1.3 数列极限的计算（技能训练）

【内容分析】

本节主要进行$\frac{\infty}{\infty}$**型、∞-∞型、1^{∞}型**三种类型的数列和函数的极限的计算技能训练。

不同层次的学生要求不一样, 1^{∞}型*不要求仅学分考的学生。*

【教学内容】

类型一、"$\frac{\infty}{\infty}$"型,有理函数的极限（$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m, n$为非负整数）

类型二、"∞-∞"型,分子有理化的方法

类型三、"1^{∞}"型,两个重要的极限之欧拉数

【重点与难点】

1. 重点 $\frac{\infty}{\infty}$型有理函数的极限；$\infty-\infty$型分子有理化的方法. 无穷小的概念；无穷小的性质；
2. *难点*1^{∞}型欧拉数列的极限; 无穷大的概念；无穷小的性质. 无穷大和有界的关系

【知识和能力目标】

1.在掌握$\frac{\infty}{\infty}$型有理函数的极限计算的基础上化简的原理，学会一题多解。

2.在掌握**∞-∞型**分子有理化的方法基础上，学会对函数进行类型的归类，*能*归纳并总结各种类型化简的一题多解的方法和化简的技巧。

3.在深刻理解无穷小的概念的基础上，学会无穷大与无穷小的转化，会用无穷小的五个性质进行数列极限运算。

【过程和方法目标】

1.首先,在作业基础上，掌握$\frac{\infty}{\infty}$型有理函数的极限，化简的技巧和方法，一题多解，特别是通过分子分母同除以最高次幂，把无穷大量转换成无穷小量的方法，鼓励学生能总结出公式，并能熟练应用，强化练习。

2.然后,在训练∞-∞型转化成$\frac{\infty}{\infty}$型的分子有理化的方法。

3.接着,难点1^{∞}型欧拉数列的极限,的突破，把握指数运算法则的熟练应用的关键,典型例题积累化简技巧。

【情感态度和价值观目标】

1在数列极限的计算过程中,鼓励学生口答， 动手实践，反复练习，熟能生巧，培养劳动意识。

2. 进行 GGB 实验、演示分析，突破难点，培养数学建模和数学软件的应用能力。

3. 组织启发、 口答、 讨论、探究等课堂活动养成自主、探究、反思的学习习惯；培养学生交流沟通，团队合作、竞争自信的职业素质和诚实认真的道德品质。

课堂教学活动

环节一、课前反馈活动

【课前计算技能训练活动】

例题	化简技巧与方法
④ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)=$	1.**裂项法**，相消项，最后剩下首相和末项，再运用四则运算和无穷小的性质计算
① $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+3}=$	2.**添一项减一项**后再进行**裂项**，化成四则运算
② $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n+1}=$	3.先添一项减一项后**分解因式**，再裂项，化成四则运算
③ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+5}{3n^2-2n-1}=?$ 试一试?	4.★通过**分子分母同除以最高次幂**，把无穷大量转换成无穷小量，就可以运用四则运算了

【作业讲评】

聚焦问题：思考下列数列有什么特点？是前面我们介绍的什么函数？可以直接用四则运算法则吗？为什么？你想用什么化简技巧化简呢？能想出来几种方法？分别说一说他们的原理吧？

师生探究

想一想：③可以用⑥⑦的方法吗？想一想？你有更简便的方法吗？个人独思，给出解决问题的方法

评一评：学生点评，找出问题.

议一议：针对问题，学生讨论.

试一试：**下面三个问题，如何转化成已有的知识运用四则运算法则或无穷大小的关系进行计算？**

例1.完成下列三个问题的证明

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{2n+3}==\dfrac{1}{2}$

解：可以用作业中方法4的化简技巧：

第一步:分子分母 同除以最高次幂

$$原式=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{2n}{n}+\frac{3}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2+\frac{3}{n}}$$

第二步：运用四则运算法进行计算

$$=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}1}{\lim\limits_{n\to+\infty}2+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}}=\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2}$$

思考：

1.第一步化简技巧的原理和方法是什么？

答：*这样把最高次幂转化成常数,比它低的幂转化成无穷小量,*

2.第二步为何能用四则运算法则？

答案：***①因为常数和无穷小量的极限都存在；②而且是有限次运算；③分母的极限不是0***

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{n+1}=\infty$

解：可以用作业中方法4的化简技巧：

第一步:分子分母 同除以最高次幂

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

第二步：运用无穷大、无穷小的性质进行计算

根据无穷大和无穷小的关系— 无穷大的倒数是无穷小 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0$，

