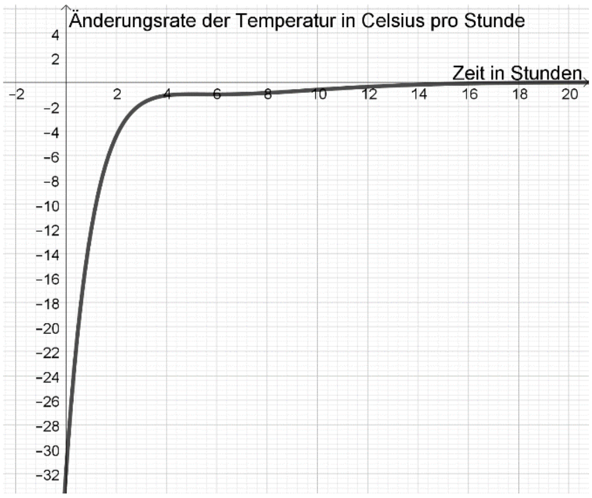
Testprüfung Teil 1 mit Integralrechnung und Exponentialfunktion

Die Temperatur eines Gegenstandes wird gesenkt.

Den zeitlichen Verlauf der Änderungsrate der Temperatur kann ab dem Zeitpunkt $x = 0$ Stunden gut durch die Funktion t modelliert werden.

$$t(x) = (-2\,x^2 + 14\,x - 32)\,e^{-\frac{1}{2}x}$$

Die Funktion t ordnet jedem Zeitpunkt x in Stunden die Änderungsrate der Temperatur $t(x)$ in °Celsius pro Stunde zu.



a) *Geben Sie $t(0)$ an und interpretieren Sie den gefundenen Wert im Sachkontext.*

b) *Berechnen Sie $t'(2)$ und interpretieren Sie den Wert im Sachkontext.*

c) *Zeigen Sie, dass der Punkt*

$$\left(5 \middle| -\frac{12}{\sqrt{e^5}}\right)$$

ein Hochpunkt ist.

d) *Bestimmen Sie die größte negative Änderungsrate der Funktion t.*
Zur Kontrolle: $-0{,}0162\,\frac{°C}{Stunde}$ pro Stunde.

e) Zu Beginn beträgt die Temperatur des Gegenstandes 40°C.
Zeigen Sie rechnerisch, dass der zeitliche Verlauf der Temperatur des Gegenstandes durch die Funktion T modelliert wird:

$$T(x) = (4x^2 - 12x + 40)e^{-\frac{1}{2}x}$$

f) *Berechnen Sie die durchschnittliche Temperatur des Gegenstandes zwischen den Zeitpunkten $x_1 = 10$ Stunden und $x_2 = 20$ Stunden.*

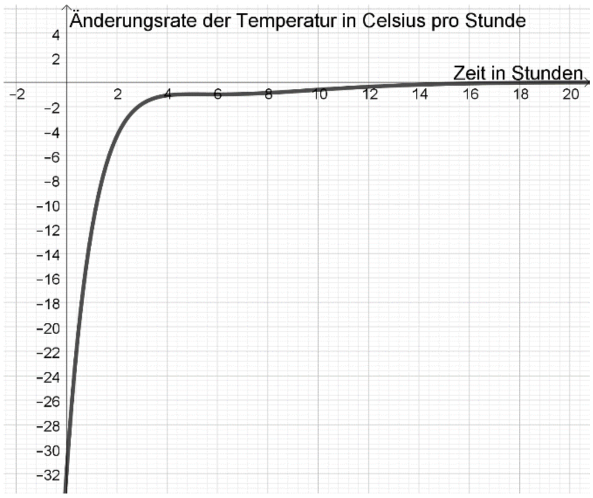
g) *Geben Sie die langfristige Temperatur des Gegenstandes an.*

Die Temperatur eines Gegenstandes wird gesenkt.

Den zeitlichen Verlauf der Änderungsrate der Temperatur kann ab dem Zeitpunkt $x = 0$ Stunden gut durch die Funktion t modelliert werden.

$$t(x) = (-2\,x^2 + 14\,x - 32)\,e^{-\frac{1}{2}x}$$

Die Funktion t ordnet jedem Zeitpunkt x in Stunden die Änderungsrate der Temperatur $t(x)$ in °Celsius pro Stunde zu.



1 f(x):=(-2x^2+14x-32)*exp(-1/2*x)

$\rightarrow \mathbf{f(x) := \left(-2\,x^2 + 14\,x - 32\right)\,e^{\frac{-1}{2}x}}$

a) *Geben Sie $t(0)$ an und interpretieren Sie den gefundenen Wert im Sachkontext.*

$$t(0) = -32$$

Zum Zeitpunkt 0 Stunden ändert sich die Temperatur des Gegenstandes mit

$$-32\,\frac{°C}{Stunde}$$

2 f(0)

$\rightarrow -32$

b) *Berechnen Sie $t'(2)$ und interpretieren Sie den Wert im Sachkontext.*

$$t'(2) = \frac{12}{e} \approx 4{,}4146$$

Zum Zeitpunkt $x = 2$ Stunden nimmt die Änderungsrate der Temperatur mit $4{,}4146\,\frac{°C}{Stunde}$ pro Stunde zu.

