Problemas sobre derivabilidad en funciones a trozos

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
2ºBach CCSS	Funciones, límites y derivadas	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

a) Se considera la función

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} a\cdot e^{x+1} & x\leq -1 \\ x^2-2 & -1<x<2 \\ b\cdot \log(12-x) & 2\leq x<12 \end{cases}}$$

Siendo a y b números reales. Determine los valores de a y b para que la función f sea continua en su dominio.

b) Represente el recinto acotado, limitado por la recta $y=-x+3$ y la parábola $y=-x^2+5$.

a) En el intervalo a la izquierda de $x=-1$ tenemos una función exponencial. Como el exponente es un polinomio de grado uno, el dominio será toda la recta real. En nuestro caso, diremos que la función es continua desde menos infinito hasta -1 abierto.

Entre $x=-1$ y $x=2$ tenemos un polinomio de grado dos. Por lo que la función es continua en toda la recta real. Acotado a nuestro intervalo, la función es continua en el intervalo $(-1,2)$.

Entre $x=2$ y $x=12$ aparece un logaritmo. El argumento del logaritmo es positivo para cualquier número inferior a 12. Por lo tanto, la función es continua en el intervalo $(2,12)$.

Pasamos a estudiar la continuidad en los puntos frontera. Por ejemplo, para $x=1$:

1. Existe la función en el punto.

$$f(-1)=a\cdot e^{-1+1}\rightarrow f(-1)=a$$

2. Límites laterales iguales.

$$L^-=\lim_{x\rightarrow(-1)^-} a\cdot e^{x+1}\rightarrow L^-=a$$

$$L^+=\lim_{x\rightarrow(-1)^+}(x^2-2)\rightarrow L^+=-1$$

$$L^-=L^+=L\rightarrow a=-1$$

3. La función en el punto coincide con el valor del límite.

$$f(-1)=L\rightarrow a=-1$$

Para $x=2$:

1. Existe la función en el punto.

$$f(2)=b\cdot\log(12-2)\rightarrow f(2)=b\cdot\log(10)\rightarrow f(2)=b$$

2. Límites laterales iguales.

$$L^- = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - 2) \to L^- = 2$$

$$L^+ = \lim_{x\to 2^+} b \cdot \log (12 - x) \to L^+ = b$$

$$L^- = L^+ = L \to 2 = b$$

3. La función en el punto coincide con el valor del límite.

$$f(2) = L \to b = 2$$

b) Representamos la recta dando valores a dos puntos:

$$y = -x + 3$$

$$x = 0 \to y = 3 \to punto\ A(0{,}3)$$

$$y = 0 \to x = 3 \to punto\ B(3{,}0)$$

La parábola es un desplazamiento vertical ascendente de cinco unidades de la gráfica de la parábola cóncava $y = -x^2$. Por lo que el vértice (máximo relativo) se encuentra en el punto $C(0{,}5)$.

Los cortes entre la recta y la parábola se obtienen igualando sus fórmulas:

$$-x + 3 = -x^2 + 5$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$soluciones: x = -1, x = 2$$