根据无穷小的性质或四则运算法则， $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0+0$

根据无穷大和无穷小的关系— 无穷小的倒数是无穷大

所以，*原式* $=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=0$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+5}{3n^2-2n-1}=0$

解：

第一步:分子分母 同除以最高次幂

$$原式=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}-\frac{2n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{3-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}$$

第二步：运用四则运算法进行计算

$$= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to+\infty}3-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{0+0}{3-0-0} = 0$$

说一下：第二步分别运用了无穷大和无穷小的什么性质？

老师答疑解惑，达成共识，师生归纳总结：有理函数$n \to +\infty$**时的极限**

环节二、新授

类型一、"$\frac{\infty}{\infty}$"型，分子分母同时除以最大的数

类型一、"$\frac{\infty}{\infty}$"型,有理函数的极限（$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m, n$为非负整数）

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n} = \begin{cases} 0, & 当n > m时, \\ \frac{a_0}{b_0}, & 当n = m时, \\ +\infty & 当n < m时. \end{cases}$$

【注意事项】

①适用类型：**有理函数"$\frac{\infty}{\infty}$"**型

②条件：自变量$n \to +\infty$.

③方法：分子分母除以最高次幂；

④原理：把无穷大转换成无穷小，就可以运用四则运算法则进行计算.

⑤分子分母对应的**多项式是有限项,不是有限项的先转化成有限项.**

【练一练】

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2-3n+2}{3n^2-2}$$

答案：$\frac{4}{3}$

【分组抢答】个人独学，学生讲一讲5分钟

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^2+2n-3}{5n^2-3n+1}$

解析: $\frac{2}{5}$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2-3n+4}{n+3}$

解析: ∞

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+3}{n^2-3n+4}$

解析: 0

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x+4}{2x^3-1}$

解析: $\frac{3}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+x+4}{2x^5-1}$

解析: 0

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+x+1}{2x^3-1}$

解析: ∞

★★**【高阶训练】**小组合作讨论，课堂重点练习15分钟

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+\cdots n}{n^2}$

解：下列哪位同学做的对呢？

方法一:运用四则运算法则，原式 $= \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2} = 0$

方法二: 原式 $= \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots\dfrac{n}{n^2}}{\dfrac{n^2}{n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots\dfrac{n}{n^2}}{1}$(第一步)

$= \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n^2} = 0+0+\cdots+0 = 0????$ (第二步)

方法三: 因为分母的最高次幂是1, 分母的是2, 所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+\cdots n}{n^2} = 0???$

方法四: 原式 $= \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+n}{2n^2} = \dfrac{1}{2}???$

【易错点】

解析: 注意

方法一: 极限的四则运算法则只适合有限次运算, 因此本题不能直接运用四则运算法则,
一定要明确高等数学中有限和无限是有区别的;

方法二: 第一步: 是分子分母 同除以最高次幂, 这样把最高次幂转化成常数, 比它低的幂转化成无穷小量, 常数和无穷小量的极限都存在. 这一步没有问题。

但是第二步但是这个题由于是无穷次运算, 不适合四则运算法则的条件, 所以这一步有问题。

方法三: 公式法 的本质是通过化一系列的化简运算转化成四则运算. 所以多项式也应该是有限个项, 不是有限次的要先转化成有限次。

所以, 正确的解法是方法四:

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{an^2-bn+c}{3n-2} = -1$, 求$a, b, c$

解析: 本题可以直接用结论分析, 因为极限是常数1, 所以分母的最高次幂只能是1, 则$a = 0$且$\frac{-b}{3} = 1$

c的确定是难点, *我们要回归公式的本质, 在第一步过程中发现, 最高次幂低的幂都化成了*

常数×无穷小的形式 = 无穷小, 因此与常数无关

所以c = 任意常数.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x-1)^2}{(3x+2)^2} =$

解:

化简技巧一: 展开

原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-4x+1}{9x^2+12x+4} = \dfrac{4}{9}$

思考: 需要展开吗?

