

## Corona: Mathematik und Modellbildung



Hans-Jürgen Elsenbroich  
MNU Nordrhein, Köln 8.9.2020

[www.geogebra.org/m/cfamtmpe](http://www.geogebra.org/m/cfamtmpe)

## Agenda

1. Exponentielles Wachstum
2. Logistisches Wachstum
3. Kennzahlen
4. Corona Modellierungen
5. Fazit

## 1. Exponentielles Wachstum

### 1. Zu Beginn ...

Die Corona-Pandemie und das Anwachsen der Infektionen waren spätestens ab Anfang-Mitte März 2020 aller Munde.

Oft wurde dabei von *exponentiellem Wachstum* gesprochen und als Veranschaulichung die Legende vom Erfinder des Schachspiels erzählt, was die Leser/ Zuhörer sehr beeindruckte.

### 1. Schachbrett-Legende

„Um die enorme Wucht zu veranschaulichen, die exponentielles Wachstum entfalten kann, wird häufig die Legende vom Erfinder des Schachspiels zitiert, der von einem indischen König erbat, in Reiskörnern entlohnt zu werden: Ein Korn für das erste Feld des Schachbretts und von da an immer doppelt so viele – zwei für das zweite Feld, vier für das dritte, acht für das vierte. Nichtsahnend willigte der König ein. Damit hätte er für das letzte Spielfeld eine neunzehnstellige Zahl an Reiskörnern auftreiben müssen, was der globalen Ernte mehrerer Jahrhunderte entspricht.“

*Süddeutsche Zeitung 10.3.2020*

### 1. Legende & Realität

Es stellt sich doch schnell ein merkwürdiges Gefühl ein. Die Legende kann nicht real sei, wenn das letzte Feld der globalen Ernte mehrerer Jahrhunderte entspricht.

Und wenn die Infektion sich tatsächlich dauerhaft exponentiell so steigern sollte, wäre in kurzer Zeit die ganze Menschheit erkrankt oder gestorben.

### 1. Exponentielles Wachstum $f(x) = 2^x$

### 1. Exponentielles Wachstum (?) in Südkorea

„In Südkorea: flacher Beginn, dann steil nach oben“ (Süddeutsche Zeitung 10.3.2020)

### 1. Exponentielles Wachstum ‚sehen‘

Es ist oft schwer, ein exponentielles Wachstum graphisch mit bloßem Auge zu erkennen. Wenn man die y-Achse logarithmisch skaliert, dann sieht eine Exponentialkurve wie eine Gerade aus.

Anmerkung: das geht mit Excel sehr einfach, mit GeoGebra leider (noch) nicht.

T-Online.de, 19.3.2020

### 2. Logistisches Wachstum

### 2. Natürliches Wachstum (1)

Dass die Infektionen aber nach einer kurzen Phase exponentiellen Wachstums schwächer verlaufen und schließlich abebben, ist durchaus bekannt.

Die dafür typische Kurve ist nicht die des ungebremsten exponentiellen Wachstums „nahezu senkrecht nach oben“, sondern eine S-Kurve des sogenannten logistischen Wachstums.

### 2. Natürliches Wachstum (2)

Die Wachstumskurve hat beim **Bestand** (hier Gesamtfizierte, math.: kumulierte Verteilung) eine S-Form: Bei der **Änderung** (hier Neuinfizierte, math.: Dichte) haben wir eine Glockenform.

Änderung und Bestand muss man klar auseinander halten. Wenn nur vage von 'Infizierten' gesprochen wird, kann es Missverständnisse geben.

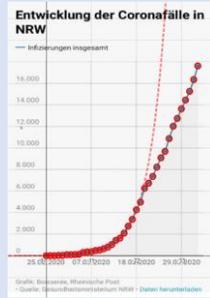
Analytisch ist die grüne kumulierte Kurve die Integralkurve der roten Kurve (bzw. umgekehrt Ableitung).

## 2. Reales Wachstum

Realitäts-Check: Entwicklung der Infektionen in NRW.

Zwar anfänglich exponentiell, ab dem 22. Tag der Messung aber offensichtlich nicht mehr!

Auf Basis einer Grafik der Rheinischen Post vom 24.3.2020

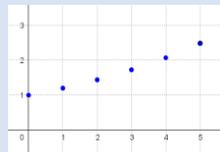


## 3. Kennzahlen

### 3. Verdopplungszeit

Eine wichtige Kennzahl ist die Verdopplungszeit D. Diese kann man jeweils näherungsweise experimentell ermitteln, wenn man den täglichen Wachstumsfaktor kennt.

- Bei einer täglichen Zunahme von 10% (Faktor 1.1) ist D etwas größer als 7.
- Bei einer täglichen Zunahme von 20% (Faktor 1.2) ist D etwas kleiner als 4.
- Bei einer täglichen Zunahme von 30% (Faktor 1.3) liegt D zwischen 2 und 3.



