SEMINARIO TALLER SOBRE ASÍNTOTAS DE FUNCIONES

Ejercicio de un tema del Cálculo Diferencial aplicando las cinco etapas del modelo didáctico operativo:

Documentación ↔ Conceptualización ↔ Experiencias vivenciales ↔ Proyectos pedagógicos ↔ Ampliación ↔

FACILITADOR: Instituto GeoGebra de Medellín.

CONCEPTOS

DEFINICIÓN DE LÍMITE

Sea *f(x)* definida en un intervalo abierto alrededor de x_o, excepto posiblemente en x_o. Decimos que **el límite de *f(x)* cuando *x* se aproxima a x_o es el número *L*** y escribimos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

LÍMITES LATERALES

Una función *f(x)* tiene un límite cuando *x* tiende a *c* si y sólo si ahí tiene límites por la derecha y por la izquierda, y además se estos límites laterales son iguales

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Institución Universitaria

CONCEPTOS

DEFINICIÓN ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Una recta *y* = *b* es una **asíntota horizontal** de la gráfica de una función *y* = *f(x)* si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad o \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

DEFINICIÓN ASÍNTOTAS VERTICALES

Una recta *x* = *a* es una **asíntota vertical** de la gráfica de una función *y* = *f(x)* si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad o \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

CONDICIÓN PARA LA EXISTENCIA DE UNA ASÍNTOTA OBLICUA

Si el grado del numerador de una función racional difiere del grado del denominador en 1, la gráfica tiene una **asíntota oblicua** o **inclinada**. Al dividir el numerador entre el denominador determinamos una ecuación para expresar *f* como una función lineal, más un residuo que tiende a cero cuando $x \to \pm\infty$

CONCEPTOS

PRUEBA DE CONTINUIDAD

Una función *f(x)* es continua en un punto interior $x = c$ de su dominio sí y sólo si cumple las siguientes tres condiciones:

1. *f(c)* existe (*c* pertenece al dominio de *f*).

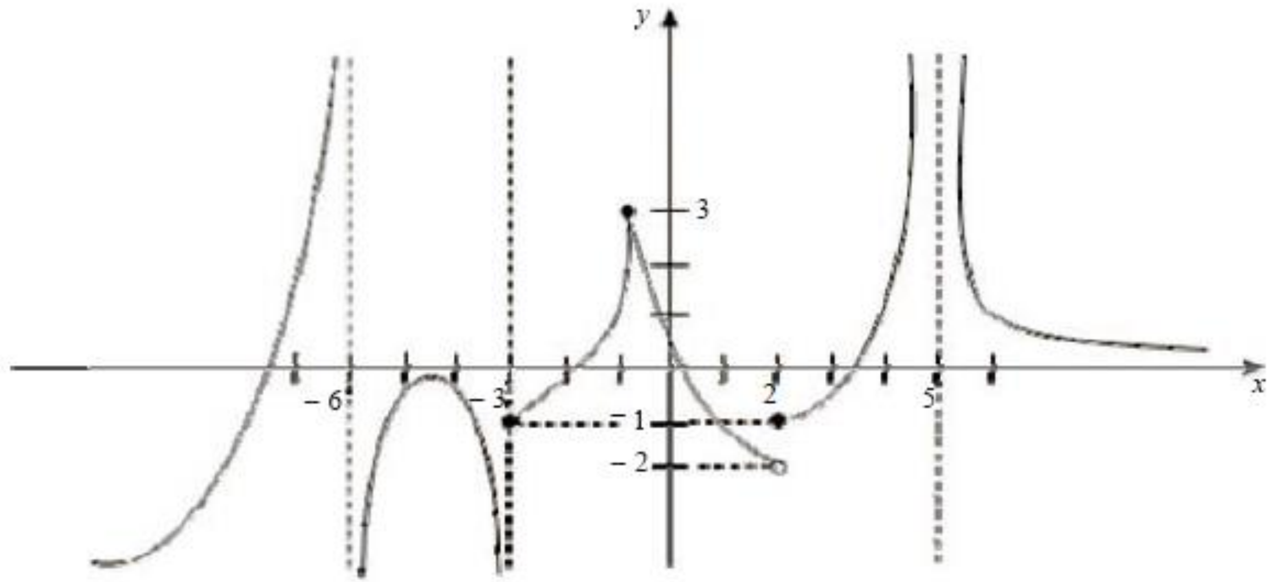
2. Existe el $\lim_{x \to c} f(x)$ (*f* tiene límite cuando $x \to c$).

3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (el límite es igual al valor de la función).

Institución Universitaria

EJERCICIO:

49. Si $f(x)$ está representado por la siguiente gráfica:



Determine

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b. $\lim\limits_{x\to-6^-} f(x)$

c. $\lim\limits_{x\to-6^+} f(x)$

e. $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)$

f. $\lim\limits_{x\to5^-} f(x)$

g. $\lim\limits_{x\to5^+} f(x)$

d. $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)$

i. ¿Existe el $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$? Justifique su respuesta.

j. ¿Existe el $\lim\limits_{x\to2} f(x)$? Justifique su respuesta.

h. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

ILUSTRACIÓN 0

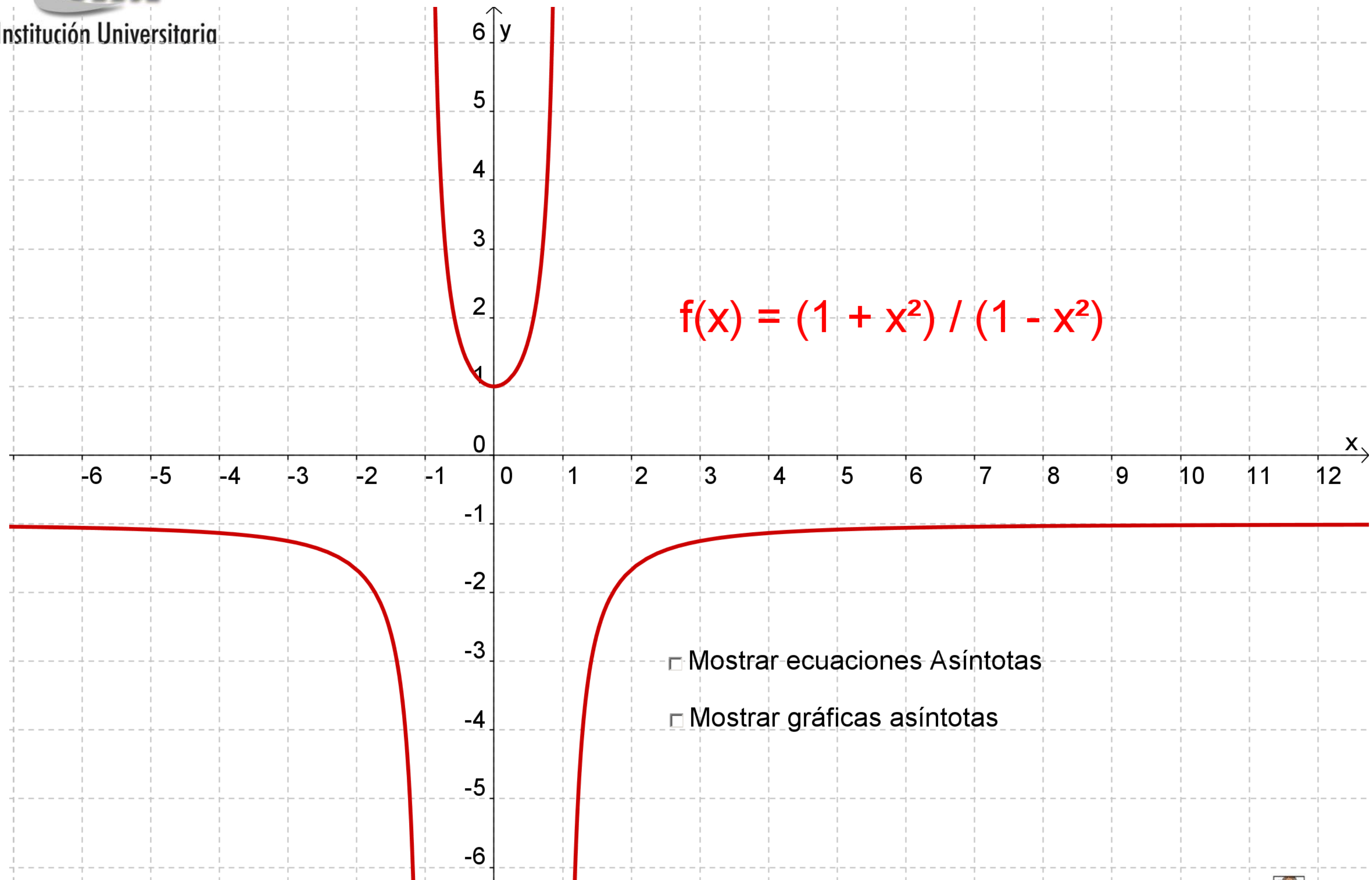
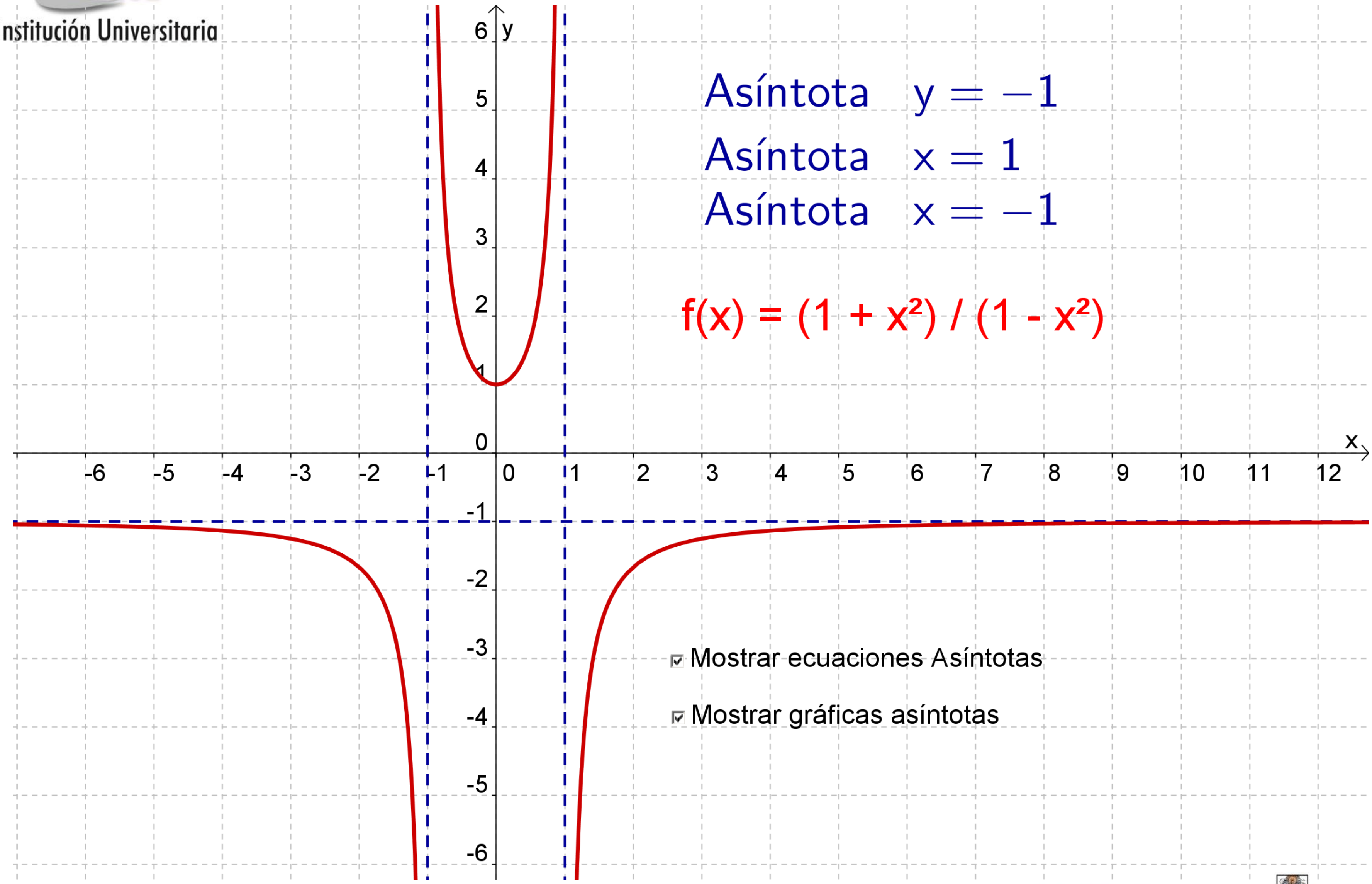
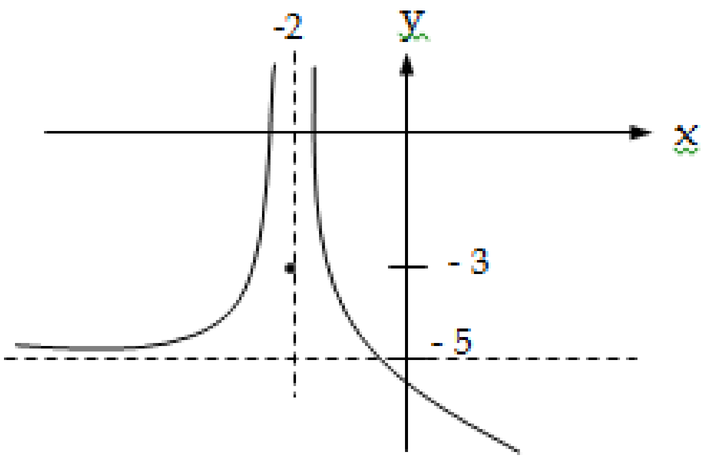


ILUSTRACIÓN 0



EVALUACIÓN DE LÍMITES

3. (Valor 20 puntos. **Tipo ECAES**). Sea $f(x)$ representada por la siguiente gráfica:



De acuerdo con la gráfica responda las preguntas de los numerales del 3.1 al 3.4

3.1. El dominio de la función es:

a. $R - \{-2\}$

b. $R - (-2.5, -1.5)$

c. R

d. $(-5, \infty)$

EVALUACIÓN DE LÍMITES

3.2 Del $\lim_{x\to -2} f(x)$ se puede decir que :

a. No existe porque $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \infty$ ó $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \infty$
b. Existe porque $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = -3$
c. Existe porque $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = \infty$
d. No existe porque $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = -3$

