Sofia Osorio Echeverry A00365139

Hoja de trabajo #3

guia de lectura

2.1.2.1 → • las ecuaciones lineales son homogeneas o no homogeneas.

• contienen derivadas hasta orden n de variable independiente y los coeficientes de dichas derivadas son funciones arbitrarias de la variable independiente.

2.1.2.2. Lineales

$n=2 \rightarrow 2xy'' + 20x^2y' + 12y = \operatorname{sen} x$

$n=3 \rightarrow 4x^3y''' + 2xy'' + 20x^2y' + 12y = \cos x$

$n=4 \rightarrow 5x\, y^{(4)} + 4x^3y''' + 2xy'' + 20x^2y' + 12y = \tan x$

No lineales

$n=2 \quad 2xy'' + 20y^2y' + 12y = \operatorname{sen} x$ → potencia variable dependiente

$n=3 \quad 4x^3y''' + 2xy'' + 20xy' + 12y'y = \cos x$

$n=4 \quad 5xy\,y^{(4)} + 4x^3y''' + 2xy'' + 20xy' + 12y = \tan x$

	orden uno	orden dos	orden tres	orden cuatro
2.1.3	$r-2=0$	$r(r-1)=0$	$r(r-1)(r-2)=0$	$r^3(r-2)=0$
2.1.3.1	$(D-2)y=0$	$D(D-1)y=0$	$D(D-1)(D-2)y=0$	$D^3(D-2)y=0$
2.1.3.2	$y=e^{2x}$ $(D-2)e^{2x}=0$ $2e^{2x}-2e^{2x}=0$ $0=0$	$y=e^{0\cdot x}=1$ $D(D-1)(1)=0$ $D(0-1)=0$ $0-0=$ $0=0$ $y=e^{1\cdot x}$ $D(D-1)e^{x}=0$ $D(e^x-e^x)=0 \rightarrow D(0)=0$	$y=e^{0\cdot x}=1$ $D(D-1)(D-2)(1)=0$ $D(D-1)(0-2)=0$ $D(D-1)(-2)=0$ $D(0+2)=$ $D(2)$ $=0$	

continuación | 2.1.2.4

$y = e^{1x}$ | orden 2 | orden 3

$D(D-1)(D-2)e^{x} = 0$

$D(D-1)(e^{x}-2e^{x}) = 0$

$D(D-1)(-e^{x}) = 0$

$D(-e^{x}+e^{x}) = 0$

$D(0) =$

$0 = 0$

$y = e^{2x}$

$D(D-1)(D-2)e^{2x} = 0$

$D(D-1)(2e^{2x}-2e^{2x}) =$

$D(D-1)(0)$

$D(0) =$

$0 = 0$

2.1.5 las funciones exponenciales no cambian la forma del operador derivada n-esima, por lo que podriamos intuir y encontrar una combinación lineal especifica que logre anular siempre y cuando las coeficientes de la e.d.o lineal sean constantes.

2.1.6. Se ilustra el ejemplo con la notación $y^{(n)} = D^{n}$

2.1.6.1 $L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2)$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D^k (\alpha y_1 + \beta y_2) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D^k (\alpha y_1) + a_k D^k (\beta y_2) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k D^k y_1 + \beta a_k D^k y_2) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha a_k D^k y_1 + \sum_{k=0}^{n} \beta a_k D^k y_2 =$$

$$\alpha \sum_{k=0}^{n} a_k D^k y_1 + \beta \sum_{k=0}^{n} a_k D^k y_2 =$$

$$\alpha L(y_1) + \beta L(y_2)$$

$L = a_n D^n + \dots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0$

$L = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k$

Escaneado con CamScanner

2.1.6.3 $\text{Nucleo}(L) = \{ y \mid L(y) = 0 \}$

Sean $y_1, y_2 \in \text{Nucleo}(L)$ o sea $L(y_1) = 0$
$L(y_2) = 0$

$\to$ $y_1 + y_2 \in \text{Nucleo}(L)$ ya que:

