berechnete Funktionswert ist das globale Minimum.</p> <p>Der größte berechnete Funktionswert ist das globale Maximum.</p>
Das globale Minimum	<p>Der niedrigste Funktionswert im Definitionsbereich einer Funktion heißt globales Minimum.</p> <p>Das globale Minimum befindet sich entweder an der Stelle eines Tiefpunktes oder an einer Randstelle des Definitionsbereiches.</p>	
Globales / Lokales Extremum	<p>Extremum ist der Oberbegriff für Maximum und Minimum</p>	

Der Wendepunkt

Einen Wendepunkt kann man auf **zweierlei Weise** beschreiben.

Mithilfe der Steigung:

An einem Wendepunkt hat die Ableitung einen Extrempunkt. Das bedeutet: Im Wendepunkt ist die Steigung des Graphen lokal minimal oder lokal maximal.



In einer Umgebung (blau) um den Punkt $(4|2,5)$ gibt es keinen Punkt mit größerer negativer Steigung. An der Stelle $x=4$ hat die Steigung (und somit f') ein lokales Minimum.

Weniger mathematisch könnte man auch sagen: An der Stelle des Wendepunktes geht es am steilsten nach unten.

Mithilfe der Krümmung:



Stellen Sie sich vor, der Graph ist eine Straße. Sie fahren von links nach rechts entlang des Graphen.

Bevor Sie den Wendepunkt erreichen, lenken Sie nach rechts, hinter dem Wendepunkt nach links. Unmittelbar am Wendepunkt halten Sie das Lenkrad gerade.

Ein Wendepunkt liegt vor, wenn eine Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung übergeht, oder eine Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung.

W_+ ist ein Wendepunkt mit lokal maximaler Steigung. Vor und hinter dem Wendepunkt ist die Steigung geringer.

W_0 ist ein Wendepunkt mit einem Krümmungswechsel von Rechtskrümmung zu Linkskrümmung.

Wie findet man Wendepunkte?

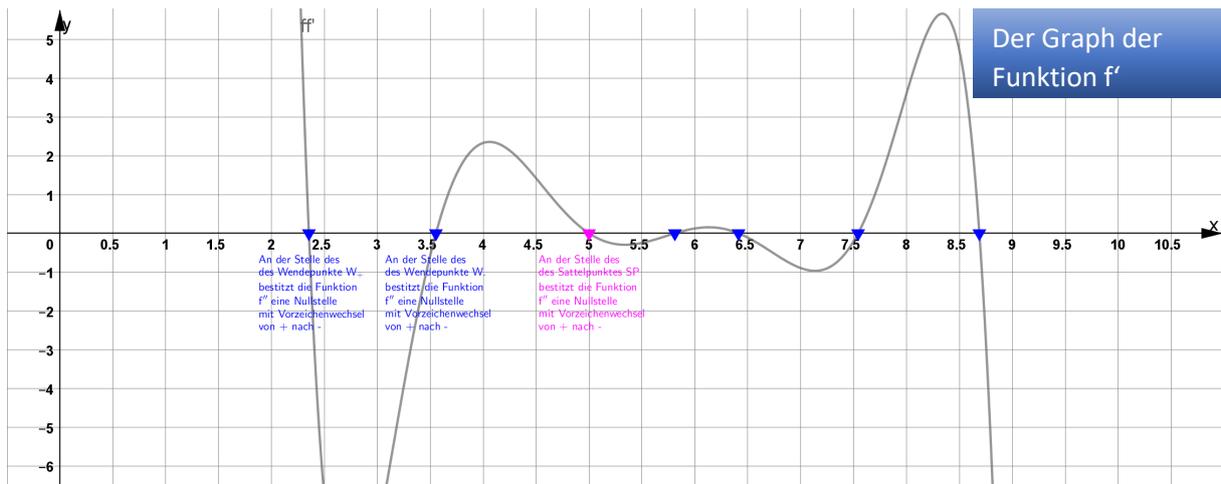
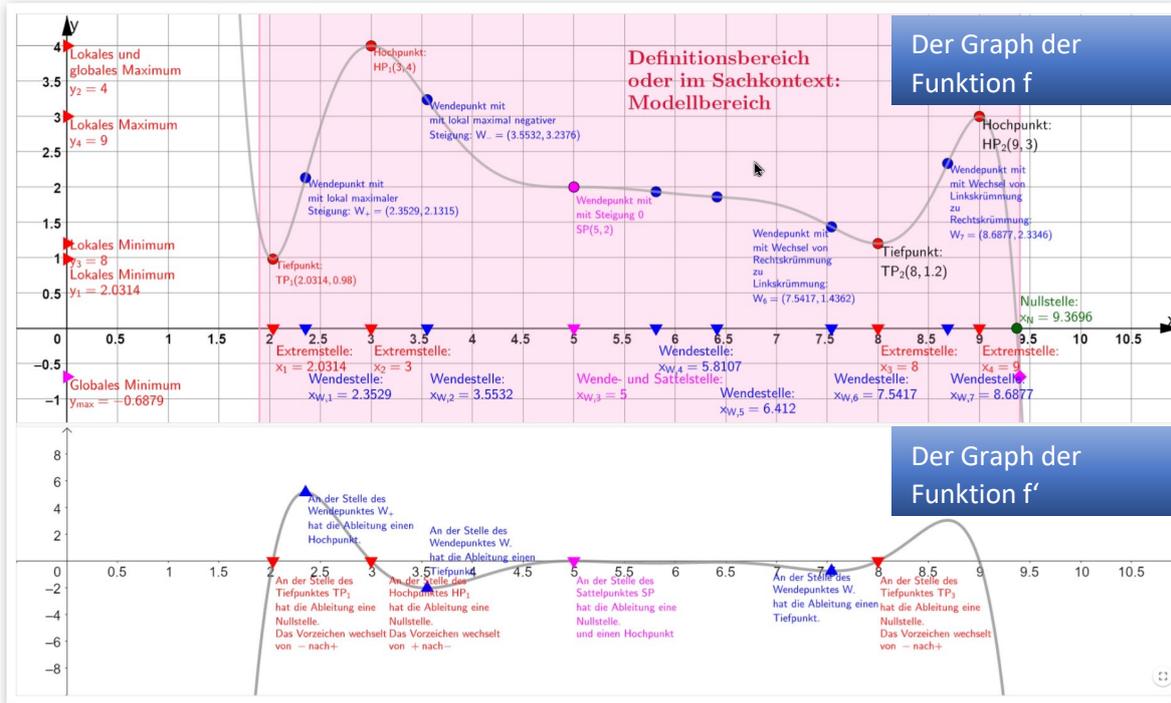
- Sie bestimmen die Extremstellen der Ableitungsfunktion.
 - Lösungen von $f''(x) = 0$
 - VZWK
- An den Extremstellen der ersten Ableitung (nicht an den Sattelstellen) befinden sich die Wendestellen der Funktion.