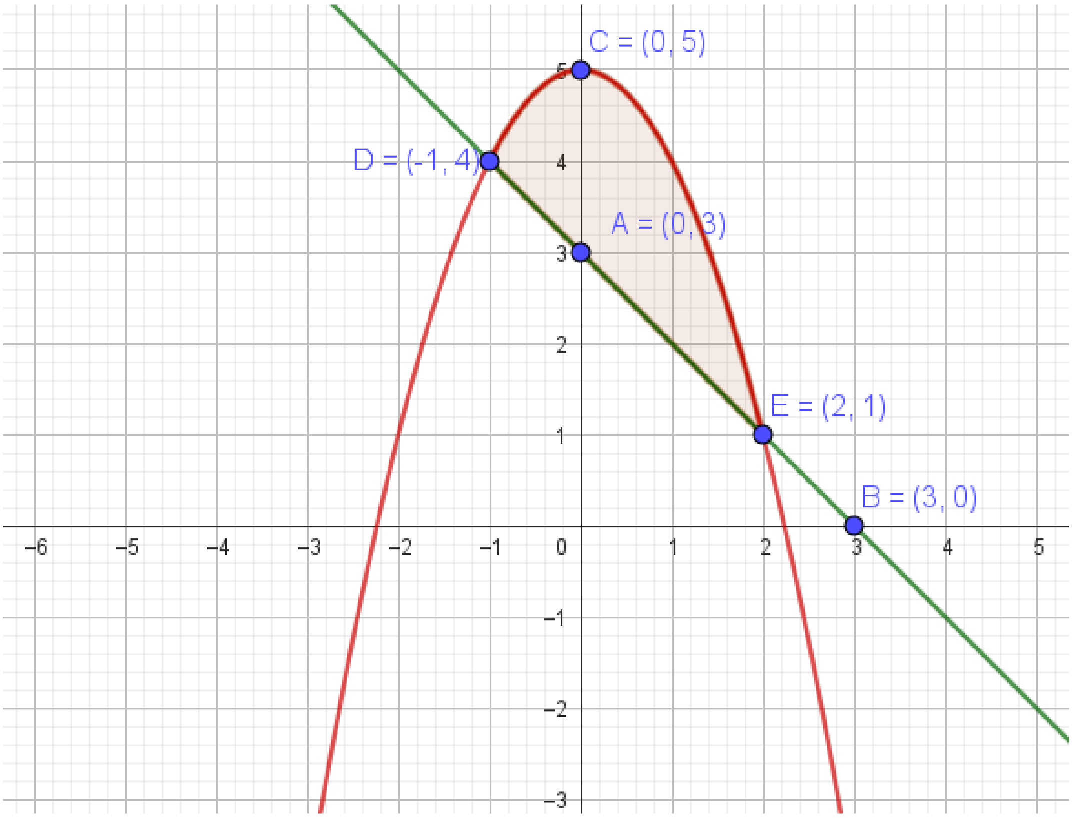
La imagen de los puntos de corte es:

$$y = -x + 3$$

$$si\ x = -1 \to y = 4 \to D(-1{,}4)$$

$$x = 2 \to y = 1 \to E(2{,}1)$$

Quedando la gráfica de ambas funciones y el área encerrada como muestra la imagen:



PROBLEMA 2

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 10 + \dfrac{5x}{2} & x \leq -2 \\ x^2 + 1 & -2 < x < 2 \\ 10 - \dfrac{5x}{2} & x \geq 2 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de f en el punto de abscisa $x = -2$.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f con pendiente -1.

c) Represente la región del plano acotada superiormente por la gráfica de f e inferiormente por el eje de abscisas.

a) Aplicamos condiciones de continuidad en el punto frontera $x = -2$.

$$f(-2) = 10 + \frac{5 \cdot (-2)}{2} \rightarrow f(-2) = 5$$

$$L^- = L^+ = L$$

$$L^- = \lim_{x \to (-2)^-} \left(10 + \frac{5x}{2}\right) = evaluar = 5$$

$$L^+ = \lim_{x \to (-2)^+} (x^2 + 1) = evaluar = 5$$

$$f(-2) = L \rightarrow 5 = 5$$

La función es continua en $x = -2$.

Calculamos la derivabilidad. Para ello, calculamos la derivada de la función (dejando los puntos frontera abierto, a la espera de demostrar si la función es derivable en esos puntos).