3.3 Para demostrar que la recta $x = -2$ es una asintota vertical se procede así:

a. Se analizan los límites al infinito de la función $f(x)$ y se verifica que su valor sea igual a -2
b. Se analiza la existencia del límite en $x = -2$ y se verifica que su valor sea igual a $f(-2)$
c. Se analizan los límites laterales de la función $f(x)$ en $x = -2$ y se verifica que el valor de alguno de ellos sea ∞ ó $-\infty$
d. Se verifica que los límites laterales de la función $f(x)$ en $x = -2$ sean iguales y su valor sea ∞

3.4 Señale la afirmación correcta

a. La función $f(x)$ en $x = 0$ no está definida porque $f(0) = -\infty$
b. La función $f(x)$ es discontinua en $x = -2$ porque el límite en ese punto no existe
c. La recta $y = -5$ no es una asíntota horizontal porque la gráfica de la función $f(x)$ corta dicha recta.
d. El $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ porque la recta $y = -5$ es una asíntota horizontal

ILUSTRACIÓN 1

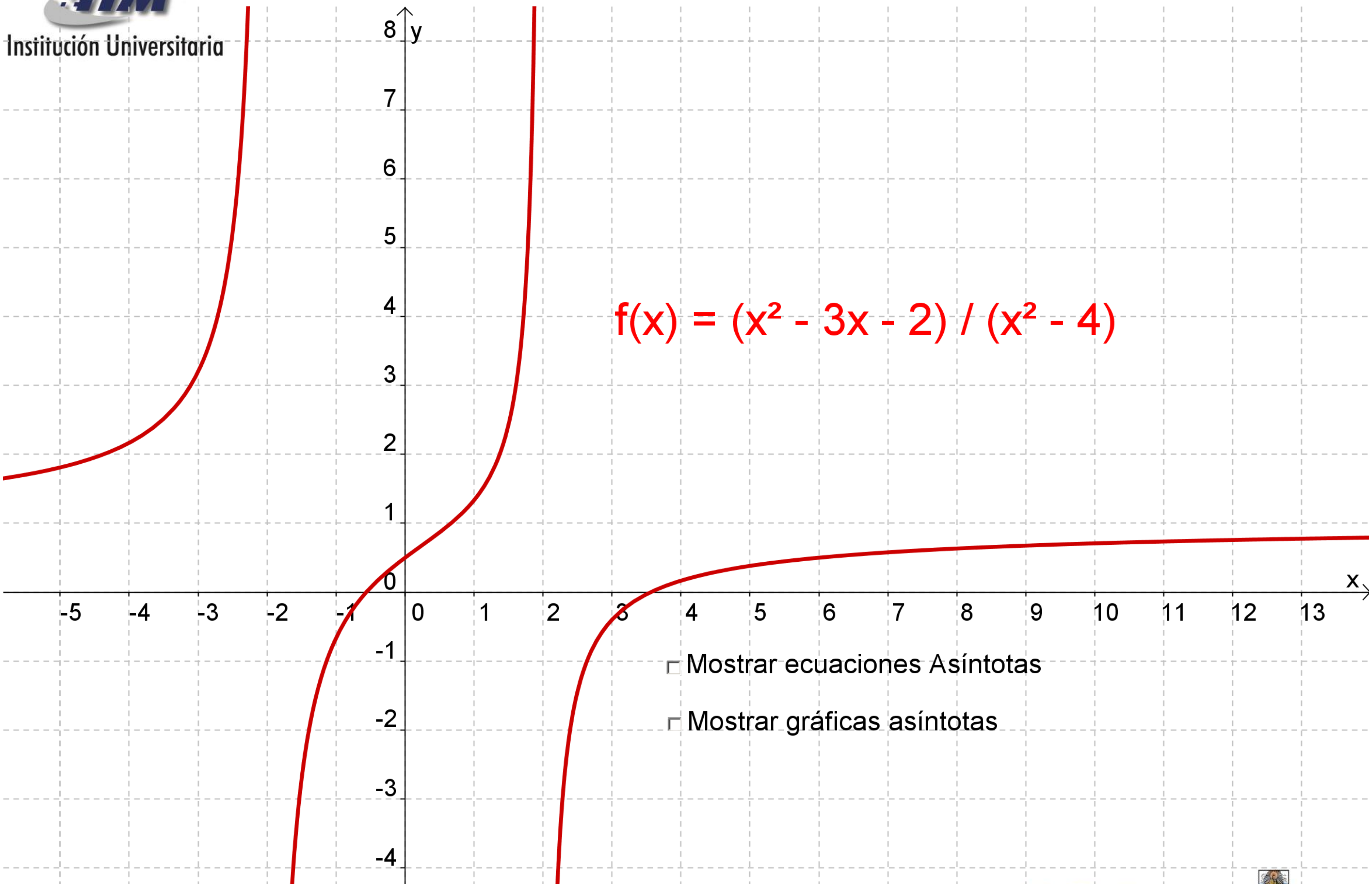


ILUSTRACIÓN 1

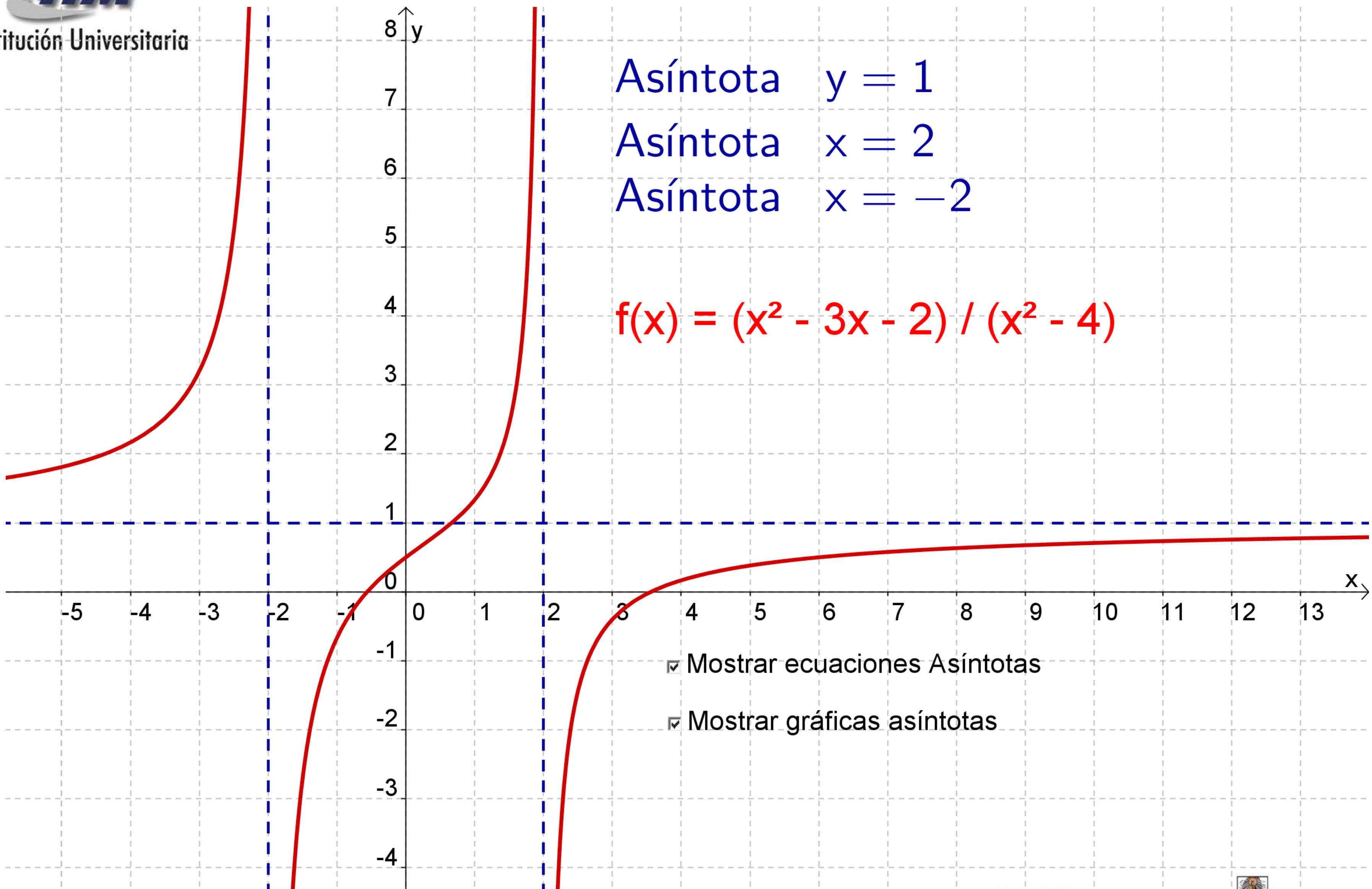


ILUSTRACIÓN 2

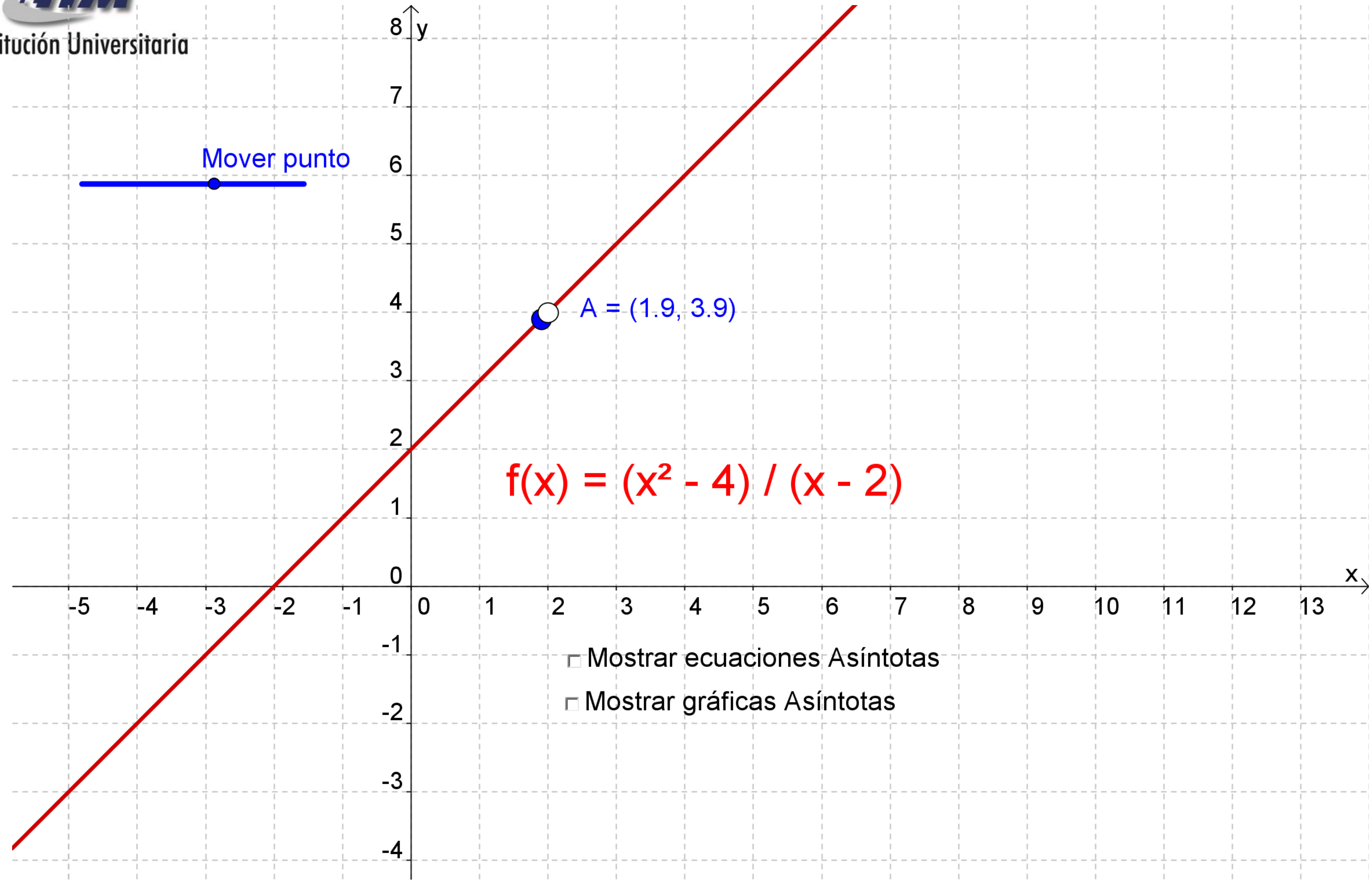
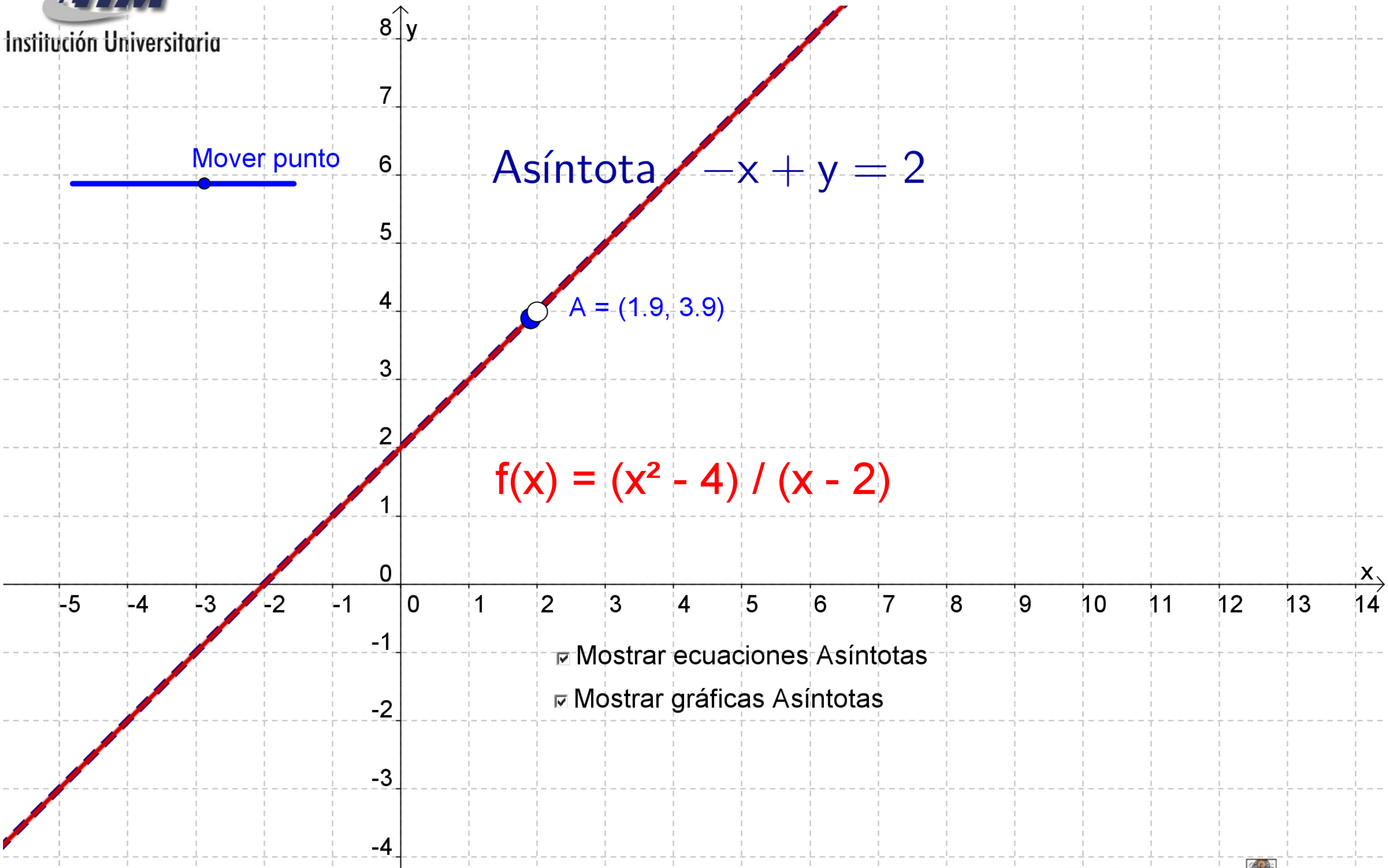