Der Sattelpunkt (II)

Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit Steigung 0!

Die Stelle eines Sattelpunktes ist gleichzeitig Extremstelle der Ableitung und Nullstelle.

Auf der folgenden Seite können Sie noch einmal die Eigenschaften der besonderen Punkte einer Funktion im Zusammenhang mit der Ableitungsfunktion betrachten.



Der besondere Punkt

Der Hochpunkt

Die Frage in Sachkontextaufgaben

Bestimmen Sie (rechnerisch) alle Zeitpunkte, zu denen *die Größe XY* vorübergehend einen maximalen Wert annimmt.

Beispiel: Ein Auto fährt auf der Autobahn. Die Geschwindigkeit des Autos kann für einen Zeitraum von 2 Stunden durch die Funktion g modelliert werden. Bestimmen Sie rechnerische die Zeitpunkte zu denen das Auto innerhalb eines Zeitraumes eine Höchstgeschwindigkeit gefahren ist.

Die Rechnung und die Antwort

Sie berechnen die Hochpunkte, indem Sie die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen und mithilfe des VZWK alle Stellen bestimmen, an denen die Ableitungsfunktion das Vorzeichen von + nach - ändert.

Zu den Zeitpunkten ... und ... nimmt die Größe XY mit den Werten ..., ... innerhalb eines Zeitraumes den größten Wert an.

Der Tiefpunkt

Bestimmen Sie (rechnerisch) alle Zeitpunkte, zu denen *die Größe XY* vorübergehend einen minimalen Wert annimmt.

Beispiel: Der zeitliche Verlauf der Wassermenge in einem Becken kann für einen Zeitraum von 30 Minuten durch die Funktion $V(t)$ modelliert werden.

Bestimmen Sie rechnerisch die Zeitpunkte, zu denen innerhalb eines Zeitraumes eine maximale Menge Wasser im Becken ist.

Sie berechnen die Tiefpunkte, indem Sie die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen und mithilfe des VZWK alle Stellen bestimmen, an denen die Ableitungsfunktion das Vorzeichen von $-$ nach $+$ ändert.

Zu den Zeitpunkten ... und ... nimmt die Größe XY mit den Werten ..., ... innerhalb eines Zeitraumes den kleinsten Wert an.

Der Sattelpunkt

Bestimmen Sie (rechnerisch) alle Zeitpunkte, zu denen die Größe XY stagniert.

