Théorème de Jacobi

Jacques MAROT

28 mars 2019

Table des matières

1 Distinction entre angles de vecteurs et angles de droites **1**
1.1 Rotation et angle de 2 vecteurs 1
1.2 Angles de deux droites 4
1.3 Conditions pour que 4 points soient cocycliques. 6

2 Axe radical de de deux cercles dans un même plan **8**
2.1 Puissance d'un point par rapport à un cercle 8
2.2 Définition de l'axe radical 8

3 Théorème de Monge **9**

4 Théorème de Jacobi **9**

1 Distinction entre angles de vecteurs et angles de droites

1.1 Rotation et angle de 2 vecteurs

Afin d'être sans ambigüité sur le théorème de l'angle inscrit redémontré page 6, et utilisé dans la démonstration du théorème de Jacobi, la définition d'un angle de droites qui n'est plus abordée avant le niveau Bac doit être précisée. Revenons pour cela sur certains points concernant la notion plus familière d'angle de vecteurs. Dans un plan affine $\mathscr{E}_2$ dirigé par l'espace vectoriel E_2, tout couple $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right)$ de vecteurs non nuls définit une unique rotation de l'espace vectoriel E_2, telle que l'image du vecteur unitaire $\dfrac{1}{\mathrm{AB}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ soit le vecteur unitaire $\dfrac{1}{\mathrm{CD}}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$. On entend par rotation un endomorphisme r de E_2 de **déterminant positif** qui conserve la norme, autrement dit tel que tel que pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathrm{E}_2$, on ait $\left\|r\left(\overrightarrow{u}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{u}\right\|$. Si un endomorphisme conserve les normes, l'image d'une base orthormée $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ doit aussi être une base orthonormée $(\vec{u},\vec{v})$, si $\vec{u} = a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}$ alors nécessairement $a^2+b^2 = 1$ et $\vec{v} = -b\vec{\imath}+a\vec{\jmath}$ ou $\vec{v} = b\vec{\imath}-a\vec{\jmath}$. Mais cette dernière possibilité ne peut pas être envisagée, car l'endomorphisme φ de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ ne peut pas être celui d'une rotation, car alors φ admettrait un vecteur invariant, on peut en effet vérifier que $\varphi\left(b\vec{\imath}+(1-a)\vec{\jmath}\right) = b\vec{\imath}+(1-a)\vec{\jmath}$. Dans une base orthonormée quelconque $\left(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath}\right)$, une rotation r admet donc une matrice

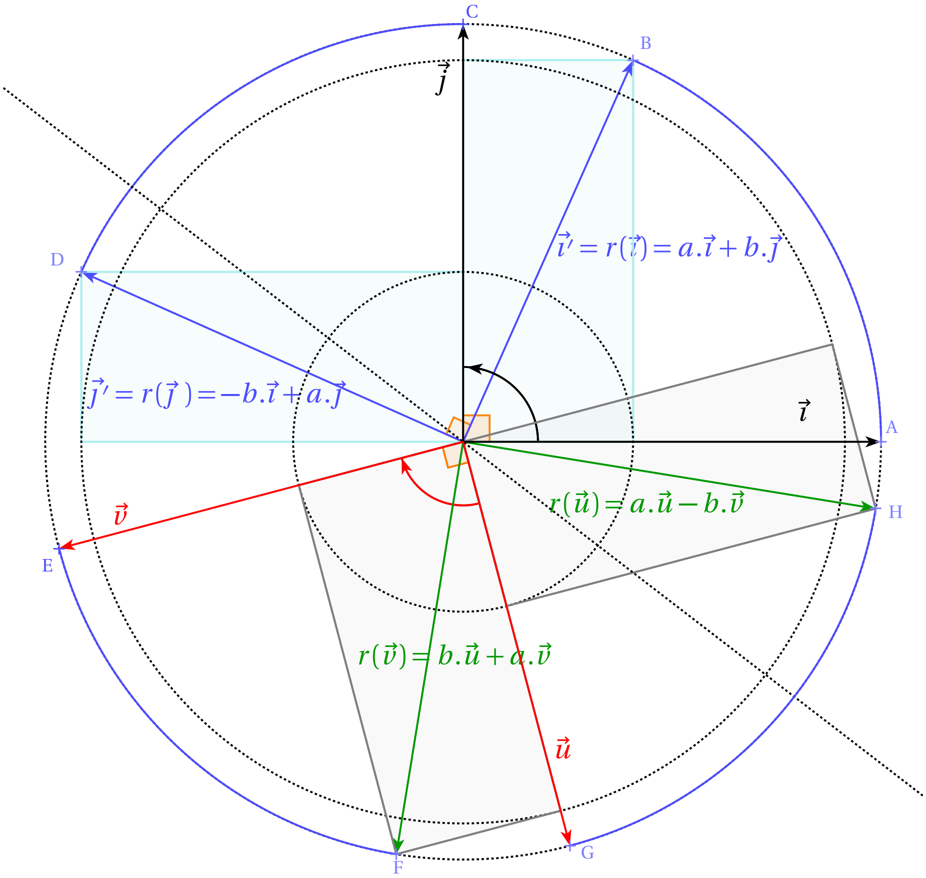


FIGURE 1 – On convient que les bases $\left(\overrightarrow{\imath'}, \overrightarrow{\jmath'}\right)$et $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ sont directes, et que la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est indirecte

nécessairement de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, dont le déterminant est bien positif, puisqu'égal à $a^2 + b^2 = \left\| r\left(\overrightarrow{\imath}\right) \right\| = \left\| r\left(\overrightarrow{\jmath}\right) \right\| = 1$.