ILUSTRACIÓN 2



CONCEPTOS

ASÍNTOTAS OBLICUAS

La recta *y = mx + n , m ≠ 0* , es una **asíntota oblicua de** *f(x)* si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx - n) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx - n) = 0$$

en cuyo caso $m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx)$

OBSERVACIONES

1. Una función puede tener como máximo dos asíntotas oblicuas.
2. Si una función tiene asíntota oblicua no tiene asíntota horizontal y recíprocamente.
3. Si en una función racional el grado del numerador es dos o más unidades mayor que el denominador, no hay asíntota oblicua.
4. La gráfica de la función puede cortar a las asíntotas oblicuas en uno o varios puntos.

ILUSTRACIÓN 3

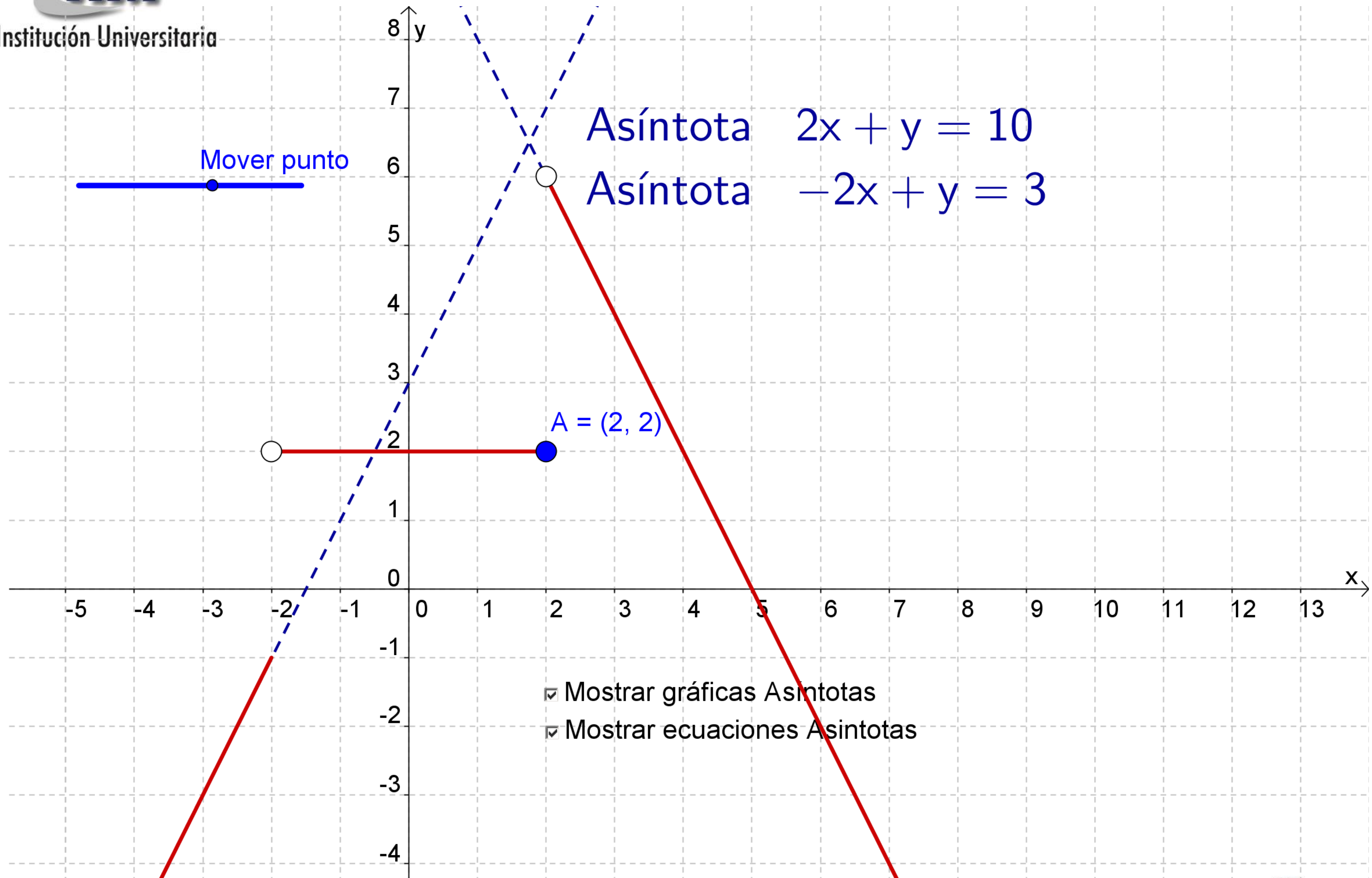


ILUSTRACIÓN 4

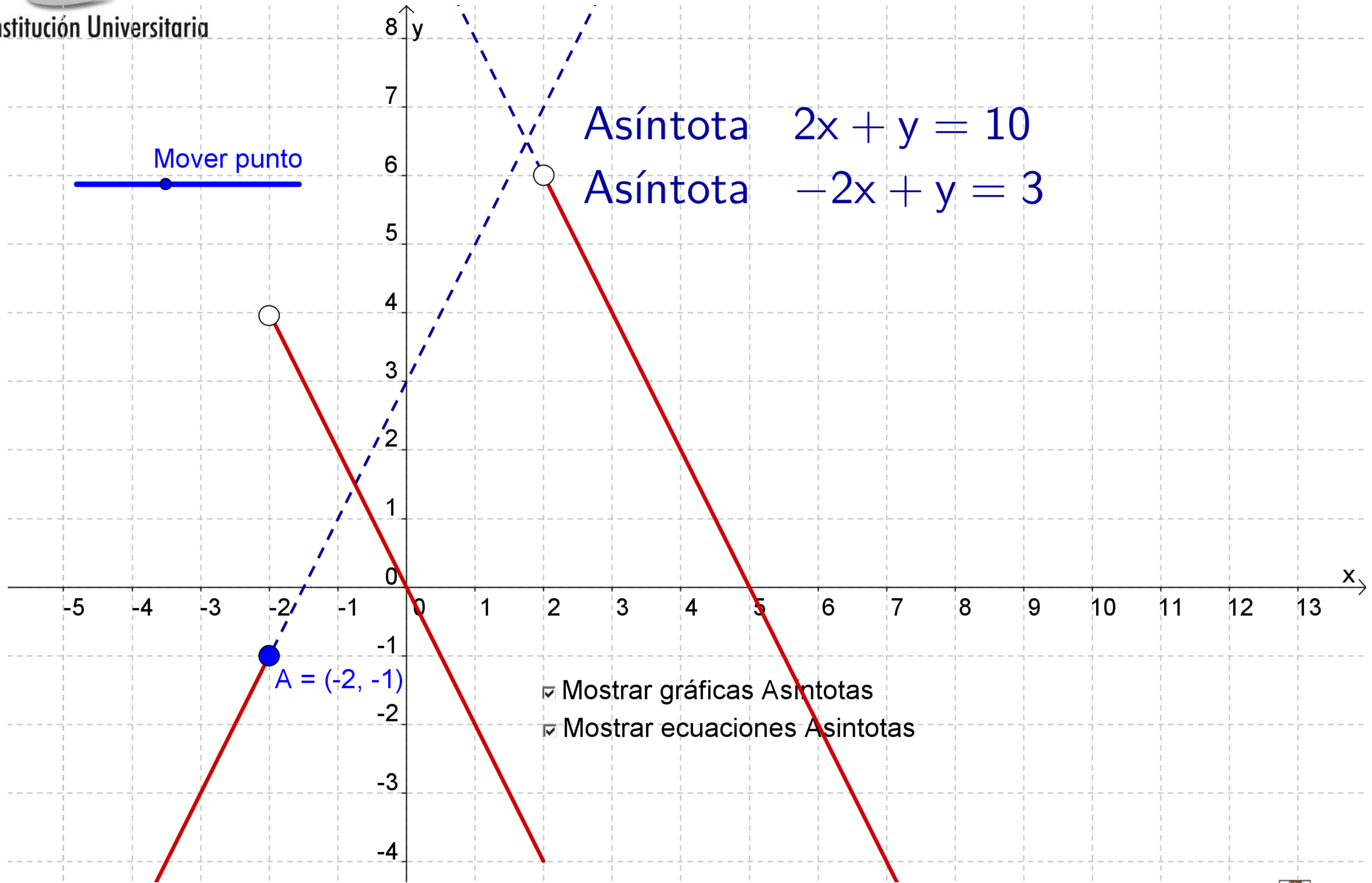
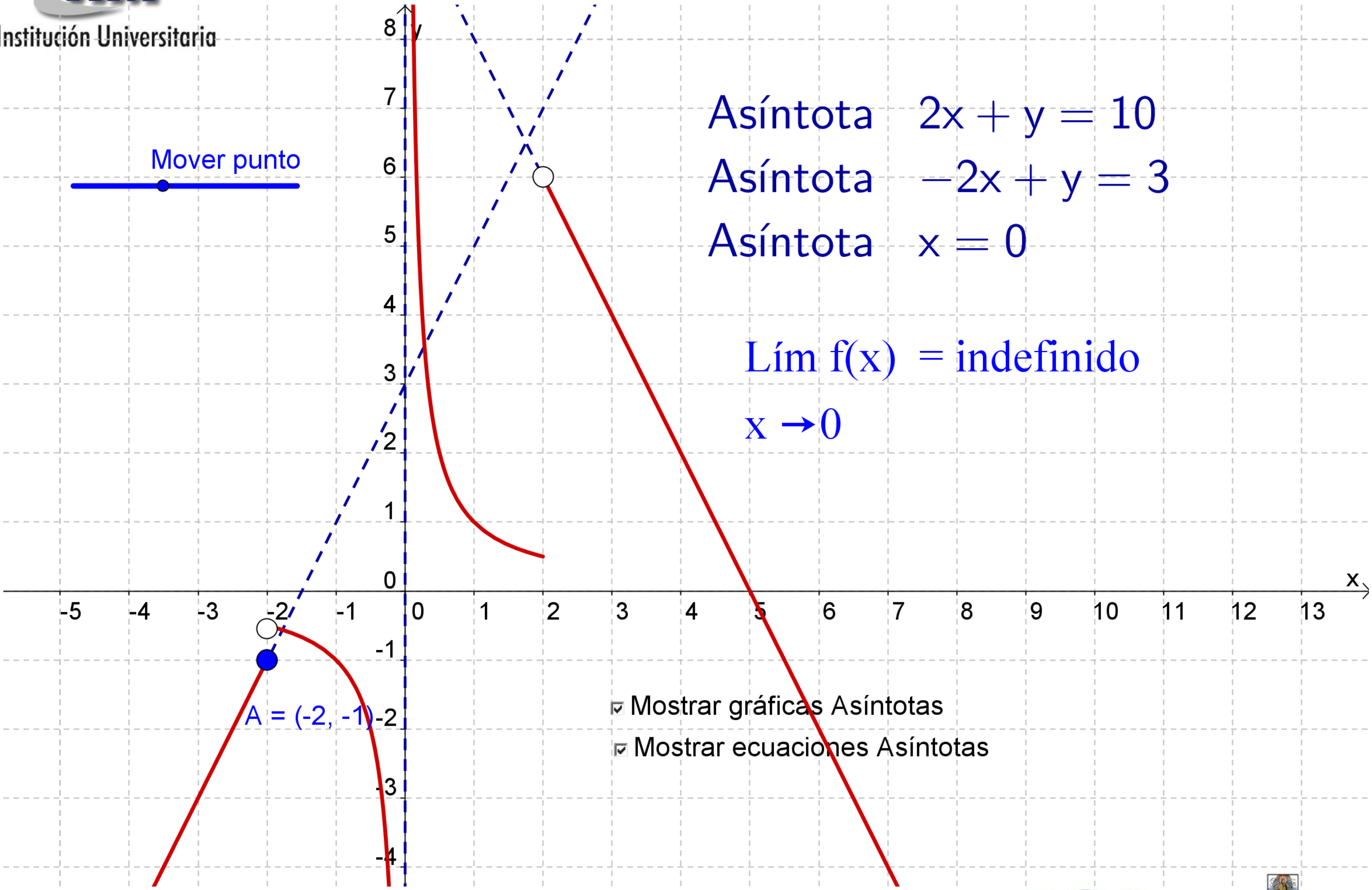