Sie berechnen die Tiefpunkte, indem Sie die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen und mithilfe des VZWK alle Stellen bestimmen, an denen die Ableitungsfunktion das Vorzeichen an den Nullstellen nicht ändert.

Zu den Zeitpunkten ... und ... stagniert die Größe XY jeweils bei den Werten ... und ...

Das globale Maximum Das globale Minimum

Bestimmen Sie den maximalen und den minimalen Wert der Größe XY im Modellzeitraum

Beispiel: Der zeitliche Verlauf des Aktienwertes einer Firma kann für einen Zeitraum von 1 Jahr mithilfe der Funktion w modelliert werden. Bestimmen Sie den höchsten und den niedrigsten Wert der Aktie.

Sie berechnen zunächst alle Extremstellen, indem Sie die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen und mithilfe des VZWK alle Stellen bestimmen, an denen die Ableitungsfunktion das Vorzeichen wechselt. Dann berechnen Sie die Funktionswerte an den Extremstellen und an den Randstellen des Definitionsbereiches. Der größte Funktionswert ist das globale Maximum, der kleinste Funktionswert ist das globale Minimum.

Zum Zeitpunkt ... nimmt die Größe XY mit ... den größten Wert an.
Zum Zeitpunkt ... nimmt die Größe XY mit ... den kleinsten Wert an.

Der Wendepunkt bzw. globale Extrema der Änderungsrate.

Die globalen Extrema der Änderungsrate befinden sich entweder an den Extremstellen der Ableitungsfunktion (das sind gleichzeitig die Wendepunkte der Funktion) oder an den Randstellen.

Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen die Größe XY am schnellsten zunimmt / am schnellsten abnimmt.
Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen die Änderungsrate der Größe XY maximal / minimal ist.

Beispiel:

Die Temperatur in einem Zimmer kann über einen Zeitraum von 2 Stunden durch die Funktion T modelliert werden.

Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Temperatur am schnellsten ansteigt.

Sie Bestimmen die Wendepunkte der Funktion, indem Sie zunächst die Nullstellen der zweiten Ableitung f'' bestimmen. Mithilfe des VZWK suchen Sie die Nullstellen, an denen die zweite Ableitung auch ihr Vorzeichen wechselt.

Zum Zeitpunkt ..., bei einer Temperatur von ... Grad nimmt die Temperatur mit ... Grad pro Stunde am schnellsten zu.

Eine ausführliche Beispielaufgabe (mit Hilfsmittel)

[Sie finden hier eine Geogebra-Datei mit der zu untersuchenden Funktion. So können Sie Schritt für Schritt die Funktionsuntersuchung mitrechnen.](#)

Die Funktion ist für diesen speziellen Zweck entworfen und ist viel komplizierter als Funktionen in Klausuren. Deshalb wird die Funktionsgleichung hier nicht vollständig abgedruckt. Diese Funktion bietet dafür aber alle Arten von besonderen Punkten und Ihnen die Gelegenheit, alle Möglichkeiten zur Funktionsuntersuchung nachzuvollziehen.

Aufgabe

Zwischen den Zeitpunkten 1,9 Stunden und 9,4 Stunden kann bei einem Experiment die Temperatur einer Lösung durch die Funktion T modelliert werden.

Die Funktion T ordnet innerhalb des Modellbereiches jedem Zeitpunkt x in Stunden die Temperatur $T(x)$ der Lösung in °C zu.

$$T(x) := \frac{-1542461}{2540160000} x^9 + \dots - \frac{98827711}{39200} x + \frac{2368713}{1960}$$

Rechnung

1	$T(x) := (-1542461 / 2540160000 * x^9) +$ → $T(x) := \frac{-1542461}{2540160000} x^9 + \frac{19!}{635}$
2	$T'(x) := \text{Ableitung}(T(x), x, 1)$ → $T'(x) := \frac{1}{2540160000} (-1388$
3	$T''(x) := \text{Ableitung}(T'(x), x, 2)$ → $T''(x) := \frac{1}{1270080000} (-5552$

Schauen Sie sich an, wie man den Modellbereich einer Funktion in der Grafik sichtbar macht:



Kommentar / Dokumentation im Heft

Sie sollten bei jeder Aufgabe damit beginnen, dass Sie die Funktionsgleichung und die erste und zweite Ableitung der Funktion in Geogebra zu definieren.

Dann schauen Sie sich den Graphen in Geogebra. Geben Sie in die Eingabezeile die Grenzen des Modells ein.

Im Heft sollten Sie die Ableitungen auch einmal notieren. Hier wegen der Länge nur in verkürzter Form.

$$T'(x) := \frac{1}{2540160000} (-13882149 x^8 + \dots - 6404035672800)$$

$$T''(x) := \frac{1}{1270080000} (-55528596 x^7 + \dots + 5666415549210)$$

- a) Bestimmen Sie rechnerisch die Temperatur der Lösung zum Zeitpunkt 2 Stunden.