Dans toute autre base orthonormée, on montre ce qui se voit sur la figure 1, que la matrice de cette même rotation r est l'une des deux suivantes : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Sur la figure 1, on a Illustré à l'aide de trois cercles de rayons a, b et 1 dans l'ordre croissant, une rotation r qui transforme la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ en la base $\left(\overrightarrow{\imath'}, \overrightarrow{\jmath'}\right)$, elle admet la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ mais elle admet la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Si nous avions utilisé la base base orthonormée $(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v})$, nous aurions la même matrice que dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Pour lever cette ambigüité et n'avoir qu'un seul type de matrice, il est nécessaire d'effectuer une partition dans l'ensemble des bases orthonormées de E_2 en deux parties, telle que toute rotation admette une même matrice dans les bases d'une même classe. On dit que l'on oriente le plan, en choisissant conventionnellement l'une de ces deux classes, dont les éléments seront les bases orthonormées qualifiées de directes, toutes les autres bases orthonormées seront dites indirectes.

Géométriquement sur le papier, cela revient à choisir un sens de rotation privilégié appelé sens trigonométrique ou sens positif, en observant que deux bases qui appartiennent à la même classe «tournent dans le même sens», quand on va du premier vecteur vers le deuxième. C'est ainsi que l'on se permet de dire que les bases $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, $\left(\overrightarrow{\imath'}, \overrightarrow{\jmath'}\right)$ et $(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v})$ sont de même orientation car elles «tournent dans le même sens» antihoraire, que l'on a convenu d'être les sens positif. Lorsque qu'une orientation a été fixée, on convient de mesurer une rotation telle que celle qui transforme $\overrightarrow{\imath}$ en $\overrightarrow{\imath}'$ sur la figure 1, par le nombre positif θ égal à la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ de rayon 1 et centre O, qui va de A vers B en tournant dans le sens positif. Mais on peut aussi caractériser cette rotation par le nombre négatif $\theta - 2\pi$, c'est l'opposé de la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{\mathrm{BA}}$ qui va de B vers A en tournant dans le sens positif (c'est le même arc que celui qui va de A vers B dans le sens négatif). Une fois fixé un sens de rotation positif, un seul des deux nombres $\theta > 0$ ou bien $(\theta - 2\pi) < 0$ suffit à caractériser la rotation.

Pour l'étude des fonctions $\cos : \mathbb{R} \to [-1\,;\,1]$ et $\sin : \mathbb{R} \to [-1\,;\,1]$ et de leurs propriétés, on renvoie à n'importe quel cours sur les fonctions trigonométriques de première en lycée. On les définit comme fonctions périodiques de période 2π, elles associent à toute mesure $\theta \in [0\,;\,2\pi[$ d'une rotation, les deux coefficients caractéristiques de la matrice de cette rotation dans une base orthonormée directe quelconque. Étant donné que nous avons des fonctions de périodes 2π, cette définition pour $\theta \in [0\,;\,2\pi[$ suffit à déterminer l'image de tous les nombres réels. Pour la rotation r de la figure 1, un tel nombre θ représente alors la distance parcourue par un point mobile, qui de déplacerait sur le cercle de rayon 1 pour aller de A en B en tournant dans le sens positif. c'est aussi la longueur des arcs $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$ et $\overset{\frown}{\mathrm{GH}}$ parcourus positivement, on pose alors les définitions suivantes :

— $\cos\theta = a$,
  c'est l'abscisse de B dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$
  ou l'abscisse de H dans la base $(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v})$.
— $\sin\theta = b$,
  c'est l'ordonnée de B dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$,
  ou l'ordonnée de H dans la base $(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v})$.

On considère que les mesures $\theta + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ caractérisent la même rotation, les valeurs absolues de ces mesures représentent la distance parcourue sur le cercle de rayon 1, par le point mobile évoqué plus haut, qui après être passé une première fois en B accomplirait $|k|$ tours supplémentaires dans un sens de rotation indiqué par le signe de k.

L'intérêt de caractériser ainsi une rotation par toute une classe d'équivalence de nombres réels de la forme $\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$; est que si θ et θ' sont des mesures quelconques des rotations r et r', il n'est pas nécessaire que $\theta \pm \theta'$ soit dans l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$ pour caractériser la rotation $r \circ r$, et de plus $-\theta$ est un moyen commode de caractériser la rotation r^{-1} inverse de r. On dit que l'on a définit un isomorphisme entre le groupe commutatif des rotations de E_2, et le groupe additif des classes d'équivalence modulo 2π dans l'ensemble des nombre réels noté $\left(\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{R}}; +\right)$.

On appelle angle des deux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ non nuls, l'unique rotation qui transforme $\dfrac{1}{\mathrm{AB}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ en le vecteur $\dfrac{1}{\mathrm{CD}}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, on le note avec des crochets : $\left[\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}\right]$, notation qu'il ne faut pas confondre avec l'écriture d'un couple tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}\right)$, qui utilise des parenthèses. L'égalité entre couples $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \left(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}\right)$ signifie que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v'}$, alors que l'égalité entre angles de vecteurs $\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]=\left[\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'}\right]$ signifie qu'il existe une rotation r nécessairement unique, telle que $\frac{1}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|}.r\left(\overrightarrow{u}\right)=\frac{1}{\left\|\overrightarrow{v}\right\|}.\overrightarrow{v}$ et $\frac{1}{\left\|\overrightarrow{u'}\right\|}.r\left(\overrightarrow{u'}\right)=\frac{1}{\left\|\overrightarrow{v'}\right\|}.\overrightarrow{v'}$.

Quand des rotations seront écrites sous forme d'un angle de vecteurs, on utilisera les conventions d'écritures additives en usage habituellement dans tout groupe commutatif, ce qui revient à remplacer le symbole de composition des applications $\circ$, par le symbole d'addition :

— si $r=\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]$ et $r'=\left[\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'}\right]$ alors
$\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]+\left[\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'}\right]=\left[\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'}\right]+\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]=r\circ r'=r'\circ r$,

— Quelques soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ dans E_2 :
  * $\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]+\left[\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right]=\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\right]$, (relation de Chasles),
  * $\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]=-\left[\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}\right]$
  * $\left[\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}\right]=\left[\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\right]=0$.