$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$ $\quad$ $\therefore$ Se demostró 2.1.6.2

$= 0 + 0$

$\to$ $\alpha y_1 \in \text{Nucleo}(L)$ ya que

$L(\alpha y_1) = \alpha L(y_1)$ $\quad$ demostrado 2.1.6.2 colocando $\beta = 0$

Scribe

Sección 3.4 → Ejercicios → 3, 4, 13, 14, 22, 23

3.

la masa de 3 kg es estirada p. 20 cm = 0.2 metros por una fuerza de 15 N, podremos encontrar la constante de elasticidad del resorte $k = \frac{F}{x} = \frac{15N}{0.2 \text{ metros}} = 75 \text{ N/mt}$

puesto que el movimiento es libre y sin fuerza de amortiguamiento ya que conocemos que la elongación del resorte $x(t)$ viene dada por:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

donde la frecuencia angular es $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{75}{3}} \frac{rad}{seg} = 5 \frac{rad}{seg}$

y puesto que $x_0 = 0 mt$ y $V_0 = -10 \frac{mt}{seg}$; obtenemos:

$$x(t) = -2 \operatorname{sen}(5t)$$

concluyendo así que la amplitud del movimiento es $C = 2$ metros.

con un periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0} seg = \frac{2\pi}{5} seg \approx 1.25 seg$

4. Un cuerpo con masa de 250 g está unido al extremo de un resorte estirado 25 cm por una fuerza de 9 N. En el tiempo $t = 0$ el cuerpo es movido 1 m a la derecha, estirando el resorte y aplicando un movimiento con una velocidad inicial de 5 m/s a la izquierda. (a) Encuentre $x(t)$ en la forma C

$C \cos(\omega_0 t - \alpha)$. (B) obtenga amplitud y el periodo de mov del cuerpo.

A. masa: 250 gr = 0.25 kg
estirado: 25 cm = 0.25 m
fuerza 9 N
constante de elasticidad del resorte $k = \frac{F}{x} = \frac{9N}{0.25m} = 36$ N/metros
↳ el movimiento es libre y sin fricción de amortiguamiento, ya que la elongación del resorte $x(t)$ viene dada por:

$$x(t) = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{x_0^2 \omega_0^2 + V_0^2} \cos(\omega_0 (t - \delta))$$

D M A Scribe

donde la frecuencia angular en este caso es $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{36}{0.25}} \frac{rad}{seg}$

$= 12 \frac{rad}{seg}$ y puesto que $x_0 = 1$ metro y $V_0 = -5 \frac{m}{seg}$

con el tiempo de retardo $\delta = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0}\left[2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right)\right]$ seg

entonces así $\delta = 0.49$ seg

$x_0 > 0$ y $V_0 < 0$

con lo cual $x(t) = \frac{13}{12}\cos(12(t - 0.49))$

$$x(t) = \frac{13}{12}\cos(12t - 5.88)$$

B. amplitud del movimiento es $C = \frac{13}{12}$ metros

y

el periodo del movimiento es $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ seg $= \frac{\pi}{6}$ seg ≈ 0.52 seg

#22. un peso de 12 lb (masa $m = 0.375$ slugs en unidades fps) está unido a un resorte suspendido verticalmente que se estira 6 in, como a un amortiguador que le proporciona una resistencia de 3 lb por cada ft/s de velocidad. (a). Si el peso es colocado 1 ft por debajo de su posición de equilibrio estático y se suelta en el tiempo $t=0$, encuentre la función de la posición $x(t)$. (b) Verifique la frecuencia, la amplitud variante en el tiempo y el ángulo de fase del movimiento.

$$\cdot\ k = \frac{F}{x} \rightarrow \frac{12\ lb}{6\ in} = \frac{12\ lb}{6 \cdot \frac{1}{12}\ ft} = 24\ \frac{lb}{ft}$$