4 T(2)
○ → 1

- b) Bestimmen Sie rechnerisch die Zeitpunkte, zu denen die Temperatur 2°C beträgt.

$$T(x)=2$$

$$\rightarrow \frac{-1542461}{2540160000} x^9 + \frac{19513451}{635040000} x^8 - \frac{1716991919}{2540160000} x^7 + \frac{10753504}{127008000} x^6 - \frac{1542461}{2540160000} x^5 + \frac{19513451}{635040000} x^4 - \frac{1716991919}{2540160000} x^3 + \frac{10753504}{127008000} x^2 - \frac{1542461}{2540160000} x + \frac{19513451}{635040000} = 2$$

6 \$5
○ Löse: {x = 1.835, x = 2.3272, x = 5, x = 8.5749, x = 9.2374}

Wenn Sie wissen wollen, wie man Zeitangaben, die als Dezimalbrüche bekannt sind, in herkömmliche Zeitangaben mit Stunden, Minuten und Sekunden umwandeln kann, dann schauen Sie sich das folgende Video an:



Diese Aufgabe überprüft, ob Sie die Funktion im Sachkontext verstanden. Haben Sie verstanden, welche Größe x repräsentiert und welche Größe $T(x)$ repräsentiert.

Auch wenn diese Art von Aufgabe Ihnen sehr einfach erscheint, so erledigen Sie sie doch ernsthaft.

Zum Zeitpunkt 2 Stunden beträgt die Temperatur 1°C.

Auch diese Aufgabe überprüft, ob Sie Funktion im Sachkontext verstanden haben.

In diesem Fall findet man 5 Lösungen der Gleichung. Es ist zu beachten, dass nur Lösungen im Sachkontext interpretiert werden können, die zwischen den Modellgrenzen liegen.

$$T(x) = 2$$

$$\frac{-1542461}{2540160000} x^9 + \dots = 2 \mid CAS$$

$$x_1 = 1.835, x_2 = 2.3272, x_3 = 5, x_4 = 8.5749, x_5 = 9.2374$$

das mathematische Modell ist nur für Werte zwischen 1,9 und 9,4 gültig. Deshalb kann die Lösung x_1 nicht im Sachkontext interpretiert werden.

Zu den Zeitpunkten 2,33 Stunden (2h:19min:37s), 5 Stunden, 8,5749 Stunden (8h:34min:29s) und 9,2374 Stunden (9h:14min:14s) beträgt die Temperatur in der Lösung genau 2 °C.

- c) Berechnen Sie $T'(2,5)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext.

8 $T'(2,5)$
 ≈ -1.3074

- d) Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen die Temperatur der Lösung mit 1°C pro Minute zunimmt.

9 $T'(x)=1$
 $\approx -0.0055 x^8 + 0.2458 x^7 - 4.7316 x^6 + 50.8008 x^5 - 331.94$

10 \$9
 NLöse: {x = 2.0592, x = 2.8825, x = 8.2203, x = 8.9524}

Wenn Sie die Ableitungsfunktion in Geogebra definiert haben, ist die Berechnung des Funktionswertes nicht schwierig. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, zu prüfen, ob Sie die erste Ableitung als Änderungsrate interpretieren können.

Für die Maßeinheit einer Ableitungsfunktion gilt:

Wenn die Ursprungsfunktion einer Größe mit der Maßeinheit A (Maßeinheit von x) eine Maßeinheit der Größe B zuordnet, dann ordnet die Ableitung derselben Größe mit Maßeinheit A eine Größe der Maßeinheit „B pro A“ zu. Hier: T ordnet jedem Zeitpunkt in Stunden die Temperatur in $^\circ\text{C}$ zu.

T' ordnet jedem Zeitpunkt in Stunden die Änderungsrate der Temperatur in $^\circ\text{C}$ pro Stunde zu.

Zum Zeitpunkt 2h:30min nimmt die Temperatur mit einer Änderungsrate von ca. $1,3^\circ\text{C}$ pro Stunde ab.

Einerseits soll in auch in dieser Aufgabe geprüft werden, ob Sie verstanden haben, dass Änderungsraten durch die Ableitungsfunktion modelliert werden. Andererseits gilt es, die Fragestellung in eine geeignete Gleichung, nämlich $T'(x) = 1$ zu übersetzen.