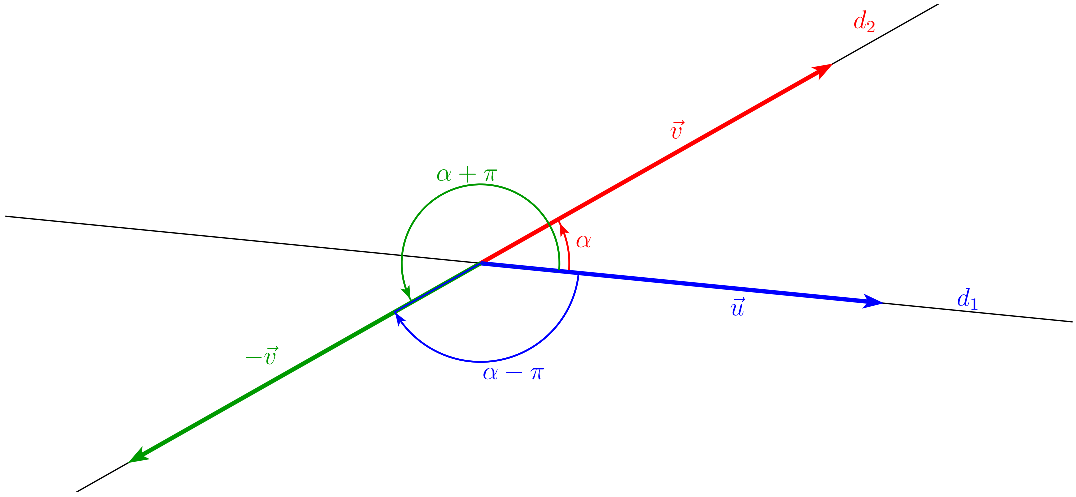
On notera $\widehat{\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]}$, la classe d'équivalence de tous les nombres réels θ tels que $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ soit la matrice de la rotation $\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]$, Alors que $\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]+\left[\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'}\right]$ est une composition d'applications, l'écriture $\widehat{\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]}+\widehat{\left[\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'}\right]}$ doit être comprise comme une addition dans le groupe $\left(\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{R}};+\right)$ entre classes d'équivalence de nombre réels. Il n'y a aucun inconvénient à confondre ces deux additions, puisque les deux groupes dans lesquels elles s'expriment sont isomorphes. Mais il faudra toujours avoir présent à l'esprit, que les calculs sur les mesures d'angles de vecteurs sont toujours définis modulo 2π : expression qui signifie que dans tout opération dans $\left(\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{R}};+\right)$, additionner ou soustraire un multiple entier de 2π à toute mesure d'un angle, permet d'obtenir une autre mesure caractéristique du même angle de vecteurs.

1.2 Angles de deux droites

Dans un plan affine $\mathscr{E}_2$ dirigé par l'espace vectoriel E_2, étant donné deux droites d_1 et d_2 il existe deux rotations vectorielles de E_2 telles que l'image par cette rotation, d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de d_1, soit l'un des deux uniques vecteurs de même norme que $\overrightarrow{u}$ qui dirigent d_2, nommons $\overrightarrow{v}$ et $-\overrightarrow{v}$ ces vecteurs. Soit h la rotation de mesure π qui est aussi l'homothétie de rapport -1 telle que pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ on ait $h:\begin{array}{ccc}\mathrm{E}_2 & \longrightarrow & \mathrm{E}_2\\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & -\overrightarrow{u}\end{array}$, les deux seules rotations qui transforment tout vecteur directeur de d_1 en un vecteur directeur de d_2, sont la rotation r telle que $r\left(\overrightarrow{u}\right)=\overrightarrow{v}$ et $r'=r\circ h$. On a bien $r'\left(\overrightarrow{u}\right)=-\overrightarrow{v}$ et l'égalité entre les deux paires $\{r',r'\circ h\}$ et $\{r,r\circ h\}$. Ce qui permet de définir un angle entre deux droites de la manière suivante :

Définition 1 *étant donné deux droites* $d_1=(\mathrm{AB})$, $d_2=(\mathrm{CD})$ *dans un plan affine* $\mathscr{E}_2$*, l'angle de droites désigné par* $[d_1,d_2]$ *ou bien* $[(\mathrm{AB}),(\mathrm{CD})]$ *est la paire de rotations de l'espace vectoriel qui dirige le plan affine, telles que l'image d'un vecteur directeur de* d_1 *par ces rotations, soit une vecteur directeur de* d_2*.*

Il s'agit évidemment d'une notion d'angle orienté à bien distinguer de la notion d'angle de vecteurs, la mesure de l'angle de vecteurs $\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]$ ou de la rotation r qui transforme $\overrightarrow{u}$ en



La mesure de l'angle de droite $[d_1,d_2]$ est définie modulo π.

$\overrightarrow{v}$ est définie modulo 2π, si α est une mesure de cet angle, alors $\alpha+\pi$ et $\alpha-\pi$ sont des mesures de l'angle $\left[\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v}\right]$ ou de la rotation $r\circ h$. Une mesure d'un angle de droite tel que $[d_1,d_2]=\{r,r\circ h\}$ est donc définie modulo π. Si $\overrightarrow{u}$ dirige la droite d_1 et $\overrightarrow{v}$ dirige la droite d_2, toutes les mesures des deux angles $\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]$ et $\left[\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v}\right]=\left[-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]$ sont des mesures de l'angle de droites $[d_1,d_2]$. Mais inversement toute mesure de $[d_1,d_2]$ n'est pas nécessairement une mesure de $\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]$, car il peut s'agir d'une mesure de $\left[\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v}\right]$, ces mesures pourraient être équivalentes modulo π, uniquement dans la situation où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Étant donné un deuxième angle de droites $\{r',r'\circ h\}$, on peut remarquer que $\{r\circ r',r\circ r'\circ h\}$ définit un troisième angle de droites, dont les deux représentants sont la composition dans n'importe quel ordre, d'un élément de $\{r',r'\circ h\}$ avec un élément de $\{r,r\circ h\}$, car $h^2=\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_2}$. L'ordre de composition est indifférent car le groupe des rotations du plan est commutatif, cela nous permet de définir une opération à laquelle on peut appliquer la relation de Chasles : $[d_1,d_2]+[d_2,d_3]=[d_1,d_3]$. Si $\{r',r'\circ h\}$ est la paire de rotations qui transforment le vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de d_2 en un vecteur directeur $\pm\overrightarrow{w}$ de d_3, le résultat de cette addition découle trivialement des égalités $r'\circ r\left(\overrightarrow{u}\right)=r'\left(\overrightarrow{v}\right)=\pm\overrightarrow{w}$ et par conséquent $[d_1,d_3]=\{r\circ r',r\circ r'\circ h\}$. Toutes les règles habituelles de calcul dans un un groupe [1] commutatif noté additivement sont applicables, son élément neutre peut être noté sans inconvénient 0 au lieu de $[d,d]=\{\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_2},h\}$, cela permet d'écrire $[d_1,d_2]+[d_2,d_1]=0$ et $[d_2,d_1]=-[d_1,d_2]$. Comme dans tout groupe commutatif, nous pourrons utiliser les règles de calculs suivantes :