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{2} & x < -2 \\ 2x & -2 < x < 2 \\ -\dfrac{5}{2} & x > 2 \end{cases}$$

La función será derivable en $x = -2$ si las derivadas laterales son iguales. Por lo tanto:

$$f'(-2^-) = \lim_{x \to (-2)^-} \left(\frac{5}{2}\right) = evaluar = \frac{5}{2}$$

$$f'(-2^+) = \lim_{x \to (-2)^+} (2x) = evaluar = -4$$

Las derivadas laterales no coinciden. La función no es suave en $x = -2$. Es decir, la función no es derivable en $x = -2$.

b) La recta tangente a la función en un punto se obtiene con la interpretación geométrica de la derivada. El valor de la derivada en el punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

$$f'(-1) = 2 \cdot (-1) \rightarrow m = -2$$

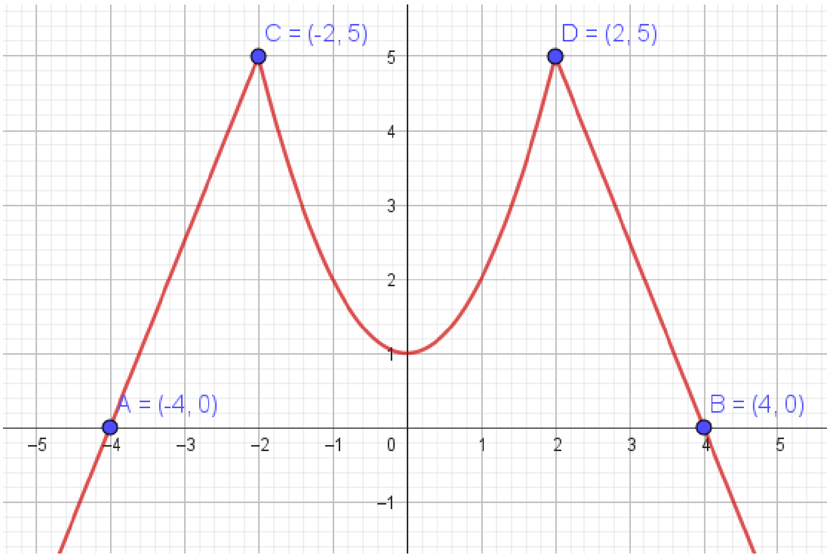
Obtenemos la imagen de la función en $x = -1$.

$$f(-1) = 10 + \frac{5 \cdot (-1)}{2} \rightarrow f(-1) = \frac{15}{2}$$

Quedando la recta en forma punto pendiente:

$$-2 = \frac{y - \frac{15}{2}}{x + 1}$$

c) Representamos la gráfica de la función. Las rectas se dibujan con dos puntos. Mientras que la parábola es el ascenso vertical de la función bien conocida $y = x^2$.



Los puntos de corte de las rectas con la parábola, como la función es continua, se obtienen simplemente sacando la imagen de los valores $x = -2$ y $x = 2$.

PROBLEMA 3

Sea la función $f(x) = \frac{2x-6}{2-x}$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de dicha función. Calcule sus asíntotas.

b) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la existencia de extremos relativos.

c) Halle los puntos de corte con los ejes de coordenadas y represente gráficamente la función.

a) En un cociente de polinomios afirmamos que el dominio es toda la recta real, salvo los valores que anulan al denominador. Por lo tanto:

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{x = 2\}$$

La derivabilidad se estudia mirando la continuidad de la función derivada.

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (2-x) - (2x-6) \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \frac{4 - 2x + 2x - 6}{(2-x)^2} = \frac{-2}{(2-x)^2}$$

Nuevamente, la función derivada es continua en toda la recta real salvo donde se anula el denominador. Por lo que diremos que la función original es derivable en toda la recta real salvo en $x = 2$.

El candidato a AV será la recta vertical $x = 2$. Calculamos límites laterales:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{2x-6}{2-x} = evaluar = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{2x-6}{2-x} = evaluar = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

Consecuencia: existe AV en la recta $x = 2$.

El grado del numerador coincide con grado del denominador, por lo que tendremos AH. Esta AH coincide con el cociente de los coeficientes que multiplican a la máxima potencia en el numerador y en el denominador. Es decir:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x-6}{2-x} = evaluar = \frac{\infty}{-\infty} = indeterminación = \frac{2}{-1} = -2$$

$y = -2$ A.H. si $x \to \pm\infty$

b) La condición necesaria de extremo relativo implica primera derivada igual a cero. Por lo tanto:

$$f'(x) = \frac{-2}{(2-x)^2}$$

$$\frac{-2}{(2-x)^2} = 0$$

$$-2 = 0 \to Absurdo$$

No hay puntos críticos, por lo que no tendremos extremos relativos.