### 3. Verdopplungsrechner

Wenn man aus den Angaben, dass in d Tagen der Wert von a auf b gestiegen ist, die Verdopplungszeit D exakt berechnen will, muss man mit Exponential-Gleichungen und Logarithmen arbeiten.

Man erhält aus der Gleichung  $b = a \cdot 2^x$  die Lösung

$$x = \frac{\ln(b) - \ln(a)}{\ln(2)} \text{ und damit } d = D \cdot x$$

$$\text{Dann ist } D = \frac{d}{\frac{\ln(b) - \ln(a)}{\ln(2)}} = \frac{d \cdot \ln(2)}{\ln(b) - \ln(a)}$$

Verdopplungsrechner:



### 3. Monatliche Zunahme

Wie stark wächst ein Bestand in einem Monat (= 30 Tage), wenn die Verdopplungszeit bekannt ist?

- Verdopplung alle 30 Tage: Zunahme um den Faktor 2.
- Verdopplung alle 15 Tage: Zunahme um den Faktor 4.
- Verdopplung alle 10 Tage: Zunahme um den Faktor  $2^3 = 8$ .
- Verdopplung alle 5 Tage: Zunahme um den Faktor  $2^6 = 64$ .
- Verdopplung jeden Tag: Zunahme um den Faktor  $2^{30} = 10\,737\,418\,240$ .

### 3 Durchschnittlicher täglicher Wachstumsfaktor

- Bei der Ausbreitung in NRW sieht man, dass es vom 15.3. mit 2176 bis zum 18.3. mit 4366 in etwa eine Verdopplung gegeben hat. Die Verdopplungszeit beträgt also ziemlich genau 3 Tage. Wie groß muss dann in der Zeit der durchschnittliche tägliche Wachstumsfaktor sein?

Antwort:  $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$ . Also eine tägliche Zunahme von 26%.

- Vom 27.3. bis zum 2.4. steigt innerhalb von 5 Tagen die Anzahl von 12017 auf 17614. Berechnen Sie mit dem Verdopplungsrechner die Verdopplungszeit. Wie groß ist in dieser Zeit der durchschnittliche tägliche Wachstumsfaktor?

Antwort:  $D = 11 \cdot \sqrt[11]{2} \approx 1.065$ . Also eine tägliche Zunahme von 6.5%.

### 3 Reproduktionszahl (1)

In einer Rede vom 16.4.2020 sagte Bundeskanzlerin Angela Merkel, die Ärzte und Wissenschaftler haben ihre Berechnungen umgestellt und schauen nicht mehr auf die Verdopplungszeiten, sondern legen den Reproduktionsfaktor zugrunde.

Die Reproduktionszahl gibt an, wieviele Personen im statistischen Mittel von einer infektiösen Person angesteckt werden und zwar innerhalb der sogenannten Generationszeit (das Robert Koch Institut rechnet mit 4 Tagen).

Sie ist zeitabhängig (ändert sich z.B. durch die Infektionsschutz-Maßnahmen), der ursprüngliche Wert ist die Basis-Reproduktionszahl  $R_0$ .

### 3 Reproduktionszahl (2)

Bei der Corona-Pandemie Covid-19 lag sie in Deutschland zu Beginn über 3, ab Ende März lag die aktuelle Reproduktionszahl  $R$  nahe bei 1 und oft sogar unter 1.

- Ist die aktuelle Reproduktionszahl  $R > 1$ , nimmt die Zahl der Infektiösen weiter zu.
- Ist  $R = 1$ , bleibt sie gleich, es werden genausoviel Personen neu infiziert wie wieder gesundet sind (im Rahmen dessen, was man als infiziert diagnostiziert hat).
- Ist  $R < 1$ , nimmt die Zahl der Infektiösen ab.

### 3 Reproduktionszahl (3)

Wie wird diese Reproduktionszahl  $R$  statistisch ermittelt?

„Bei einer konstanten Generationszeit von 4 Tagen, ergibt sich  $R$  als *Quotient* der Anzahl von Neuerkrankungen in zwei aufeinander folgenden Zeitabschnitten von jeweils 4 Tagen.

Der so ermittelte  $R$ -Wert wird dem letzten dieser 8 Tage zugeordnet, weil erst dann die gesamte Information vorhanden ist. Daher beschreibt dieser  $R$ -Wert keinen einzelnen Tag, sondern ein Intervall von 4 Tagen.“ (Robert Koch Institut).

### 3 Reproduktionszahl (4)

Welchen Wachstumsfaktor hat man bei  $R = 1.3$  in einem Zeitraum von 12 Tagen, also 3 Generationszeiten?

Antwort: Wachstumsfaktor für 12 Tage =  $1.3^3 \approx 2.2$ .