— $\underbrace{[d,d']+\ldots+[d,d']}_{n\text{angles tous égaux à }[d,d']}=n.[d,d']=-n.[d',d]$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
  si r est une rotation telle que $r(d)=d'$, cette égalité signifie que $n.[d,d']=\{r^n,r^n\circ h\}$.
— $n[d,d']+m[d,d']=(n+m)[d,d']$ pour tout $(n;m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
— $n[d,d']+n[d',d']=n[d,d'']$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

Comme pour les angles de vecteurs, nous désignerons par $[\widehat{(\mathrm{AB})(\mathrm{CD})}]\in\mathbb{R}/_{\pi\mathbb{R}}$, la classe d'équivalence de tous les réels équivalents modulo π qui caractérisent l'angle de droites $[(\mathrm{AB})(\mathrm{CD})]$ constitué de deux rotations.

La relation de Chasles permet d'obtenir les équivalences ci-dessous utiles dans beaucoup

1. Pour les connaisseurs, il s'agit du groupe quotient des rotations de E_2 par son sous-groupe $\{\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_2},h\}$

de raisonnements, par le même procédé utilisé pour les vecteurs définis à partir des couples de points, ou des angles de vecteurs définis à partir des couples de vecteurs,

$$[d,e]=[f,g] \quad \Leftrightarrow \quad [d,f]=[e,g] \quad \Leftrightarrow \quad [g,e]=[f,d] \quad \Leftrightarrow \quad [g,f]=[e,d]$$

On dit obtenir ces égalités équivalentes par permutations des droites moyennes ou extrêmes.

1.3 Conditions pour que 4 points soient cocycliques.

THÉORÈME 1 (THÉORÈME DE L'ANGLE INSCRIT) *Si* A *et* B *sont deux points d'un cercle* $\mathscr{C}$ *de centre* O*, pour tout point* $M \in \mathscr{C}$*, le double d'une mesure de l'angle de droites* $[(MA),(MB)]$ *est défini modulo* 2π*, c'est une mesure de l'angle de vecteurs* $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]$.

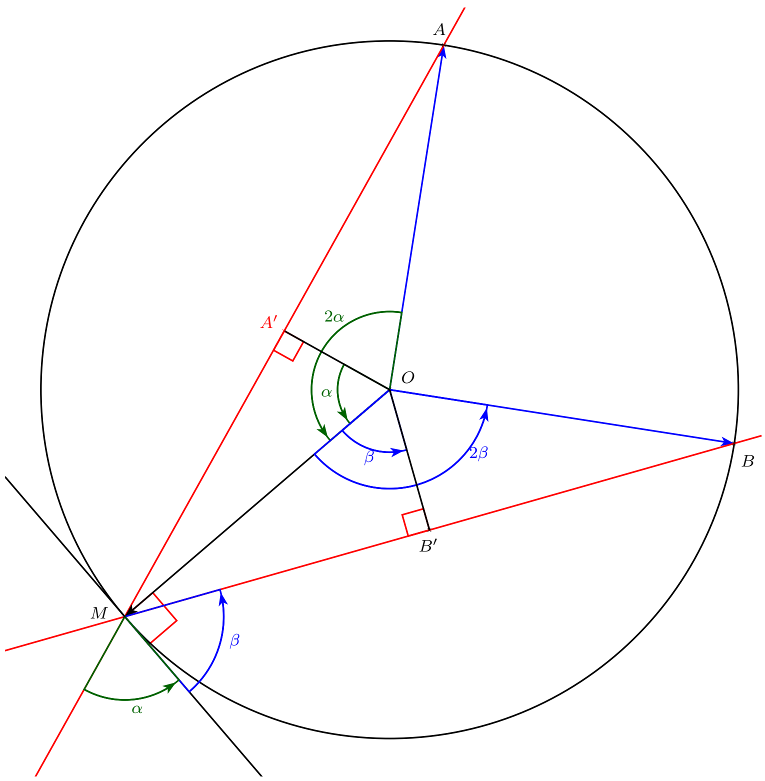


FIGURE 2 – Illustration du théorème de l'angle inscrit

Attention dans ce théorème à bien distinguer angle de vecteurs dont la mesure est définie modulo 2π, et angles de droites dont la mesure est définie modulo π. Pour prouver ce théorème, considérons la droite d tangente à $\mathscr{C}$ en M, ainsi que les points A′ milieu de [MA] et B′ milieu de [MB], (OA′) et (OB′) sont respectivement les médiatrices de [MA] et [MB]. Les angles de droites $[(OM),d]$, $[(OA'),(MA)]$ et $[(OB'),(MB)]$ admettent la même mesure $\pm\dfrac{\pi}{2}$, on en déduit les égalités suivantes : $\left\{\begin{array}{lcl}[(OA'),(OM)] & = & [(MA),d] \\ [(OM),(OB')] & = & [d,(MB)]\end{array}\right.$.