La monotonía se estudia observando el signo de la derivada en los siguientes intervalos:

$$(-\infty, 2) \to tomamos\ por\ ejemplo\ x = 0 \to f'(0) < 0 \to f(x)\ extric.decreciente$$

$$(2, +\infty) \to tomamos\ por\ ejemplo\ x = 10 \to f'(10) < 0 \to f(x)\ extric.decreciente$$

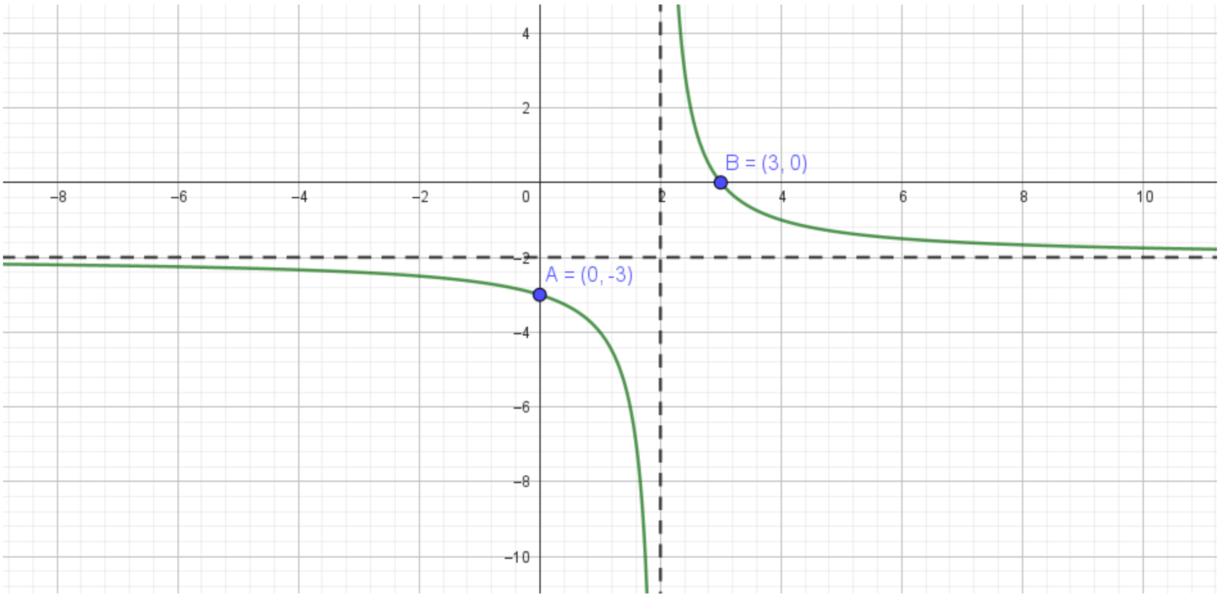
c) Los cortes con los ejes se obtienen:

$$f(x) = \frac{2x-6}{2-x}$$

$$si\ x = 0 \rightarrow f(0) = -3 \rightarrow (0-3)$$

$$si\ f(x) = 0 \rightarrow 2x-6 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow (3{,}0)$$

Con estos puntos, sabiendo que es estrictamente decreciente en todo su dominio, y con las asíntotas calculadas, la gráfica resulta:



PROBLEMA 4

Se considera la función

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+x+1 & si \quad x\leq 2\\ \dfrac{1}{x-1} & si \quad x>2\end{cases}}$$

Estudie la continuidad, derivabilidad y monotonía de la función. Represente gráficamente dicha función.

A la izquierda de $x=2$ tenemos un polinomio, cuyo dominio es toda la recta real.