3 f'(2)

$\rightarrow \frac{12}{e}$

4 $3

≈ 4.4146

c) *Zeigen Sie, dass der Punkt*

$$\left(5 \middle| -\frac{12}{\sqrt{e^5}}\right)$$

ein Hochpunkt ist.

notwendige Bedingung für einen Hochpunkt

$$t'(x) = 0 | CAS$$

$$x = 5 \lor x = 6$$

Weitere Untersuchung mit dem Vorzeichenwechselkriterium

5 Löse(f'(x)=0)

$\approx \{x = 5, x = 6\}$

6 Folge({a,f'(a)},a,4.5,6.5,0.5)

$$\approx \begin{pmatrix} 4.5 & 0.079 \\ 5 & -\left(1.4211 \cdot 10^{-14}\right) \\ 5.5 & -0.016 \\ 6 & -\left(7.1054 \cdot 10^{-15}\right) \\ 6.5 & 0.0291 \end{pmatrix}$$

x	4,5	5	5,5	6	6,5
$t'(x)$	0,079	0	-0,016	0	0,0291
	↗	HP	↘	TP	↗

$$t(5) = -\frac{12}{\sqrt{e^5}}$$

Was zu zeigen war.

d) *Bestimmen Sie die größte negative Änderungsrate der Funktion t.*

Zur Kontrolle: $-0{,}0162\,\frac{°C}{Stunde}$ pro Stunde.

Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt

$$t''(x) = 0 | CAS$$
$$x \approx 5{,}4384 \vee x \approx 9{,}5616$$

x	5	5,4384	6	9,5616	10
$t''(x)$	-0,0821	0	0,0498	0	-0,0067
	↘	WP mit TP der 1. Ableitung	↗	WP mit HP der 1. Ableitung	↘

7	Löse(f''(x)=0)	$\approx \{x = 5.4384, x = 9.5616\}$
8	f''(5)	≈ -0.0821
9	f''(6)	≈ 0.0498
10	f''(10)	≈ -0.0067
11	Ersetze(f'(x),Element($7,1))	≈ -0.0162
12	f'(0)	≈ 30
13	Ersetze(f'(x),Element($7,1))	≈ -0.0162
14	Grenzwert(f'(x), ∞)	≈ 0

Zum Zeitpunkt 5,4384 Stunden ist die Änderungsrate lokal minimal.

Randwerte:

$$t'(0) = 30$$
$$t'(5{,}4384) \approx -0{,}0162$$
$$\text{für } x \to \infty{:}\ t(x) \to 0$$

Damit ist $-0{,}0162\,\frac{°C}{Stunde}$ pro Stunde die maximal negative Änderungsrate im Modellzeitraum.

e) Zu Beginn beträgt die Temperatur des Gegenstandes 40°C.
Zeigen Sie rechnerisch, dass der zeitliche Verlauf der Temperatur des Gegenstandes durch die Funktion T modelliert wird:

$$T(x) = (4x^2 - 12x + 40)e^{-\frac{1}{2}x}$$

T ist eine Stammfunktion t. Mithilfe des CAS findet man

$$T(x) = C + 4\,x^2\,e^{-0.5\,x} - 12\,x\,e^{-0.5\,x} + 40\,e^{-0.5\,x}$$

Mit $T(0) = 40$ ergibt sich

$$C = 0$$

Durch Ausklammern von $e^{-0{,}5x}$ ergibt sich die Behauptung.

15	Integral(f(x))	$\approx c_1 + 4\,x^2\,e^{-0.5x} - 12\,x\,e^{-0.5x} + 40\,e^{-0.5x}$
16	T(x):=4x² e^(-0.5x) - 12x e^(-0.5x) + 40e^(-0.5x)	$\approx T(x) := -12\,x\,e^{-0.5x} + 4\,x^2\,e^{-0.5x} + 40\,e^{-0.5x}$
17	Integral(T(x),x,10,20)	≈ 6.4193

f) *Berechnen Sie die durchschnittliche Temperatur des Gegenstandes zwischen den Zeitpunkten $x_1 = 10$ Stunden und $x_2 = 20$ Stunden.*

$$\frac{1}{20-10}\int_{10}^{20} T(x)dx \approx 0{,}64193$$

Die durchschnittliche Temperatur in diesem Zeitraum beträgt 0,64 °C.

g) *Geben Sie die langfristige Temperatur des Gegenstandes an.*

$$x \to \infty{:}\ T(x) \to 0$$