— Soit α une mesure de l'angle de vecteurs $\left[\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OM}\right]$, c'est aussi une mesure de l'angle de droite $[(MA),d]$, 2α est donc une mesure de l'angle de droites $2[(MA),d]$. Mais puisque (OA′) est médiatrice de [MA], 2α est aussi une mesure de l'angle de vecteurs $\left[\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right]+\left[\overrightarrow{\mathrm{OA'}},\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right]$.

— De même si β est une mesure de l'angle de vecteurs $\left[\overrightarrow{\mathrm{OM}},\overrightarrow{\mathrm{OB'}}\right]$, 2β est une mesure de l'angle de droites $2[d,(\mathrm{MB})]$ et de l'angle de vecteurs $\left[\overrightarrow{\mathrm{OM}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right]$.

On en déduit que $2\alpha+2\beta$ exprime une mesure de deux angles de nature différentes :

— l'angle de vecteurs $\left[\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right]+\left[\overrightarrow{\mathrm{OM}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right]=\left[\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right]$

— l'angle de droites $2[(\mathrm{MA}),d]+2[d,(\mathrm{MB})]=2[[(\mathrm{MA}),d]+[d,(\mathrm{MB})])=2[(\mathrm{MA}),(\mathrm{MB})]$.

Ce résultat permet de montrer le théorème suivant :

Théorème 2 *Quatre points distincts* M, M′, A *et* B *d'un plan affine euclidien sont alignés ou cocycliques ; si et seulement si ils vérifient l'égalité entre angles de droites :*

$$[(\mathrm{MA}),(\mathrm{MB})]=[(\mathrm{M'A}),(\mathrm{M'B})]$$

Si les quatre points sont alignés il est évident que les angles sont nuls et égaux, si les quatre points sont cocycliques l'égalité des angles de droites est un corollaire du théorème de l'angle inscrit. En effet, si α est une mesure de l'angle de droites $[(\mathrm{MA})(\mathrm{MB})]$ alors 2α est une mesure de l'angle de vecteurs $\left[\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right]$, de même si β est une mesure de l'angle de droites $[(\mathrm{M'A}),(\mathrm{M'B})]$ alors 2β est une mesure de l'angle de vecteurs $\left[\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right]$. On en déduit $2\alpha\equiv 2\beta$ modulo 2π, ce qui est équivalent à $\alpha\equiv\beta$ modulo π, d'où l'égalité $[(\mathrm{MA})(\mathrm{MB})]=[(\mathrm{M'A}),(\mathrm{M'B})]$.

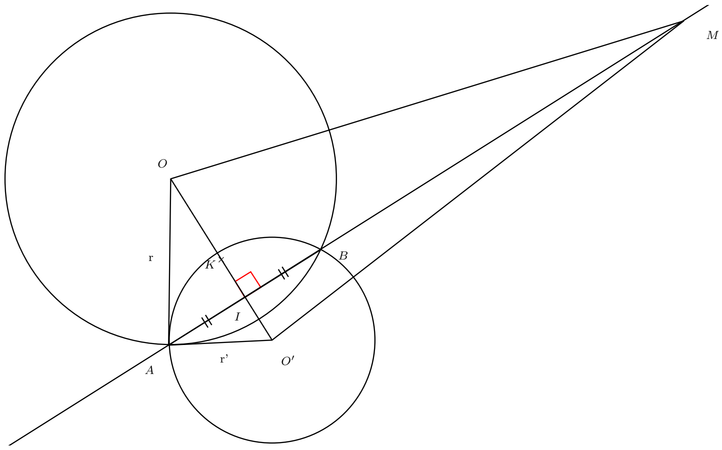
Réciproquement, supposons que $[(\mathrm{MA})(\mathrm{MB})]=[(\mathrm{M'A}),(\mathrm{M'B})]$, et désignons par θ une mesure de cet angle. Si $\theta\equiv 0$ modulo π, il est évident que les points sont alignés, si $\theta\equiv\pm\frac{\pi}{2}$ modulo π, alors, il existe un unique cercle circonscrit à ABM et aussi à ABM′, son diamètre est l'hypoténuse [AB] commune à ces deux triangles rectangles. Dans les cas de figures où les triangles ABM et ABM′ ne sont ni rectangles ni aplatis, considérons le centre O du cercle circonscrit au triangle ABM, et le centre O′ du cercle circonscrit au triangle ABM′ : ils sont nécessairement distincts du milieu I de [AB]. D'après le théorème de l'angle inscrit, les angles de vecteurs $\left[\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right]$ et $\left[\overrightarrow{\mathrm{O'A}},\overrightarrow{\mathrm{O'B}}\right]$ admettent 2θ pour mesure. Dans la situation où $\mathrm{O}\neq\mathrm{I}$ et $\mathrm{O'}\neq\mathrm{I'}$, on peut considérer les quatre angles de vecteurs $\left[\overrightarrow{\mathrm{O'A}},\overrightarrow{\mathrm{O'I}}\right]$, $\left[\overrightarrow{\mathrm{O'I}},\overrightarrow{\mathrm{O'B}}\right]$, $\left[\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right]$ et $\left[\overrightarrow{\mathrm{OI}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right]$, par symétrie par rapport à la médiatrice de [AB] on voit qu'ils admettent nécessairement la même mesure θ. Puisque $\mathrm{IO}\neq 0$ et $\mathrm{IO'}\neq 0$, on peut poser le calcul le calcul $\tan|\theta|=\frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{IO}}=\frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{IO'}}$, et montrer ainsi que $\mathrm{IO}=\mathrm{IO'}$. Si O était différent de O′, le quadrilatère OAO′B serait alors un losange non aplati de centre I, avec des angles de vecteurs $\left[\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OI}}\right]$ et $\left[\overrightarrow{\mathrm{O'A}},\overrightarrow{\mathrm{O'I}}\right]$ opposés et pourtant de même mesure θ. Or les seules mesures θ qui permettent d'obtenir un angle égal à son opposé, doivent vérifier $\theta\equiv 0$ modulo π, ceci est en contradiction avec un losange OAO′B non aplati, A, B, M et M′ sont donc sur un même cercle de centre O confondu avec O′.