化简技巧二: 观察发现最高次幂是2, 直接除以x^2就可以

第一步: 分子分母同除以x^2, 得

$$原式 = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{(2x-1)^2}{x^2}}{\dfrac{(3x+2)^2}{x^2}}$$

第二步: 把x^2拿到括号里面, 并化简得

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^2}{\left(\dfrac{3x+2}{x}\right)^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2-\dfrac{1}{x}\right)^2}{\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^2}$$

第三步: 运用四则运算法则, 得

$$= \frac{\left(2-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\right)^2}{\left(3+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}\right)^2} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

本题可以积累化简的技巧, 可以解决高次多项式得问题, 如下4:

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2n-1)^{20}(3n+4)^{30}}{(5n+3)^{50}}$

解: 方法一:

第一步：分子分母同除以n^{50},得

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(2n-1)^{20}(3n+4)^{30}}{n^{50}}}{\frac{(5n+3)^{50}}{n^{50}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(2n-1)^{20}}{n^{20}}\times\frac{(3n+4)^{30}}{n^{30}}}{\frac{(5n+3)^{50}}{n^{50}}}$$

第二步：把n拿到括号里面，并化简得

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{2n-1}{n}\right)^{20}\left(\frac{3n+4}{n}\right)^{30}}{\left(\frac{5n+3}{n}\right)^{50}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)^{20}\left(3+\frac{4}{n}\right)^{30}}{\left(5+\frac{3}{n}\right)^{50}}$$

第三步：运用四则运算法则,得

$$=\frac{2^{20}\cdot3^{30}}{5^{50}}$$

方法二：如果本题是小题，不需要步骤我们直接分析就行，需要对多项式得性质很熟悉。

观察发现分子的最高次幂是50，系数是$2^{20}\cdot3^{30}$；分母的的最高次幂是50，系数是5^{50}，所以得到$\frac{2^{20}\cdot3^{30}}{5^{50}}$.

本公式由于本质是因此本方法**不仅适用于有理函数，还适用于以下$\frac{\infty}{\infty}$*型*的问题,由此本方法可以作如下拓展**

【拓展】

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4^n+2^n}{5^n+3^n}$

解：第一步：分子分母同除以*最大的*5^n,得

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4^n}{5^n}+\frac{2^n}{5^n}}{\frac{5^n}{5^n}+\frac{3^n}{5^n}}=$$

第二步：把n留在括号外面，并化简得

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{4}{5})^n+(\frac{2}{5})^n}{1+(\frac{3}{5})^n}$$

第三步：运用四则运算法则,得

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{4}{5})^n+\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{5})^n}{1+\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{3}{5})^n}=\frac{0+0}{1+0}=0$$

【易错点归纳】

①无限次不能直接用四则运算法则，需要化简转化一下

②可以拓展到“$\frac{\infty}{\infty}$”型，方法原理同上

③注意计算的**简洁性，优化算法**例如3）、5)

类型二、"$\infty-\infty$"型,分子有理化的方法

例2.1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ 3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})}{x}$

解：

第一步：分子有理化转化成"$\frac{\infty}{\infty}$"型

$$原式=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

第二步：利用类型一$\frac{\infty}{\infty}$型的方法进行计算

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+\frac{n}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}.$$

类型二、“$\infty-\infty$”型，分子有理化的方法

④“$\infty-\infty$”型，先通过**分子有理化**转化成“$\frac{\infty}{\infty}$”型，再用上述方法

⑤“$\infty-\infty$”型转化程“$\frac{\infty}{\infty}$”型的方法还有“**通分、分解因式进行约分、两个重要的极限、洛必达法则**”等，**高中基础的学生可以简单介绍洛必达法则，**

举例：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$**补充一下两个重要的极限，提醒注意区别**$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}$（无穷小的性质）.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

解析：本题仅仅换了字母,数列可以拓展到函数

第一步：分子有理化转化成"$\frac{\infty}{\infty}$"型

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

第二步：利用类型一$\frac{\infty}{\infty}$型的方法进行计算

这里注意**无穷大的性质没有在课本上出现不要想当然，尽量转化成无穷小计算。含有根号的问题可以看成 $x^{\frac{1}{2}}$,常数1可以看成x^0, 可以同除以$x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$**

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{0}{1+1}=0.$$

另外，想用无穷大的性质也可，但容易出错.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$, *利用正无穷大 + 正无穷大 = 正无穷大,* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=+\infty$

再利用无穷大的倒数是无穷小, $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0.$

这里需要说明的是：

正无穷大 + 正无穷大 = 正无穷大, 负无穷大 + 负无穷大 = 负无穷大, 但无穷大 + 无穷大不一定正无穷大

反例： $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(-n)=-\infty$,但 $\lim\limits_{n\to+\infty}n+(-n)=0$, *反而收敛.*准确地说,

正无穷大 + 负无穷大不一定是无穷大, 可能收敛.