Die Reproduktionszahl  $R$  wird oft fälschlich mit dem täglichen Wachstumsfaktor verwechselt.

Welchen täglichen Wachstumsfaktor hat man bei  $R = 1.3$ ?

Antwort: Täglicher Wachstumsfaktor =  $\sqrt[3]{R} = \sqrt[3]{1.3} \approx 1.07$ .

D.h. Zunahme täglich um 7 %.

### 3 Die 7-Tage-Inzidenz

Der Präsident des RKI, Prof. Wieler, sagt am 28.4.20 in der Tagesschau, eine Reproduktionszahl 1 sei allein nicht aussagekräftig.

Sie müsste beispielsweise ganz anders bewertet werden, wenn es täglich 50.000 Neuinfektionen in Deutschland gebe. Daraufhin brachte er eine neue Kennzahl ins Spiel: die kumulierten Neuinfektionen der vergangenen 7 Tage, auch *7-Tage-Inzidenz* genannt.

Am 6. Mai wurde dann beschlossen, dass die kritische Grenze bei 50 pro 100 000 Einwohner liegen soll.

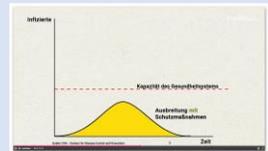
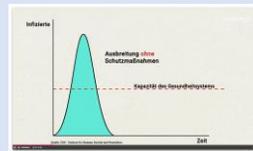
## 4. Corona Modellierungen

#### 4 Das ‚Spahn-Modell‘



Pressekonferenz 10.3.2020.  
 Gesundheitsminister Spahn mit Prof. Drosten.  
 Was ist an dieser Skizze nicht stimmig?

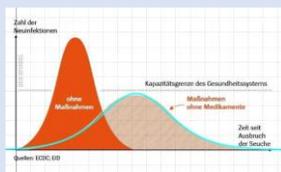
#### 4 Das ‚CDC-Modell‘



T-Online.de, 13.3.2020

Modell-Annahme? Gleiche Anzahl der Infizierten?

#### 4 Das ‚Spiegel-Modell‘



Spiegel.de, 11.3.2020

#### 4 Das SIR-Modell

Das **SIR-Modell** (*susceptible – infected - removed model*) ist ein einfaches, seit fast 100 Jahren bekanntes Modell zur Beschreibung der Ausbreitung von ansteckenden Krankheiten mit Immunitätsbildung.

*Susceptible: gesund und für Infektionen empfänglich*

*Infected: infiziert*

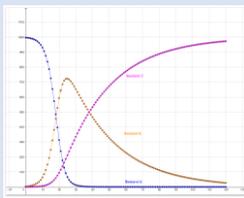
*Removed, aus dem Infektionsgeschehen ausgeschieden, d.h. immun oder tot*

In der einfachsten Version werden allgemeine Sterberaten und Geburtsraten außer Acht gelassen.  $\beta$  ist die Übertragungsrate,  $\gamma$  ist die Gesundungsrate, sie ist als Kehrwert  $1/\gamma$  die mittlere infektiöse Zeit.

<https://de.wikipedia.org/wiki/SIR-Modell>

#### 4 Das SIR-Modell

Realisierung mit dem **Kumulator**.  
 Start-A = 997, Start-B = 3, Start-C = 0. N = 1000.



#### 4 Weitere SIR-Modelle

Es gibt weitere verfeinerte SIR-Modelle mit 4 Zuständen (SEIR, SIRD).

Generell: Modellierungen vereinfachen!

Sehr einfache Modelle wie SIR sind für die Schule gut geeignet, um Wirkungen von Parameter-Variationen zu erkennen und zu verstehen.

Je realitätsnäher die Modelle werden, desto komplexer.

## 5. Fazit

## 5. Fazit

- Die Veröffentlichungen zur Corona-Pandemie bieten bei den Kennzahlen eine Vielzahl von realitätsnahen mathematischen Aspekten, die man ohne weiteres auch auf Mittelstufen-Niveau behandeln kann. GeoGebra kann dabei hilfreich sein (wie jeder wissenschaftliche TR auch).
- Die diversen Verteilungskurven geben Anlass zur kritisch konstruktiven Untersuchung, wenn man sich darauf einlässt, GeoGebra als mächtiges Werkzeug und auch als black box zu nutzen.

## Literatur

- Elschenbroich, Hans-Jürgen (2020): Mathematik und Corona-Infektionen. In: [MNU Journal 3/2020](#)
- Elschenbroich, Hans-Jürgen (2020): Corona: Mathematik und Modellbildung. [GeoGebra Book](#)

*Hinweis: Dort finden Sie auch weitere Quellenangaben.*

## Kontakt

[elschenbroich@t-online.de](mailto:elschenbroich@t-online.de)