De la même manière qu'une droite passant par les points A et B peut être définie comme réunion de ces deux points, et de l'ensemble de tous les autres points d'où le bipoint (A, B) est vu sous un angle de mesure nulle modulo π, ce théorème permet de définir le cercle $\mathscr{C}(\mathrm{ABC})$ circonscrit au triangle ABC, Dans un plan euclidien $\mathscr{P}$, si $\alpha\in\mathbb{R}/_{\pi\mathbb{R}}$ est la mesure de l'angle de droites $[(\mathrm{AB}),(\mathrm{AC})]$

$$\mathscr{C}(\mathrm{ABC})=\{\mathrm{B};\mathrm{C}\}\cup\left\{\mathrm{M}\in\mathscr{P}/[\widehat{(\mathrm{MB}),(\mathrm{MC})}]=\alpha\right\}$$

2 Axe radical de de deux cercles dans un même plan

2.1 Puissance d'un point par rapport à un cercle



DÉFINITION 2 *Étant donné un cercle $\mathscr{C}$ de centre* O *et rayon r, on appelle puissance du point* M *par rapport à $\mathscr{C}$, le réel $p_{\mathscr{C}}(\mathrm{M}) = \mathrm{OM}^2 - r^2$.*

Il est aussi possible d'exprimer $p_{\mathscr{C}}(\mathrm{M})$ à l'aide d'un produit scalaire. Étant donné une droite d passant par M et sécante à $\mathscr{C}$ en A et B, on montre en utilisant le milieu I de [AB] et le théorème de Pythagore, que :

$$p_{\mathscr{C}}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)\left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}}\right) = \mathrm{MI}^2 - \mathrm{IA}^2 = \mathrm{MO}^2 - (\mathrm{IO}^2 + \mathrm{IA}^2) = \mathrm{MO}^2 - r^2$$

On peut prolonger ce calcul et cette formule, dans le cas où la droite d est tangente au cercle en $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{I}$.

Cette notion est généralisable à l'espace de dimension 3 sans difficulté, et permet d'exprimer la notion de puissance d'un point par rapport à une sphère.

2.2 Définition de l'axe radical

DÉFINITION 3 *L'ensemble des points de même puissance par rapport à 2 cercles non concentriques est une droite perpendiculaire à la droite passant par leurs centres; cette droite est appelée axe radical des 2 cercles.*

Soit $\mathscr{C}'$ est un deuxième cercle de centre O′ et rayon r', désignons par K le milieu de [OO′], on a les égalités équivalentes suivantes :

$$\mathrm{OM}^2 - r^2 = \mathrm{O'M}^2 - r'^2 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{O'M}}\right)\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{O'M}}\right) = r^2 - r'^2 \quad\Leftrightarrow\quad 2\overrightarrow{\mathrm{KM}}.\overrightarrow{\mathrm{O'O}} = r^2 - r'^2$$

On obtient un point particulier de l'axe radical, en posant $\mathrm{M} = \mathrm{H}$ où H est le point de la droite (OO′) tel que $\overrightarrow{\mathrm{KH}} = \dfrac{r^2 - r'^2}{2\mathrm{OO'}^2}\overrightarrow{\mathrm{OO'}}$, tout autre point de l'axe radical doit vérifier $\overrightarrow{\mathrm{HM}}.\overrightarrow{\mathrm{O'O}} = 0$, il est donc nécessaire et suffisant qu'il soit sur la perpendiculaire à (OO′) passant par H.

Si deux cercles sont sécants en A et B, l'expression de $p_{\mathscr{C}}(\mathrm{M})$ et $p_{\mathscr{C}'}(\mathrm{M})$ pour tout $\mathrm{M} \in (\mathrm{AB})$, à l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}}$, montre que l'axe radical de ces 2 cercles, ne peut qu'être la droite (AB), ou bien la tangente aux deux cercles en leur point de contact. La notion d'axe radical permet de démontrer simplement le théorème suivant

3 Théorème de Monge

THÉORÈME 3 *Étant donné 3 cercles quelconques sécants deux à deux en deux points distincts, les 3 droites passant chacune par les points d'intersection de chaque paire de cercles, sont concourantes ou parallèles.*

Lorsque deux cercles sont tangents et n'ont qu'un seul point en commun, on obtient la même propriété en remplaçant la droite passant par deux points d'intersection par la tangente commune aux deux cercles.

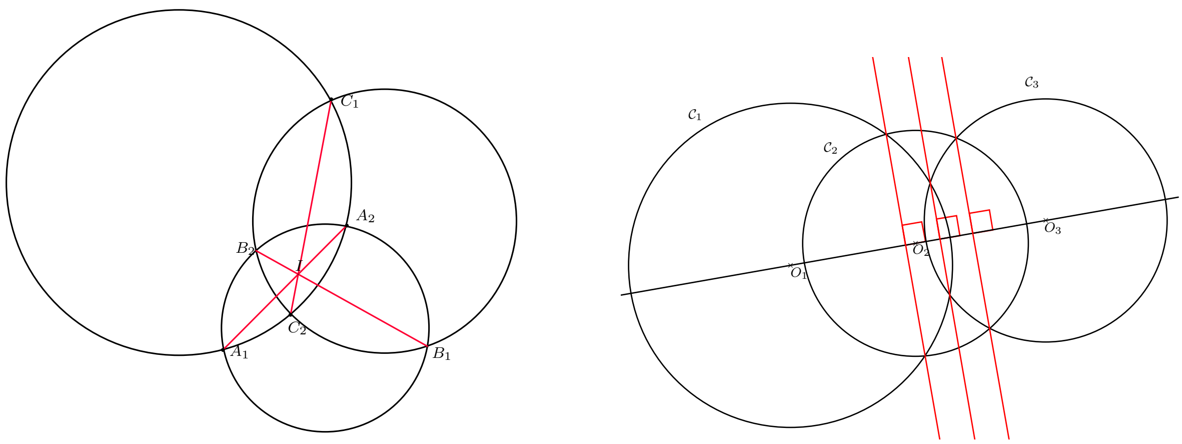


FIGURE 3 – Illustration du théorème de Monge avec des axes radicaux concourants ou parrallèles.