$\rightarrow$ $c = 3\ lb / ft/seg$ y se tiene que $x(0) = +1\ ft$

y $x'(0) = 0\ ft/seg$.

como hay amortiguamiento; encontraremos el coeficiente de amortiguamiento crítico.

$$C_{cr} = \sqrt{4km} = 6\ lb/(ft/seg)$$

por lo tanto, $c < C_{cr}$; ya que el movimiento es subamortiguado; con lo cual la ecuación del movimiento está dado por:

$$x(t) = \frac{1}{\omega_1}\sqrt{x_0^2\omega_1^2 + (v_0 + p x_0)^2}\ e^{-pt} \cdot \cos(\omega_1(t - \delta_1))$$

Escaneado con CamScanner

en donde $x(0) = x_0 = 1 \, ft$; $x'(0) = v_0 = 0 \, \frac{ft}{seg}$

$$p = \frac{c}{2m} = 4 \, \frac{rad}{seg} \; ; \; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \, \frac{rad}{sg} \cdot \frac{8 \, rad}{seg}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = \sqrt{48} \, \frac{rad}{seg} = 4\sqrt{3} \, \frac{rad}{seg}$$ es

la frecuencia del movimiento subamortiguado.

y donde $\delta_1 = \frac{1}{\omega_1} \tan^{-1}\left(\frac{v_0 + p x_0}{\omega_1 x_0}\right) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6}$ seg

con lo cual $x(t) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \, 8 \, e^{-4t} \cos\left(4\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{\pi}{6}\right)\right)$

$$x(t) = \frac{2}{3}\sqrt{3} \, e^{-4t} \cos(4\sqrt{3}\, t - \pi/6)$$

→ La amplitud variante con el tiempo es $A = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

→ ángulo fase $\alpha_1 = \pi/6$ rad

23.

a. tenemos que $m = 100$ slugs → $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{100}}$ y como

$\omega_0 = 80 \, \frac{ciclos}{min} = 80 \cdot \frac{2\pi \, rad}{60 \, seg} = \frac{8\pi}{3} \, \frac{rad}{seg}$

→ $\omega_0^2 = \frac{k}{100}$

$100\left(\frac{8\pi}{3}\right)^2 = k$ → $k \approx 7018 \, \frac{slug}{seg} = 7018 \, \frac{lb}{\frac{ft}{seg^2}} \cdot \frac{1}{seg}$

$= 7018 \, Lb/(ft/seg)$

B. como $\omega_1 = 78 \, \frac{ciclos}{min} = 78 \cdot \frac{2\pi}{60 \, seg} = \frac{13\pi}{5} \, \frac{rad}{seg}$

puesto que $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = \frac{13\pi}{5} \cdot \frac{rad}{seg}$

→ continuación

$\rightarrow \omega_0^2 - p^2 = \left(\frac{13\pi}{5}\right)^2$

$\left(\frac{8\pi}{3}\right)^2 - \left(\frac{13\pi}{5}\right)^2 = p^2$

$\rightarrow p \simeq = 1.86$ rad/seg

→ Buscamos para que el tiempo la amplitud variante en el tiempo del movimiento subamortiguado; tendre variaciones del 1% del valor inicial en $t = 0$:

$$Ce^{-pt} = \frac{1}{100} C$$

$$\rightarrow e^{-pt} = \frac{1}{100} \rightarrow \ln e^{-pt} = \ln\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$-pt = \ln\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$t = -\frac{1}{p} \ln\left(\frac{1}{100}\right) \text{ seg}$$

$$t \approx 2.47 \text{ seg}$$

Sección 3.5 Ejercicios: 5, 19, 25, 39

5. Resolver $y'' + y' + y = \operatorname{sen}^2 x$

observamos que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$\Rightarrow y'' + y' + y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ ①

sea $y_p(x) = A + B\cos 2x + C\operatorname{sen} 2x$

$y_p'(x) = -2B\operatorname{sen} 2x + 2C\cos 2x$

$y_p''(x) = -4B\cos 2x - 4C\operatorname{sen} 2x$

como $y_p(x) \Rightarrow$ satisface la ecuación ①

$y_p'' + y_p' + y_p = A + (B + 2C - 4B)\cos 2x + (C - 2B - 4C)\operatorname{sen} 2x$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$2C - 3B = -\frac{1}{2}$