【强化练习】个别同学到黑板做

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x}\right)$

解：第一步：分子有理化转化成"$\frac{\infty}{\infty}$"型

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x}}$$

第二步：利用类型一$\frac{\infty}{\infty}$型的方法进行计算

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{5}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{x-5}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{5}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\frac{5}{x}}+1}=\frac{0}{1+1}=0.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-5}}$

解：直接利用类型一"$\frac{\infty}{\infty}$"型的方法进行计算

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{2x-3}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x}}}{\sqrt{\frac{3x+1}{x}}+\sqrt{\frac{x-5}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2-\frac{3}{x}}-1}{\sqrt{3+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{5}{x}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+1}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}\right)}{x}$

解：第一步：分子有理化转化成"$\frac{\infty}{\infty}$"型

$原式=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}$

第二步：利用类型一$\frac{\infty}{\infty}$型的方法进行计算

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}.$

【专升本链接】在上次课的放缩法基础上完成以下证明

1.(2015计算机) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

2. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$

方法提炼⑥“放缩法”“两边夹定理”.通过**以下几个例子，指导**学有余力的学生**复习初等数学中的放缩法.**

3.$\lim\limits_{x\to 0}|sinx|=0$

解析：$\because 0\le|sinx|\le|x|\ \therefore\lim\limits_{x\to 0}|sinx|=\lim\limits_{x\to 0}|x|=\lim\limits_{x\to 0}0=0$

4.$\lim\limits_{x\to 0}cosx=1$

解析：$\because cosx=1-2sin^2\frac{x}{2}$ 而$0\le 2sin^2\frac{x}{2}\le 2(\frac{x}{2})^2=\frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow -\dfrac{x^2}{2}\le -2sin^2\dfrac{x}{2}\le 0$

$\Rightarrow 1-\dfrac{x^2}{2}\le 1-2sin^2\dfrac{x}{2}\le 1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}cosx=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)=1$

点评：其中，1）也可用有界变量× 无穷小 = 无穷小;2）是两个重要的极限之一，可以当作公式记住进行计算，$x\to 0$,后边将在重点全面学习.方法提炼**⑦两个重要的极限**（简单介绍，后边根据学时适当讲）.

【小结与拓展】

重点学习$\frac{\infty}{\infty}$型求极限，用分子分母同除以最高次幂的方法，是把最无穷大量转化成无穷小量，然后用四则运算进行计算；也可以用**⑧换元法**：

5. 换元法解 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+5}{3n^2-2n-1}$

解：令$n=\frac{1}{u}$,则$n\to+\infty\Leftrightarrow u\longrightarrow 0$,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+5}{3n^2-2n-1}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{2\frac{1}{u}+5}{3\left(\frac{1}{u}\right)^2-2\frac{1}{u}-1}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{2u+5u^2}{3-2u-u^2}=\dfrac{0}{3}=0$

(后边函数的极限学如何解这种类型).

另外，还有⑨洛必达法则⑩等量代换⑪复合法则等方法（简单介绍，**指导**学有余力的学生**自学**）

6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1$

解：$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

方法一、换元法

令$u=\frac{1}{n}$,则$n=\frac{1}{u}$, $n\to+\infty\Leftrightarrow u\longrightarrow 0^+$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{u\to 0^+}a^u=1$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$

解：先恒等变形法

$\sqrt[n]{n}=n^{\frac{1}{n}}=(e^{lnn})^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}lnn}$

方法一、极限的复合法则

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}lnn}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{lnn}{n}}$

*由**洛必达法则**知,*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

$$原式=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\ln n}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}}=e^0=1$$

类型三、"1^{∞}"型，欧拉数列的极限（选讲、自学）

【难点突破】技巧熟悉指数运算法则就非常简单

$a^m\cdot a^n=$ ________________; $(a^m)^n=$ ______________

例3. 下列等式成立的是(　　)

$A.\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=e$；　$B.\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}=e$；　$C.\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{2n})^{n}=e$；　$D.\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+2}=e$

解：以A为例

第一步：运用指数运算法则，向公式靠拢

$$原式=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\times2}=\lim_{n\to+\infty}[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}]^2$$

幂的乘方，底数不变底数相乘

第二步：运用极限的四则运算法则，求解，得

$$=\lim_{n\to+\infty}[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}]^2=[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}]^2=e^2$$

同理，B中

第一步：运用指数运算法则，向公式靠拢

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}\times2}=\lim_{n\to+\infty}[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}]^2$$