Il est évident que les droites en questions sont parallèles si et seulement les centres des cercles sont alignés, sinon une preuve simple du théorème de Monge, s'appuie sur la notion d'axe radical. Si deux paires de cercles ont des axes radicaux sécants, le point d'intersection a même puissance par rapport aux 3 cercles, et se trouve donc être lui aussi sur l'axe radical de la troisième paire de cercles, on l'appelle centre radical des 3 cercles. Une illustration intéressante de la notion d'axe radical, est la démonstration du théorème de Jacobi.

4 Théorème de Jacobi

THÉORÈME 4 (THÉORÈME DE JACOBI) *Étant donné un triangle quelconque* ABC*, si on construit les trois triangles* A′BC, B′AC *et* C′AB *à l'aide de trois paires de droites dites isogonales par rapport aux côtés du triangles, en respectant ces 3 égalités entre angles de droites suivantes :*

— $[(AB),(AC')] = [(AB'),(AC)]$

— $[(BC),(BA')] = [(BC'),(BA)]$

— $[(CA),(CB')] = [(CA'),(CB)]$

alors les droites (AA′) , (BB′) *et* (CC′) *sont concourantes ou parallèles*

Pour que les points A′, B′ et C′ soient définis, on suppose bien entendu que les angles de droites intervenant dans le théorème ne sont pas nuls. Nous allons montrer que les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont les axes radicaux des 3 cercles que nous avons représenté sur la figure 4, ils sont définis à l'aide de mesures d'angles de droites.

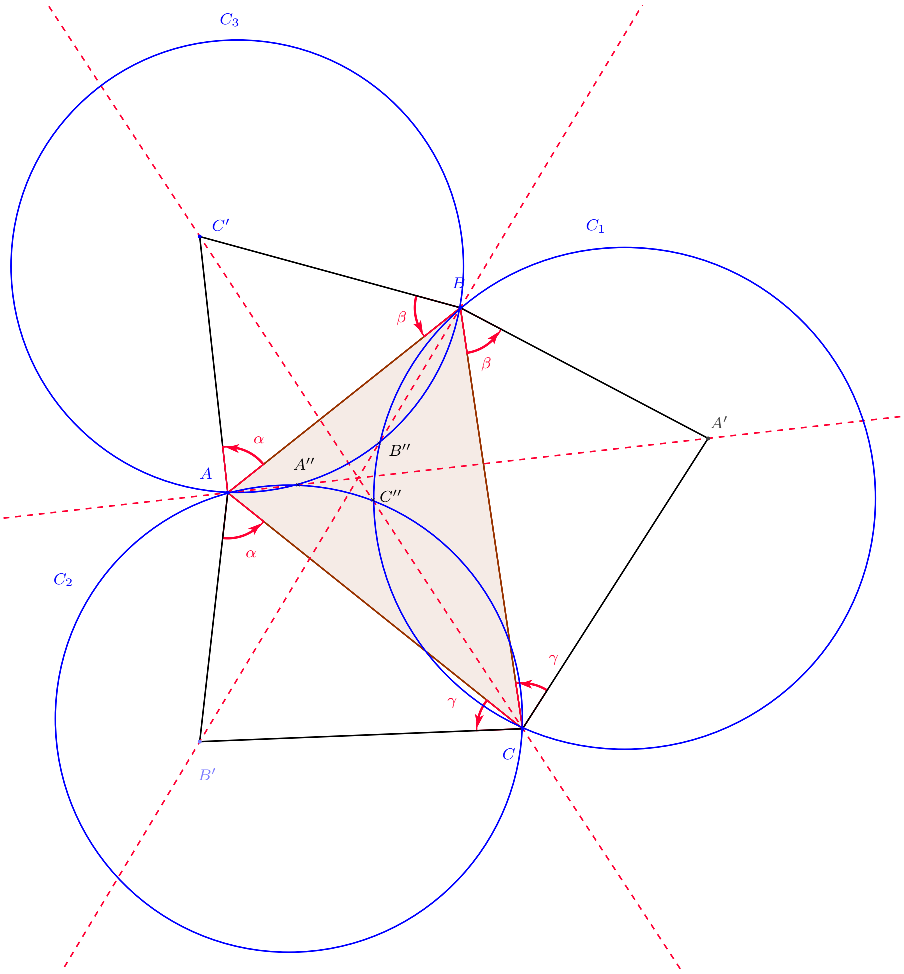


FIGURE 4 – 3 cercles définis à l'aide des angles α , β et γ, auxquels on appliquera le théorème de Monge

— Soit $\mathscr{C}_1$ le cercle, ensemble de tous les points du plan sous lesquels le bipoint (B, C) est vu sous un angle de droites de mesure $\alpha \in \mathbb{R}/_{\pi}\mathbb{R}$, tel que $\alpha = [\widehat{(AB), (AC')}] = [\widehat{(AB'), (AC)}]$:
$$\mathscr{C}_1 = \{B, C\} \cup \left\{ M \in \mathscr{P} / [\widehat{(MB), (MC)}] = \alpha \right\}.$$
— Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle, ensemble de tous les points du plan sous lesquels le bipoint (C, A) est vu sous un angle de droites de mesure $\beta \in \mathbb{R}/_{\pi}\mathbb{R}$, tel que $\beta = [\widehat{(BC), (BA')}] = [\widehat{(BC'), (BA)}]$:
$$\mathscr{C}_2 = \{C, A\} \cup \left\{ M \in \mathscr{P} / [\widehat{(MC)(MA)}] = \beta \right\}.$$
— Soit $\mathscr{C}_3$ le cercle, ensemble de tous les points du plan sous lesquels le bipoint (A, B) est vu sous un angle de droites de mesure $\gamma \in \mathbb{R}/_{\pi}\mathbb{R}$, tel que $\gamma = [\widehat{(CA), (CB')}] = [\widehat{(CA'), (CB)}]$:
$$\mathscr{C}_3 = \{A, B\} \cup \left\{ M \in \mathscr{P} / [\widehat{(MA), (MB)}] = \gamma \right\}.$$

Pour montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont les axes radicaux des 3 cercles que nous venons de définir, nous allons construire les points $A'' \in (AA')$, $B'' \in (BB')$ et $C'' \in (CC')$ obtenus respectivement par intersection avec les cercles circonscrits aux triangles BCA', ACB' et ABC'. Ces points doivent être distincts de A', B' et C', mais peuvent être éventuellement confondus avec A, B et C. Ces trois nouveaux cercles construits sur la figure 5 vont nous permettre d'écrire les égalités entre angles de droites ci-dessous, vérifiables sur cette même figure.