$-2B - 3C = 0$

$\rightarrow$ wolfram $A = \frac{1}{2}$

$B = \frac{3}{26}$

$C = -\frac{1}{13}$

$y_{p(x)} = A + B\cos 2x + C\operatorname{sen} 2x$

$y_{p(x)} = \frac{1}{2} + \frac{3}{26}\cos 2x - \frac{1}{13}\operatorname{sen} 2x$

$y_{p(x)} = \frac{1}{26}(13 + 3\cos 2x - 2\operatorname{sen} 2x)$

Solución general a la ecuación ①

$\Rightarrow y(x) = y_c(x) + y_p(x)$

$y(x) = e^{-\frac{1}{2}}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] + \frac{1}{26}(13 + 3\cos 2x - 2\operatorname{sen} 2x)$

Donde la solución a la ecuación diferencial homogenea asociada se obtuvo:

$$y'' + y' + y = 0$$ ecuación homogenea asociada

Ecua auxiliar $r^2 + r + 1 = 0$

$$r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\, i$$

$$y_c(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$$

19. resolver $y^{(5)} + 2y^{(3)} + 2y'' = 3x^2 - 1$

Se obtiene la solución de la ecuación homogénea asociada

$$y^{(5)} + 2y^{(3)} + 2y'' = 0$$

con ecuación auxiliar : $r^5 + 2r^3 + 2r^2 = 0$

cuyas raíces son

de chito Wolfram

$r = 0$ multiplicidad 2

$r = -0,77$

$r = 0.38 \pm 1.56\,i$

así que la solución de la ecuación homogénea asociada es

$\to y_c(x) = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 x e^{0 \cdot x} + C_3 e^{-0.77x} + e^{0.38x}(C_4 \cos 1.56x + C_5 \operatorname{sen} 1.56x)$

$$y_c(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-0.77x} + e^{0,38x}(C_4 \cos(1.56x) + C_5 \operatorname{sen}(1.56x))$$

una posible solución para la ecuación particular a la ecuación no homogénea sería : (teniendo en cuenta que $f(x) = 3x^2 - 1$)

$$y_p(x) = \underbrace{A + Bx}_{} + Cx^2$$

$\hookrightarrow$ dichos términos se encuentran duplicados en la solución $y_c(x)$, entonces debemos multiplicar por x^s s el menor entero, tal que ya no encontremos duplicación de términos de $y_p(x)$ en $y_c(x)$; esto se logra escogiendo $s=2$:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4$$

$$y_p'(x) = 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3$$

$$y_p''(x) = 2A + 6Bx + 12Cx^2$$

$$y_{p(x)}^{(3)} = 6B + 24Cx$$

$$y_{p(x)}^{(4)} = 24C$$

$$y_{p(x)}^{(5)} = 0$$

reemplazando esas expresiones en la e.d.o

$$y_p^{(5)} + 2y_p^{(3)} + 2y''_p = 3x^2 - 1$$

$$(0) + 2(6B + 24Cx) + 2(2A + 6Bx + 12Cx^2) = 3x^2 - 1$$

$$\Rightarrow (24C)x^2 + (12B + 48C)x + (12B + 4A) = 3x^2 - 1$$

con lo que podemos concluir que comparando término a término:

$$24C = 3 \rightarrow C = 1/8$$

$$12B + 48C = 0 \rightarrow 12B + 6 = 0$$

$$B = -1/2$$

$$12B + 4A = -1$$

$$-6A + 4A = -1$$

$$A = 5/4$$

con lo cual queda establecida la forma de $y_p(x)$

$$y_{p(x)} = \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^4$$