注意$\frac{2}{n}=\frac{1}{\frac{n}{2}}$,把$\frac{n}{2}$ *看成整体，*

第二步：运用极限的四则运算法则，求解，得

$$=\lim_{n\to+\infty}[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}]^2=[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{n}]^2=e^2$$

同理，C中

第一步：运用指数运算法则，向公式靠拢

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{2n})^{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n\times\frac{1}{2}}=\lim_{n\to+\infty}[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}]^{\frac{1}{2}}$$

第二步：运用极限的四则运算法则，求解，得

$$=\lim_{n\to+\infty}[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}]^{\frac{1}{2}}=[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$$

同理，D中

第一步：运用指数运算法则，向公式靠拢

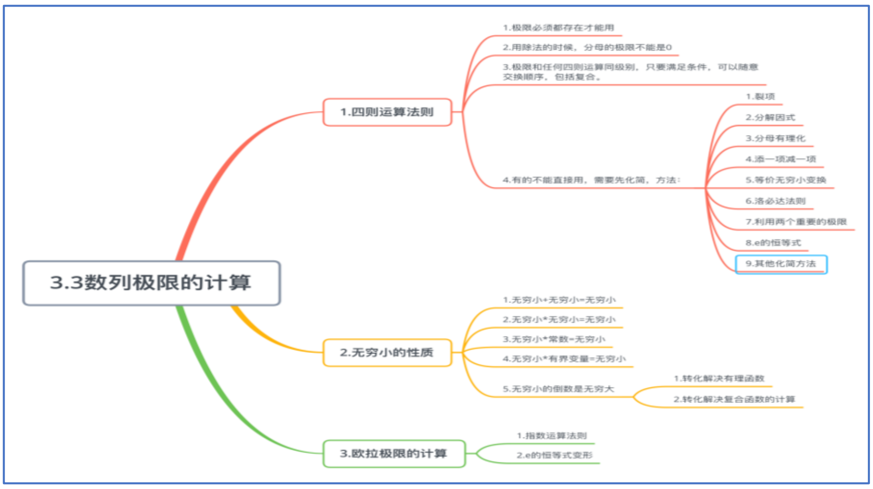
$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+2}=\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

同底数幂相乘，底数不变指数相加

第二步：运用极限的四则运算法则，求解，得

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}=e\times1=e$$

【小结】



【作业】

【强化练习 1】

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n+2}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{n}$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n}$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{2n}$
7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n}$
8. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{2n}$
9. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{nt}$

答案：$e^3; e; e^{\frac{1}{3}}; e^2; e^5; e^6; e^x; e^{2r}; e^{rt}$.

【强化练习2】

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^2-x)^3}{x^4(5x^2+1)}$

解析：$\frac{8}{5}$

2 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})(2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x})$

解析：2

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$

解析：$\frac{1}{5}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2}{\sqrt{1-x^2+x^4}}=$

解析：3

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

解析：0

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x-a\right)=2$, 求$a$.

解析：-3

【历年真题】

考点 1：两个重要的极限

1. (2024 数Ⅰ T6)极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+sin\frac{x}{2})^{\frac{1}{x}}=$ ________.

解析：$e^{\frac{1}{2}}$

2. (2024 数Ⅱ T6)极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{x}{2})^{\frac{4}{sinx}}=$ ________.

解析：e^2

3. (2024 数Ⅲ T12)极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{a}{x}}=e$, 则实数$a=$ ________.

解析：$\frac{1}{3}$

4. (2023 数Ⅰ T4)极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{5}{x}}=$ ________.

解析：e^5

5. (2023 数Ⅲ T12)极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{3x}\right)^3=$ ________.

解析：$e^{-\frac{4}{3}}$

6. (2022 数Ⅰ T6)极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{kx}=e^2$, 则$k=$ ________.

解析：6

7. (2022 数Ⅱ T12)求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{-3x}$

解析：e^{-6}

8. (2022 数Ⅲ T16)极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{2x}$

答案：$e^{\frac{1}{2}}$; e^2; $\frac{1}{3}$; e^5; $e^{-\frac{4}{3}}$; 6; e^{-6}; $e^{\frac{1}{2}}$

考点2.$\infty-\infty$型，$\frac{\infty}{\infty}$型, $x\to\infty$时

1. (2023 数Ⅰ T11)求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$

解析：$\frac{3}{2}$

2. (2023 数Ⅲ T16)求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)$

解析：$\frac{1}{4}$

3. (2022 数Ⅲ T13)极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+lnx}{2x+1}\right)=$ _______.

解析：$\frac{1}{2}$