Auch hier muss man prüfen, ob alle berechneten Werte innerhalb des Modellbereiches liegen.

$$T'(x) = 1$$

$$\frac{1}{2540160000} (-13882149 x^8 + \dots) = 1 | \text{CAS}$$

$$x_1 = 2.0592, x_2 = 2.8825, x_3 = 8.2203, x_4 = 8.9524$$

Alle berechneten Werte liegen innerhalb des Modellbereiches.

Zu den Zeitpunkten 2,0592h (2h: 03min: 33s), 2,8825h (2h: 52min: 57s), 8,2203h (8h: 13min: 13s) und 8,9524h (8h: 57min: 08s) steigt die Temperatur in der Lösung mit 1°C pro Stunde.

e) Bestimmen Sie alle Zeitpunkte, zu denen die Temperatur innerhalb eines Zeitraumes maximal / minimal ist und geben Sie die Temperaturen zu diesen Zeitpunkten an.



10	$T'(x)=0$																																				
<input type="radio"/>	$\rightarrow \frac{1}{2540160000} (-13882149 x^8 + 624430432 x^7 - 12018943433 x^6 + 129042050892 x^5 - 843196686935 x^4 + \dots)$																																				
11	\$10																																				
<input type="radio"/>	Löse: $\{x = 2.0314, x = 3, x = 5, x = 8, x = 9\}$																																				
12	Stellen_1:={0,2.031400365783, 2.5,3,4, 5,6, 8,8.5,9,10}																																				
<input type="radio"/>	\approx Stellen ₁ := $\{0, 2.0314, 2.5, 3, 4, 5, 6, 8, 8.5, 9, 10\}$																																				
13	Steigungen_1:=T'(Stellen_1)																																				
<input type="radio"/>	\approx Steigungen ₁ := $\{-2521.1151, -1.594 \cdot 10^{-12}, 4.5578, 0, -1.3462, 0, -0.1396, 0, 2.5211, 0, -191.439\}$																																				
14	Werte_1:=T(Stellen_1)																																				
<input type="radio"/>	\approx Werte ₁ := $\{1208.527, 0.98, 2.8553, 4, 2.4467, 2, 1.9056, 1.2, 1.799, 3, -53.3112\}$																																				
15	TabellenText(Stellen_1,Steigungen_1,Werte_1)																																				
<input type="radio"/>	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>0</th> <th>2.0314</th> <th>2.5</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> <th>6</th> <th>8</th> <th>8.5</th> <th>9</th> <th>10</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>\approx</td> <td>-2521.1151</td> <td>0</td> <td>4.5578</td> <td>0</td> <td>-1.3462</td> <td>0</td> <td>-0.1396</td> <td>0</td> <td>2.5211</td> <td>0</td> <td>-191.439</td> </tr> <tr> <td></td> <td>1208.527</td> <td>0.98</td> <td>2.8553</td> <td>4</td> <td>2.4467</td> <td>2</td> <td>1.9056</td> <td>1.2</td> <td>1.799</td> <td>3</td> <td>-53.3112</td> </tr> </tbody> </table>		0	2.0314	2.5	3	4	5	6	8	8.5	9	10	\approx	-2521.1151	0	4.5578	0	-1.3462	0	-0.1396	0	2.5211	0	-191.439		1208.527	0.98	2.8553	4	2.4467	2	1.9056	1.2	1.799	3	-53.3112
	0	2.0314	2.5	3	4	5	6	8	8.5	9	10																										
\approx	-2521.1151	0	4.5578	0	-1.3462	0	-0.1396	0	2.5211	0	-191.439																										
	1208.527	0.98	2.8553	4	2.4467	2	1.9056	1.2	1.799	3	-53.3112																										

Hier müssen Sie zeigen, dass Sie das Kalkül (die Rechenmethode) zur Bestimmung von Hochpunkten, Tiefpunkten und Sattelpunkten beherrschen. In der Aufgabenstellung e) wird noch nicht nach Sattelpunkten gefragt – sie ergeben sich aber durch diese Rechnung automatisch. Die notwendige Bedingung für Extrems- und Sattelstellen ist:
 $T'(x) = 0$

$$\frac{1}{2540160000} (-13882149 x^8 + \dots) = 0 | CAS$$

$$x_1 = 2.0314, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 8, x_5 = 9$$

Wenn die Funktion Extrem- oder Sattelstellen besitzt, dann an den Stellen x_1, \dots, x_5 .