A la derecha de $x=2$ encontramos una hipérbola, cuyo denominador se anula solo para x=1.

Consecuencia: La función es continua en los intervalos abiertos: $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$.

Estudiamos la continuidad en el punto frontera $x=2$.

$$f(2)=-\frac{1}{2}(2)^2+2+1\to f(2)=1$$

$$L^-=L^+=L$$

$$L^-=\lim_{x\to(2)^-}\left(-\frac{1}{2}x^2+x+1\right)=evaluar=1$$

$$L^+=\lim_{x\to(2)^+}\frac{1}{x-1}=evaluar=1$$

$$f(2)=L\to 1=1$$

La función es continua en el punto frontera.

Calculamos la derivada, dejando abierto la definición de la derivada en el punto frontera (hasta que demostremos si la función es derivable en ese punto).

$$f'(x)=\begin{cases}-x+1 & si \quad x<2\\ \dfrac{-1}{(x-1)^2} & si \quad x>2\end{cases}$$

A la izquierda de $x=2$ la derivada es continua por ser un polinomio. Por lo que la función original es derivable a la izquierda de $x=2$.

A la derecha de $x=2$ el denominador de la expresión racional solo se anula en $x=1$. Por lo tanto, la derivada es continua a la derecha de $x=2$. Y la función original es derivable a la derecha de $x=2$.

La función será derivable en el punto frontera si las derivadas laterales son iguales:

$$f'(2^-)=\lim_{x\to(2)^-}(-x+1)=evaluar=-1$$

$$f'(2^+)=\lim_{x\to(2)^+}\frac{-1}{(x-1)^2}=evaluar=-1$$

Las derivadas laterales sí coinciden. La función es derivable en $x=2$.

Para estudiar la monotonía, obtenemos los candidatos a extremo relativo anulando la primera derivada.

$$f'(x)=0$$

$$si\ x<2\to -x+1=0\to x=1\ (punto\ crítico)$$

$$si\ x>2\to -1=0\to Absurdo\ (no\ hay\ extremos\ relativos)$$

Evaluamos el signo de la derivada en los siguientes intervalos:

$$(-\infty,1) \to f'(x) = -x+1 \to si\ x=0 \to f'(0) > 0 \to f(x)\ estric.creciente$$

$$(1{,}2) \to f'(x) = -x+1 \to si\ x=\frac{3}{2} \to f'\left(\frac{3}{2}\right) < 0 \to f(x)\ estric.decreciente$$

$$(2,+\infty) \to f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \to si\ x=10 \to f'(10) < 0 \to f(x)\ estric.decreciente$$

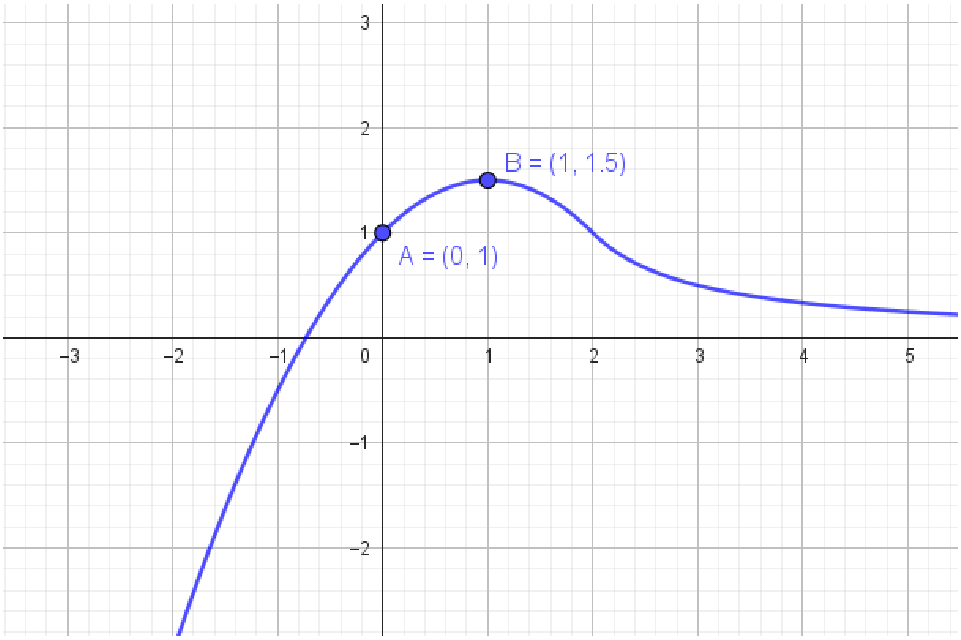
Para dibujar la gráfica, estudiamos la parábola del primer tramo de la función:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1 \to coeficiente\ líder\ negativo \to parábola\ cóncava$$