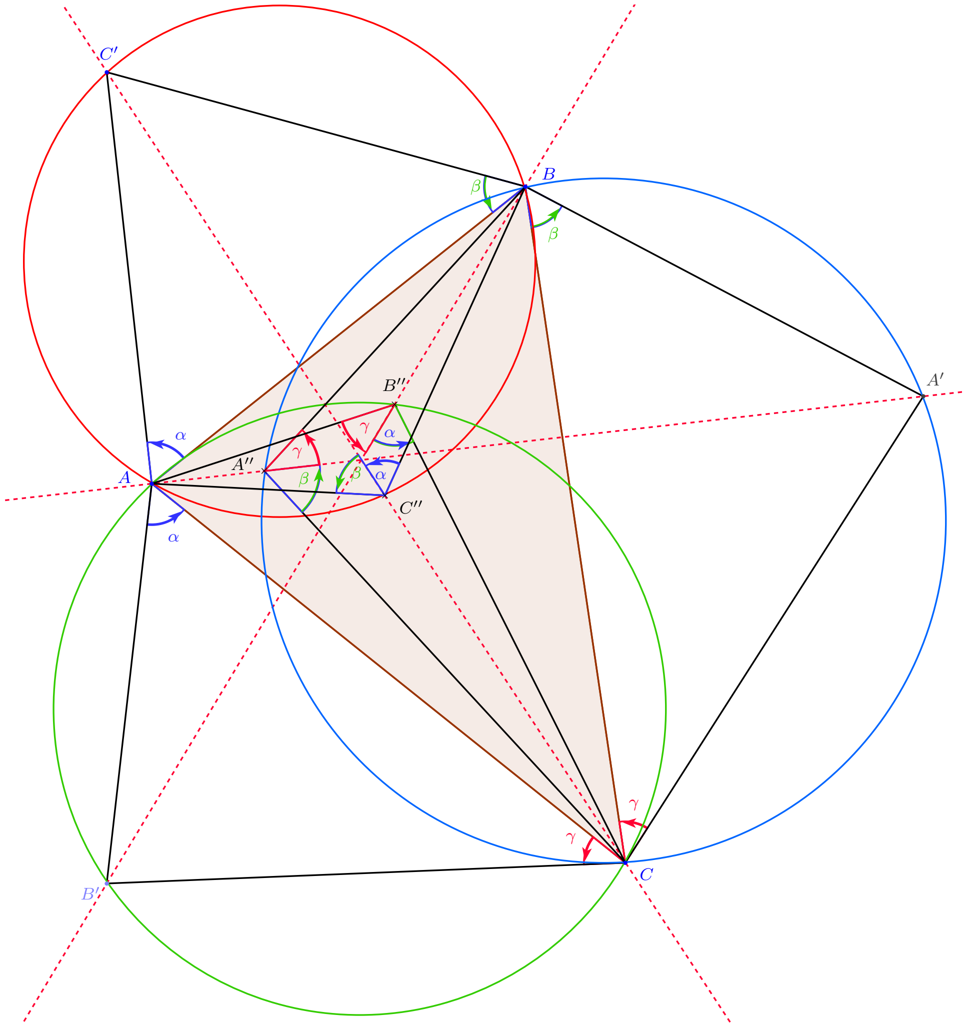


FIGURE 5 – Preuve du théorème de Jacobi.
Sont représentés de la même couleur les angles de droites de même mesure.

— sur le cercle circonscrit à BCA′ :
$$\left\{\begin{array}{lllllll} [\widehat{(A''C),(A''A)}] & = & [\widehat{(A''C),(A''A')}] & = & [\widehat{(BC),(BA')}] & = & \beta \\ [\widehat{(A''A),(A''B)}] & = & [\widehat{(A''A'),(A''B)}] & = & [\widehat{(CA'),(CB)}] & = & \gamma \end{array}\right.,$$
d'où $A'' \in \mathscr{C}_2 \cap \mathscr{C}_3$, la droite (AA′) est donc l'axe radical des cercles $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$

— sur le cercle circonscrit à CAB′ :
$$\left\{\begin{array}{lllllll} [\widehat{(B''A),(B''B)}] & = & [\widehat{(B''A)(B''B')}] & = & [\widehat{(CA)(CB')}] & = & \gamma \\ [\widehat{(B''B),(B''C)}] & = & [\widehat{(B''B'),(B''C)}] & = & [\widehat{(AB'),(AC)}] & = & \alpha \end{array}\right.,$$
d'où $B'' \in \mathscr{C}_3 \cap \mathscr{C}_1$, la droite (BB′) est donc l'axe radical des cercles $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_1$

— sur le cercle circonscrit à ABC′ :
$$\left\{\begin{array}{lllllll} [\widehat{(C''B)(C''C)}] & = & [\widehat{(C''B)(C''C')}] & = & [\widehat{(AB)(AC')}] & = & \alpha \\ [\widehat{(C''C)(C''A)}] & = & [\widehat{(C''C')(C''A)}] & = & [\widehat{(BC')(BA)}] & = & \beta \end{array}\right.,$$
d'où $C'' \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$, la droite (CC′) est donc l'axe radical des cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

D'après le théorème de Monge appliqué aux cercles $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$, on en déduit que les droites $(AA') = (AA'')$, $(BB') = (BB'')$ et $(CC') = (CC'')$ sont concourantes ou parallèles.