Weitere Untersuchung mit den VZWK:

x	0	2.0314	2.5	3	4	5	6	8	8.5	9	10
$T'(x)$	-2521.1151	0	4.5578	0	-1.3462	0	-0.1396	0	2.5211	0	-191.439
	\searrow		\nearrow		\searrow		\searrow		\nearrow		\searrow
$T(x)$	1208.527	0.98	2.8553	4	2.4467	2	1.9056	1.2	1.799	3	-53.3112
		TP_1		HP_1		SP		TP_2		HP_2	

Die Funktion besitzt im Modellbereich 2 Hochpunkte: $HP_1(3|4)$ und $HP_2(9|3)$

Die Funktion besitzt im Modellbereich 2 Tiefpunkte: $TP_1(2,0314|0,98)$ und $TP_2(8|1.2)$

Die Funktion besitzt im Modellbereich 1 Sattelpunkt: $SP(5|2)$

Zu den Zeitpunkten 3 Stunden und 9 Stunden erreicht die Temperatur vorübergehende maximale Temperaturen von 4°C und 3°C.

Zu den Zeitpunkten 2,0314 (2h: 03min: 51s) und 8 Stunden erreicht die Temperatur vorübergehende minimale Temperaturen von 0,98°C und 1,2°C

f) Bestimmen Sie die maximale und die minimale Temperatur der Lösung im Modellzeitraum.

16	Stellen_2:={1.9,2.031400365783, 3, 8, 9,9.4}														
<input type="radio"/>	\approx Stellen ₂ := {1.9, 2.0314, 3, 8, 9, 9.4}														
17	Werte_2:=T(Stellen_2)														
<input checked="" type="radio"/>	\approx Werte ₂ := {1.3918, 0.98, 4, 1.2, 3, -0.6879}														
18	TabellenText(Stellen_2,Werte_2)														
<input type="radio"/>	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>1.9</td> <td>2.0314</td> <td>3</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>9.4</td> </tr> <tr> <td>\approx</td> <td>1.3918</td> <td>0.98</td> <td>4</td> <td>1.2</td> <td>3</td> <td>-0.6879</td> </tr> </table>		1.9	2.0314	3	8	9	9.4	\approx	1.3918	0.98	4	1.2	3	-0.6879
	1.9	2.0314	3	8	9	9.4									
\approx	1.3918	0.98	4	1.2	3	-0.6879									

Bei dieser Aufgabe geht es um die globalen Extrema, also um den höchsten und den niedrigsten Funktionswert innerhalb des Modellzeitraumes.

Die globalen Extrema befinden sich entweder an den Extremstellen oder an den Randstellen des Modellbereiches.

Man muss alle Funktionswerte an den Extremstellen und an den Randstellen berechnen.

Die Funktionswerte an den Rand- und Extremstellen sind:

x	1.9	2.0314	3	8	9	9.4
$T(x)$	1.3918	0.98	4	1.2	3	-0.6879

Zum Zeitpunkt 3 Stunden ist die Temperatur der Lösung mit 4°C maximal.

Zum Zeitpunkt 9,4 Stunden (9h: 24min) ist die Temperatur mit ca. -0,6879 minimal.

Stagnation bedeutet Stillstand oder Stockung bei einer Entwicklung. Hier sollen Sie also alle Sattelpunkte im Modellbereich finden.

Rechnung bereits in e) erledigt.

Zum Zeitpunkt 5 Stunden stagniert die Temperatur der Lösung bei 2°C.

g) Bestimmen Sie die Zeitpunkte und Temperaturen, bei denen die Temperatur stagniert.

Siehe e)

h) Bestimmen Sie die Zeitpunkte, Temperaturen und Änderungsraten, bei denen die Temperatur vorübergehend maximal ansteigt / maximale abfällt.