$$Corte\ con\ los\ ejes: (0{,}1), \left(1-\sqrt{3},0\right), \left(1+\sqrt{3},0\right)$$

$$Vértice: \left(1,\frac{3}{2}\right) \to máximo\ relativo$$

La gráfica de la hipérbola del segundo tramo es un desplazamiento horizontal hacia la derecha de la función bien conocida $y = 1/x$. Aparece una AH en la recta horizontal $y = 0$.



PROBLEMA 5

Sea la función

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x^2+ax-1 & si \;\; x\le 1 \\ \dfrac{b}{x} & si \;\; 1<x\le 3 \\ \dfrac{x-a}{3} & si \;\; x>3 \end{cases}}$$

Con a y b números reales.

a) Determine los valores a y b para que la función sea continua. Para dichos valores, estudia la derivabilidad de la función.

b) Para $a=5$ y $b=2$, represente el recinto limitado por la gráfica de la función, las rectas $x=2$, $x=4$ y el eje OX.

a) Trabajando con los intervalos abiertos, en el primer tramo tenemos un polinomio de grado dos. Es continua en toda la recta real. Por lo tanto, continua a la izquierda de $x=1$.

En el segundo tramo encontramos una hipérbola cuyo denominador solo se anula en $x=0$. Por lo que la función es continua en el intervalo $(1,3)$.

Y en el tercer tramo aparece un polinomio de grado uno. Por lo que la función es continua a la derecha de $x=3$.

Estudiamos la continuidad en los dos puntos frontera. En $x=1$:

$$f(1)=1+a-1\to f(1)=a$$

$$L^-=L^+=L$$

$$L^-=\lim_{x\to(1)^-}(x^2+ax-1)=evaluar=a$$

$$L^+=\lim_{x\to(1)^+}\frac{b}{x}=evaluar=b$$

$$L^-=L^+\to a=b$$

$$f(1)=L\to a=b$$

En $x=3$:

$$f(3)=\frac{b}{3}$$

$$L^-=L^+=L$$

$$L^-=\lim_{x\to(3)^-}\frac{b}{x}=evaluar=\frac{b}{3}$$

$$L^+=\lim_{x\to(3)^+}\frac{x-a}{3}=evaluar=\frac{3-a}{3}$$

$$L^-=L^+\to\frac{b}{3}=\frac{3-a}{3}\to b=3-a\to a+b=3$$

$$f(3)=L\to\frac{b}{3}=\frac{b}{3}(Tautología)$$

Obtenemos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a=b \\ a+b=3 \end{cases}$$

Resolvemos:

$$a = \frac{3}{2}\ , b = \frac{3}{2}$$

Para estos valores, estudiamos la derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2} & si \quad x < 1 \\ \frac{-3/2}{x^2} & si \quad 1 < x < 3 \\ \frac{1}{3} & si \quad x > 3 \end{cases}$$

En el primer tramo aparece un polinomio de grado uno. Por lo que la función derivada es continua. Por lo que la función original es derivable a la izquierda de $x = 1$.

En el segundo tramo, el denominador solo se anula en $x = 0$. Por lo que la función es derivable en el intervalo $(1,3)$.

En el tercer tramo encontramos una función constante. Por lo que la función es derivable a la derecha de $x = 3$.