ILUSTRACIÓN 5

Institución Universitaria



Institución Universitaria

ILUSTRACIÓN 6

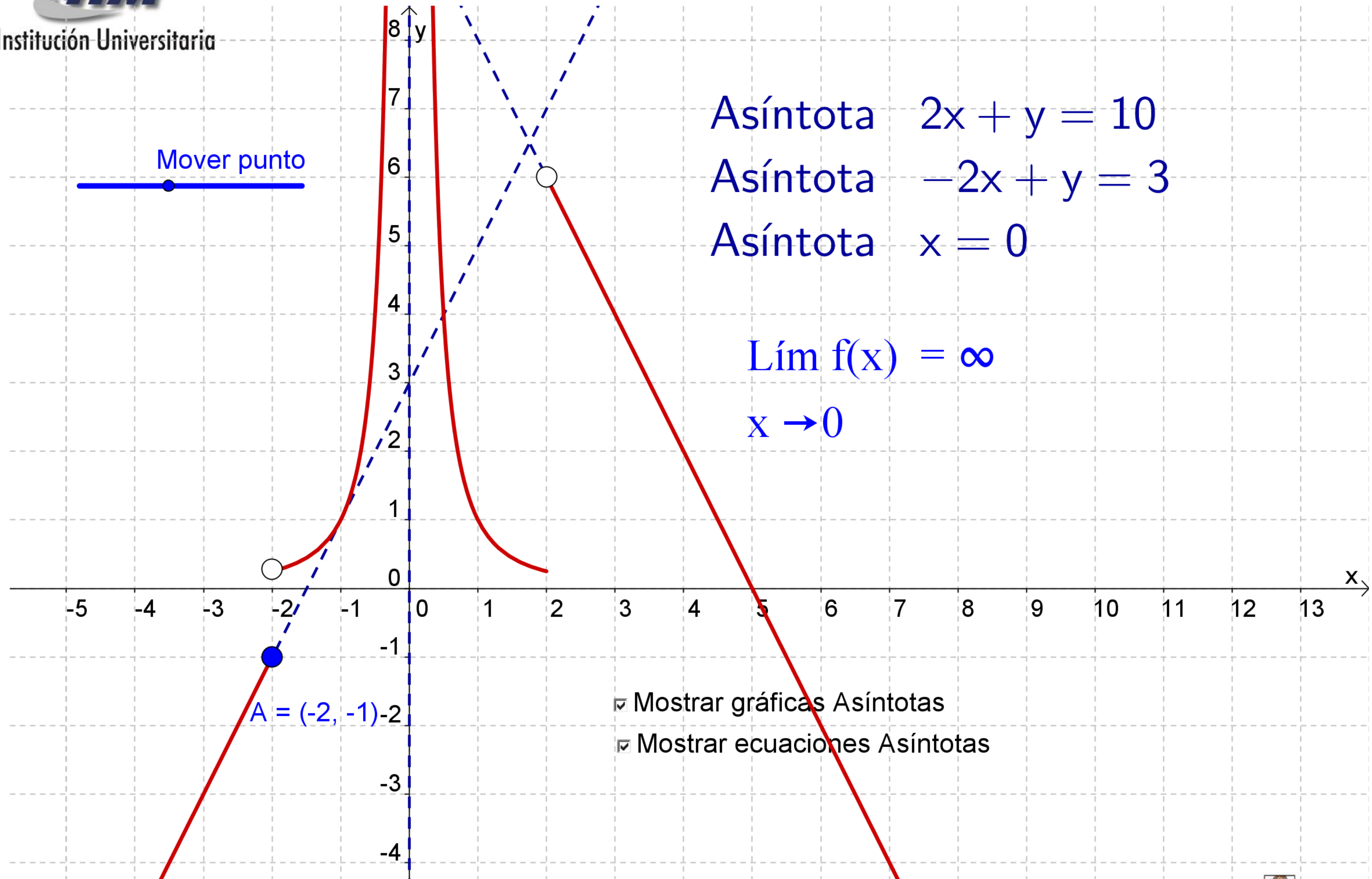


ILUSTRACIÓN 7