19	$T''(x)=0$																																																												
	$\approx -0.0437 x^7 + 1.7208 x^6 - 28.3894 x^5 + 254.0038 x^4 - 1327.7852 x^3 + 4042.7516 x^2 - 6612.7599 x + 4461.4635 = 0$																																																												
20	\$19																																																												
	Löse: $\{x = 2.3529, x = 3.5532, x = 5, x = 5.8107, x = 6.412, x = 7.5417, x = 8.6877\}$																																																												
21	Stellen_3:= $(0, 2.352941713318, 3, 3.55316127468, 4, 4.999999983892, 5.2, 5.810659082356, 6, 6.411979287742, 7, 7.54173895341, 8, 8.687736361127, 9)$																																																												
	$\approx \text{Stellen}_3 := \{0, 2.3529, 3, 3.5532, 4, 5, 5.2, 5.8107, 6, 6.412, 7, 7.5417, 8, 8.6877, 9\}$																																																												
22	Änderungsrate2_3:= $T''(\text{Stellen}_3)$																																																												
	$\approx \text{Änderungsrate}_2 := \{4461.4635, 2.5302 \cdot 10^{-9}, -7.7533, 9.9369 \cdot 10^{-9}, 2.3331, 2.8938 \cdot 10^{-8}, -0.2478, 4.3216 \cdot 10^{-8}, 0.1261, 5.3482 \cdot 10^{-8}, -0.8956, 6.2997 \cdot 10^{-8}, 3.609, 3.6251 \cdot 10^{-8}, -23.7982\}$																																																												
23	Änderungsrate1_3:= $T'(\text{Stellen}_3)$																																																												
	$\approx \text{Änderungsrate}_1 := \{-2521.1151, 5.1202, 0, -2.0218, -1.3462, -2.3307 \cdot 10^{-16}, -0.0285, -0.1527, -0.1396, -0.0911, -0.3546, -0.7503, 0, 3.0393, 0\}$																																																												
24	Werte_3:= $T(\text{Stellen}_3)$																																																												
	$\approx \text{Werte}_3 := \{1208.527, 2.1315, 4, 3.2376, 2.4467, 2, 1.998, 1.9337, 1.9056, 1.8598, 1.7562, 1.4362, 1.2, 2.3346, 3\}$																																																												
25	TabellenText($\text{Stellen}_3, \text{Änderungsrate}_2, \text{Änderungsrate}_1, \text{Werte}_3$)																																																												
	<table border="1"> <tr> <td>0</td> <td>2.3529</td> <td>3</td> <td>3.5532</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>5.2</td> <td>5.8107</td> <td>6</td> <td>6.412</td> <td>7</td> <td>7.5417</td> <td>8</td> <td>8.6877</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>4461.4635</td> <td>0</td> <td>-7.7533</td> <td>0</td> <td>2.3331</td> <td>0</td> <td>-0.2478</td> <td>0</td> <td>0.1261</td> <td>0</td> <td>-0.8956</td> <td>0</td> <td>3.609</td> <td>0</td> <td>-23.7982</td> </tr> <tr> <td>-2521.1151</td> <td>5.1202</td> <td>0</td> <td>-2.0218</td> <td>-1.3462</td> <td>0</td> <td>-0.0285</td> <td>-0.1527</td> <td>-0.1396</td> <td>-0.0911</td> <td>-0.3546</td> <td>-0.7503</td> <td>0</td> <td>3.0393</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1208.527</td> <td>2.1315</td> <td>4</td> <td>3.2376</td> <td>2.4467</td> <td>2</td> <td>1.998</td> <td>1.9337</td> <td>1.9056</td> <td>1.8598</td> <td>1.7562</td> <td>1.4362</td> <td>1.2</td> <td>2.3346</td> <td>3</td> </tr> </table>	0	2.3529	3	3.5532	4	5	5.2	5.8107	6	6.412	7	7.5417	8	8.6877	9	4461.4635	0	-7.7533	0	2.3331	0	-0.2478	0	0.1261	0	-0.8956	0	3.609	0	-23.7982	-2521.1151	5.1202	0	-2.0218	-1.3462	0	-0.0285	-0.1527	-0.1396	-0.0911	-0.3546	-0.7503	0	3.0393	0	1208.527	2.1315	4	3.2376	2.4467	2	1.998	1.9337	1.9056	1.8598	1.7562	1.4362	1.2	2.3346	3
0	2.3529	3	3.5532	4	5	5.2	5.8107	6	6.412	7	7.5417	8	8.6877	9																																															
4461.4635	0	-7.7533	0	2.3331	0	-0.2478	0	0.1261	0	-0.8956	0	3.609	0	-23.7982																																															
-2521.1151	5.1202	0	-2.0218	-1.3462	0	-0.0285	-0.1527	-0.1396	-0.0911	-0.3546	-0.7503	0	3.0393	0																																															
1208.527	2.1315	4	3.2376	2.4467	2	1.998	1.9337	1.9056	1.8598	1.7562	1.4362	1.2	2.3346	3																																															

Diese Aufgabe sucht nach lokalen Extrema der Ableitungsfunktion.

Die notwendige Bedingung für lokale Extremstellen ist, dass dort der Funktionswert der Ableitung 0 sein muss.

Hier werden lokale Extremstellen der Ableitungsfunktion gesucht.

Man muss deshalb die Nullstellen der Ableitung der Ableitungsfunktion, also der zweiten Ableitungsfunktion suchen.

Die Extremstellen der ersten Ableitungsfunktion sind identisch mit den Wendestellen der Funktion.

Übrigens kommt bei dieser Funktion keine Sattelstelle der Ableitungsfunktion vor. Zu interpretieren wäre eine solche Stelle als Zeitpunkt zu dem der Anstieg oder der Abfall der Temperatur stagniert.

$$T''(x) = 0$$

$$-0.0437 x^7 + 1.7208 x^6 - 28.3894 x^5 + 254.0038 x^4 - 1327.7852 x^3 + 4042.7516 x^2 - 6612.7599 x + 4461.4635 = 0 | \text{CAS}$$

$$x_1 = 2.3529, x_2 = 3.5532, x_3 = 5, x_4 = 5.8107, x_5 = 6.412, x_6 = 7.5417, x_7 = 8.6877$$

Wenn Die Funktion T Wendestellen besitzt, dann an den Stellen x_1, \dots, x_7 .