La derivabilidad en los puntos frontera exige que las derivadas laterales sean iguales. Es decir, para $x = 1$:

$$f'(1^-) = \lim_{x \to (1)^-} \left(2x + \frac{3}{2}\right) = evaluar = \frac{7}{2}$$
$$f'(1^+) = \lim_{x \to (1)^+} \left(\frac{-3/2}{x^2}\right) = evaluar = \frac{-3}{2}$$

La función no es derivable en $x = 1$ (punto anguloso).

En $x = 3$:

$$f'(3^-) = \lim_{x \to (3)^-} \left(\frac{-3/2}{x^2}\right) = evaluar = -\frac{1}{6}$$
$$f'(3^+) = \lim_{x \to (3)^+} \left(\frac{1}{3}\right) = evaluar = \frac{1}{3}$$

Las derivadas laterales no coinciden, por lo que la función no es derivable en $x = 3$.

b) Debemos representar la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x - 1 & si \quad x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & si \quad 1 < x \leq 3 \\ \frac{x-5}{3} & si \quad x > 3 \end{cases}$$

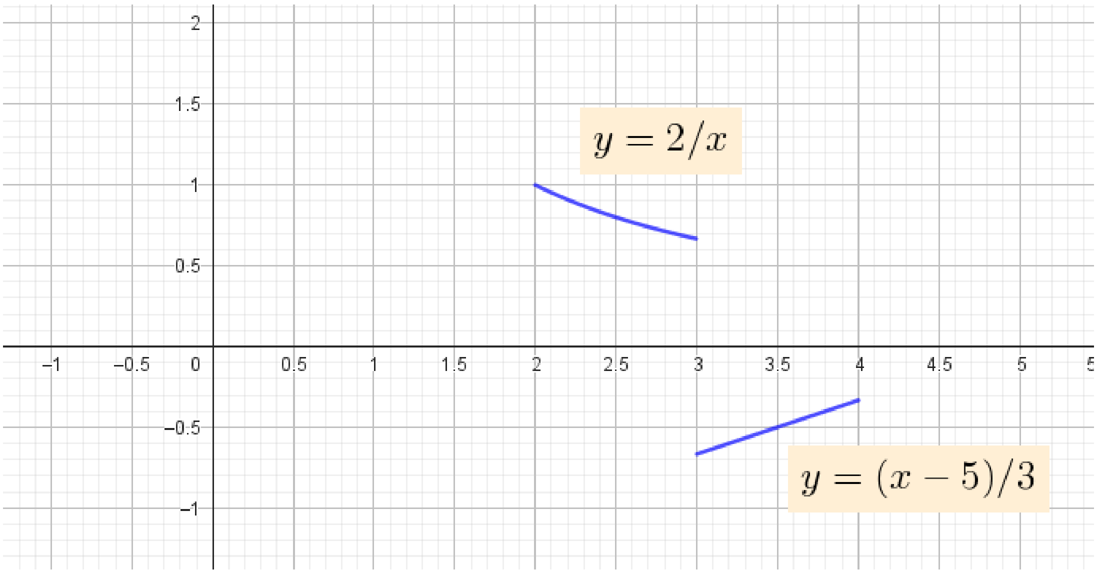
En el intervalo $[2,4]$. Por lo tanto, no necesitamos estudiar lo que pasa a la izquierda de $x = 1$.

Desde $x = 2$ hasta $x = 3$ tenemos una hipérbola. Y a partir de $x = 3$ encontramos una recta.

Justo en el punto frontera $x = 3$ tenemos las siguientes imágenes para ambas curvas:

$$y = \frac{2}{x} \to si\ x = 3 \to y = \frac{2}{3}$$
$$y = \frac{x-5}{3} \to si\ x = 3 \to y = -\frac{2}{3}$$

Por lo tanto, tendremos una discontinuidad no evitable de salto finito en el punto frontera x=3.



$y = 2/x$
$y = (x-5)/3$