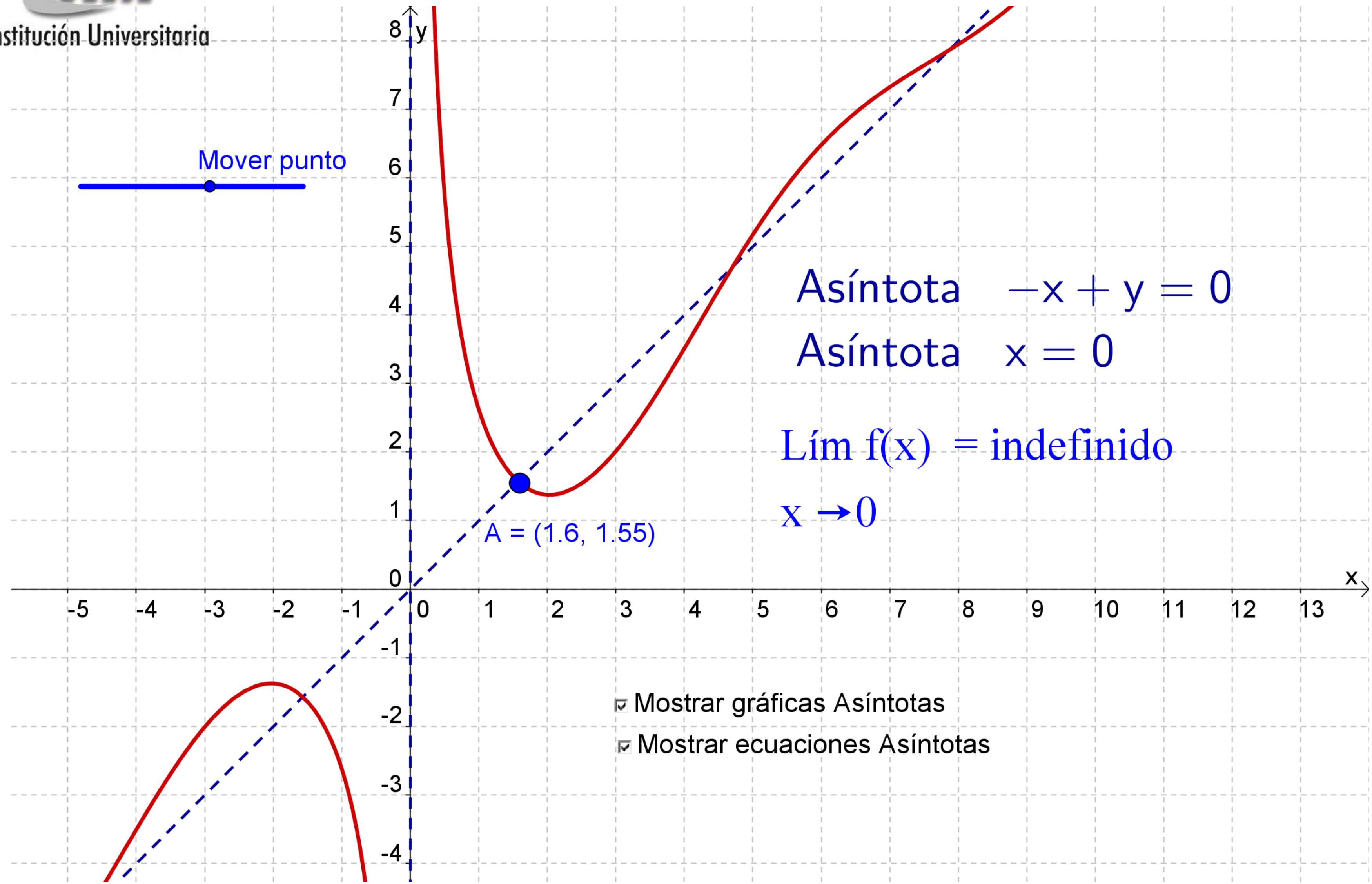


ILUSTRACIÓN 8

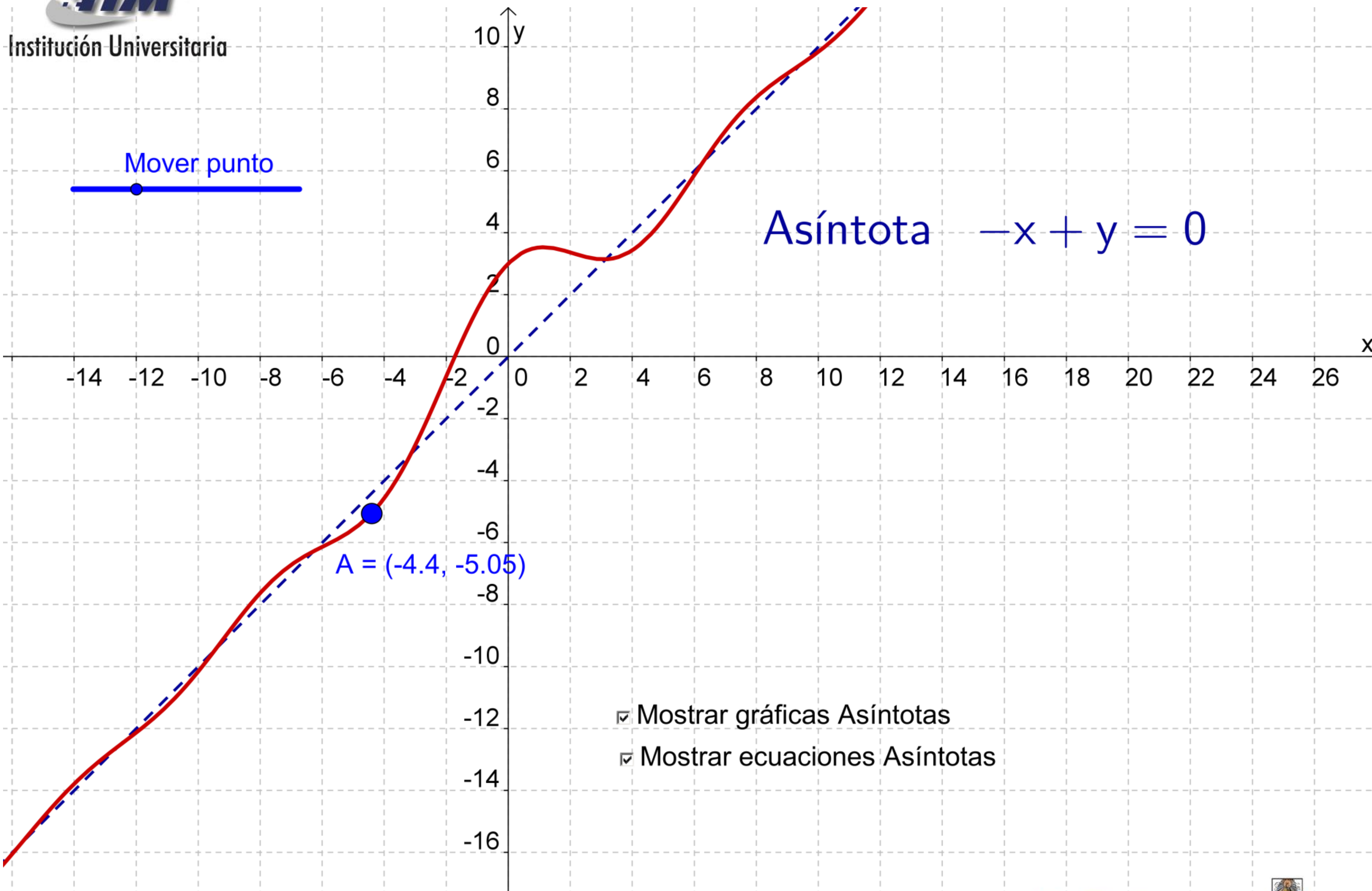
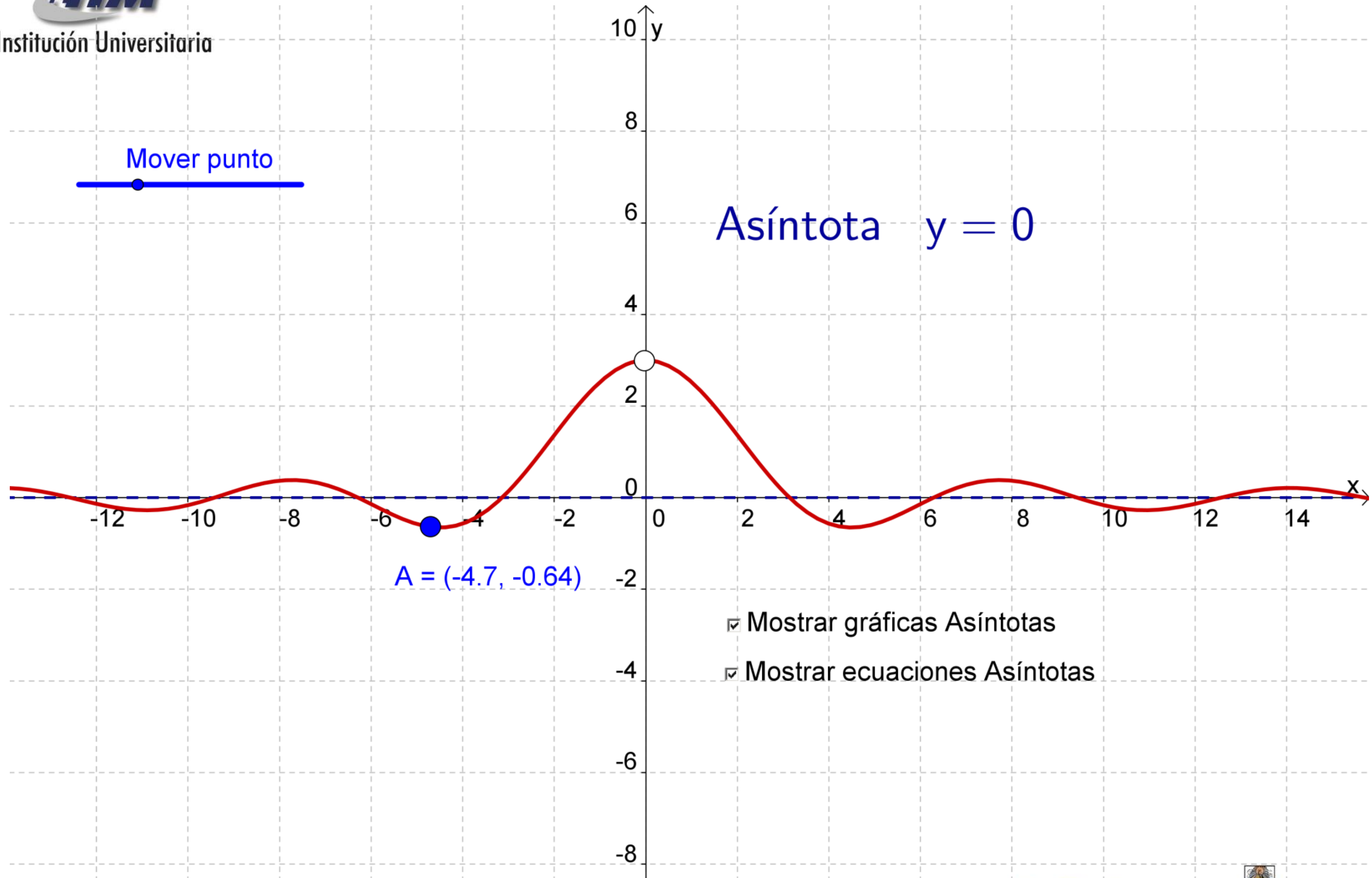


ILUSTRACIÓN 9



MUCHAS GRACIAS