Weitere Untersuchung mit dem Vorzeichenwechselkriterium:

x	0	2.35	3	3.55	4	5	5.2	5.81	6	6.41	7	7.54	8	8.69	9
$T''(x)$	4461.46	0	-7.75	0	2.33	0	-0.25	0	0.13	0	-0.9	0	3.61	0	-23.8
	\nearrow	$HP_{T',1}$	\searrow	$TP_{T',1}$	\nearrow	$HP_{T',2}$	\searrow	$TP_{T',2}$	\nearrow	$HP_{T',3}$	\searrow	$TP_{T',3}$	\nearrow	$HP_{T',4}$	\searrow
$T'(x)$	-2521.12	5.12	0	-2.02	-1.35	0	-0.03	-0.15	-0.14	-0.09	-0.35	-0.75	0	3.04	0
$T(x)$	1208.53	2.13	4	3.24	2.45	2	2	1.93	1.91	1.86	1.76	1.44	1.2	2.33	3

Die Ableitungsfunktion T' besitzt 4 Hochpunkte und 3 Tiefpunkte

- Zum Zeitpunkt **2h: 21min10s** bei einer Temperatur von $2,13^\circ\text{C}$ steigt die Temperatur vorübergehend maximal mit $5,12^\circ\text{C}$ pro Stunde an.
- Zum Zeitpunkt **3h: 33min: 11s** bei einer Temperatur von $3,24^\circ\text{C}$ fällt die Temperatur vorübergehend maximal mit $2,02^\circ\text{C}$ pro Stunde ab.
- Zum Zeitpunkt **5h: 00min: 0s** bei einer Temperatur von 2°C steigt die Temperatur vorübergehend maximal mit 0°C pro Stunde an.
- Zum Zeitpunkt **5h: 48min: 38s** bei einer Temperatur von $1,93^\circ\text{C}$ fällt die Temperatur vorübergehend maximal mit $0,15^\circ\text{C}$ pro Stunde ab.
- Zum Zeitpunkt **6h: 24min: 43s** bei einer Temperatur von $1,86^\circ\text{C}$ fällt die Temperatur vorübergehend minimal mit $-0,14^\circ\text{C}$ pro Stunde ab.
- Zum Zeitpunkt **7h: 32min: 30s** bei einer Temperatur von $1,44^\circ\text{C}$ fällt die Temperatur vorübergehend maximal mit $0,75^\circ\text{C}$ pro Stunde ab.
- Zum Zeitpunkt **8h: 41min: 15s** bei einer Temperatur von $2,33^\circ\text{C}$ steigt die Temperatur vorübergehend maximal mit $3,04^\circ\text{C}$ pro Stunde an.

i) Bestimmen Sie die Zeitpunkte, Temperaturen und Änderungsraten der Temperaturen, bei denen die Temperatur im Modellzeitraum maximal ansteigt / abfällt.	26	Stellen_4:={1.9, 2.352941713318, 3.55316127468, 4.999999983892, 5.810659082356, 6.411979287742, 7.54173895341, 8.687736361127,9.4}
	27	Änderungsraten_4:=T'(Stellen_4) \approx Änderungsraten₄ := { -6.92, 5.12, -2.02, -2.33 · 10⁻¹⁶, -0.15, -0.09, -0.75, 3.04, -24.28 }
	28	TabellenText(Stellen_4,Änderungsraten_4) \approx

Jetzt werden das globale Maximum und das globale Minimum der ersten Ableitungsfunktion gesucht.

Die globalen extremalen Steigungen befinden sich entweder an der Stelle eines Wendepunktes oder an einer Randstelle.

Die Steigungen an den Rand- und Wendestellen sind:

x	1.9	2.35	3.55	5	5.81	6.41	7.54	8.69	9.4
$T'(x)$	-6.92	5.12	-2.02	0	-0.15	-0.09	-0.75	3.04	-24.28

Zum Zeitpunkt **2h: 21min10s**, bei einer Temperatur von $2,13^\circ\text{C}$ steigt die Temperatur der Lösung mit $5,12^\circ\text{C}$ pro Stunde maximal schnell an.

Zum Zeitpunkt **9h: 24min**, also am Ende des Modellzeitraumes, bei einer Temperatur von $-0,6879^\circ\text{C}$, fällt die Temperatur mit $-24,28^\circ\text{C}$ pro Stunde mit maximaler Geschwindigkeit ab.