2. Schnitt von Kugel und Zylinder

Der Kugelmittelpunkt werde als Koordinatenursprung gewählt. Die x-Achse treffe die Zylinderachse lotrecht im Punkt $(s|0|0)$ und die z-Achse verlaufe parallel zur Zylinderachse. Für die Radien R der Kugel und r des Zylinders findet man sodann die Gleichungen:

(I) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

(II) $(x - s)^2 + y^2 = r^2$

Aus der Subtraktion beider Gleichungen ergibt sich also:

$2s \cdot x = R^2 - r^2 + s^2 - z^2$

Der Fall $s = 0$ führt auf $z^2 = R^2 - r^2 + s^2$ und im Falle einer nicht-negativen rechten Seite auf $z = \pm\sqrt{R^2 - r^2 + s^2}$ sowie $x^2 + y^2 = r^2$. Parametrisiert man die Lösungskurve wieder in $y =: \eta$, so folgt:

$$\gamma(\eta) = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{r^2 - \eta^2} \\ \eta \\ \pm\sqrt{R^2 - r^2 + s^2} \end{pmatrix} \text{ mit } \eta \in [-r; r].$$

Der Fall $s \neq 0$ führt nach einer Parametrisierung der Lösungskurve in $z =: \zeta$ auf $x = \frac{1}{2s} \cdot (R^2 - r^2 + s^2 - \zeta^2)$ und $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - \zeta^2}$. Zwar vermag *geogebra* die Lösungskurven auch für *zu große* Definitionsbereiche darzustellen, es können sich dann aber leicht einmal Artefakte in die Grafik einschleichen. Aus Gleichung (I) ersieht man leicht, dass sich größte und kleinste Werte von z in den Lösungskurven für $y = 0$ ergeben; dann aber ist $x = s \pm r$ und $z^2_{max,min} = R^2 - (s \pm r)^2$.

Mit $\zeta_1 = \sqrt{max\{0; min\{R^2 - (s - r)^2; R^2 - (s + r)^2\}\}}$ und $\zeta_2 = \sqrt{max\{R^2 - (s - r)^2; R^2 - (s + r)^2\}}$ erhält man schließlich die Definitionsintervalle $[-\zeta_2; -\zeta_1]$ und $[\zeta_1; \zeta_2]$ für die Lösungskurve

$$\gamma(\zeta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2s} \cdot (R^2 - r^2 + s^2 - \zeta^2) \\ \pm\sqrt{R^2 - \frac{1}{4s^2} \cdot (R^2 - r^2 + s^2 - \zeta^2)^2 - \zeta^2} \\ \zeta \end{pmatrix}$$

Nachfolgend sind zwei exemplarische Schnitte gezeigt.