

## Zur Zuverlässigkeit von Corona-Tests



---

HANS-JÜRGEN ELSCHENBROICH

---

Ende 2020 gab es eine öffentliche Diskussion über die Zuverlässigkeit von Tests auf Covid-19 („Corona“). In diesem Beitrag werden die entsprechenden fachlichen Begriffe wie Spezifität, Sensitivität und Prävalenz und ihr Zusammenspiel geklärt und ein Modellrechner vorgestellt. Damit hat man auch das Rüstzeug, sich faktenbasiert mit der Thematik zu beschäftigen, von der Diskussion über massenhaftes Testen bis hin zu den Ideen der ‚Querdenken‘-Bewegung.

### 1 Begriffsklärungen

Es gibt verschiedene Tests auf die Covid-19 Infektion, in Deutschland meist ‚Corona‘ genannt, die mehr oder weniger

genaue Ergebnisse liefern. Öffentlich bekannt wurde zum Beispiel, dass ELON MUSK bei einem Besuch in Brandenburg am 16.11.2020 bei vier Schnelltests zwei positive und zwei negative Ergebnisse bekam. Das veranlasste MUSK zu der Twitter-

Nachricht: „Irgendein extremer Schwindel passiert da“ (Futurezone, 2020). Und bei den PCR Tests kam ein bayerisches Labor in die Schlagzeilen, als herauskam, dass von 60 positiven Testergebnissen sage und schreibe 58 falsch-positiv waren (Münchener Zeitungs-Verlag, 2020). Das soll Anlass sein, sich genauer mit Tests und möglichen Fehlern zu beschäftigen.

### 1.1 Arten der Covid-19 Tests

Der gängige Test ist der CT-PCR Test. PCR steht für die englische Bezeichnung Polymerase Chain Reaction, auf Deutsch Polymerasekettenreaktion. Hierbei werden in mehreren Durchläufen DNA-Sequenzen vermehrt. CT steht für die Zahl der Zyklen (Cycle Threshold), die durchlaufen wurden, bis Virus DNA feststellbar ist. Je mehr Viren, desto kleiner ist CT. Ein hoher CT Wert bedeutet dann eine geringe Zahl an Viren (Westdeutscher Rundfunk Köln, 2020). Diese PCR Tests sind aufwändig, teuer und dauern mehrere Tage.

Seit kurzem gibt es daneben Antigen-Schnelltests, die statt der Suche nach Virus-DNA untersuchen, ob man Antikörper identifizieren kann. Solche Tests sind einfacher zu handhaben, deutlich schneller und erheblich günstiger, aber auch in gewisser Weise weniger genauer.

Grundsätzlich können bei allen Tests zwei Arten von Fehlern auftreten, die weiter untersucht werden sollen. Wie verlässlich ein Testverfahren ist, wird zunächst durch zwei Parameter angegeben: Sensitivität und Spezifität.

### 1.2 Spezifität und Sensitivität von Tests

Die Spezifität gibt an, bei wieviel Prozent der Gesunden ein Test eine gesunde Person auch als gesund erkennt (Testergebnis ‚negativ‘). Je spezifischer ein Test ist, desto genauer kann er Nicht-Infizierte auch korrekt als negativ identifizieren. Die Spezifität kann man als die Richtig-Negativ-Quote ansehen. Ein Test mit einer Spezifität von 95% liefert also bei 95 von 100 gesunden Menschen ein korrektes negatives Ergebnis. Bei fünf Gesunden schlägt der Test aber trotzdem an und diagnostiziert sie fälschlicherweise als infiziert. Sie haben dann ein falsch-positives Ergebnis, was bedeutet, dass die betroffene Person zu Unrecht in Quarantäne muss.

Die Sensitivität eines Tests gibt an, bei wieviel Prozent der Infizierten ein Test die Infektion auch wirklich erkennt (Testergebnis ‚positiv‘). Je sensitiver ein Test ist, desto genauer kann er infizierte Personen auch korrekt als positiv identifizieren. Die Sensitivität kann man als die Richtig-Positiv-Quote ansehen. Ein Test mit einer Sensitivität von 98% identifiziert z. B. 98 von 100 Infektionen, aber zwei Personen haben ein falsch-negatives Ergebnis, obwohl sie infiziert sind. Das bedeutet, dass jemand unerkannt weiter infektiös unterwegs ist und Mitmenschen ansteckt.

Die Test-Hersteller geben für PCR-Tests diese Werte gerne mit 99,9% oder gar 100% an, die aber bestenfalls unter optimalen Laborbedingungen gelten. Für Spezifität und Sensitivität gibt es für PCR Tests empirische Mittelwerte. Die Gesell-

schaft zur Förderung der Qualitätssicherung in medizinischen Laboratorien hat für PCR-Testungen in 488 Laboren aus 36 Ländern eine Sensitivität von 99,3% und eine Spezifität von 98,2% ermittelt (Westdeutscher Rundfunk Köln, 2020). Mit einer Sensitivität von 99% und einer Spezifität von 98% werden in Abschnitt 2 Modellrechnungen durchgeführt.

### 1.3 Prävalenz

Eine entscheidende Rolle spielt die sogenannte Vortestwahrscheinlichkeit (Prävalenz). Würde man die ganze Gesellschaft testen (Durchseuchungsgrad vermutlich zwischen 1% und 3%), gibt es andere Ergebnisse, als wenn man nur Personen mit Symptomen testen würde, von denen ca. 10% bis 50% tatsächlich infiziert sind. Das erscheint erst mal überraschend, kann aber mit den Modellrechnungen aufgezeigt und verstanden werden (FRÖHLICH, 2020).

### 1.4 Positiv prädiktiver Wert

Wichtig ist weiter zu wissen bzw. einschätzen zu können, wie groß die Wahrscheinlichkeit für einen Einzelnen ist, nach einem positiven Testergebnis tatsächlich infiziert zu sein (positiv prädiktiver Wert *PPW*) bzw. nach einem negativen Testergebnis tatsächlich nicht infiziert zu sein (negativ prädiktiver Wert *NPW*). Es geht also populär gesagt um die Trefferquote, die Zuverlässigkeit und die Aussagekraft der Testergebnisse positiv bzw. negativ. Das wird manchmal mit dem Wert für Spezifität bzw. Sensitivität verwechselt, ist aber komplizierter. Mathematisch geht es dabei um bedingte Wahrscheinlichkeiten und deren Berechnungen nach dem Satz von BAYES. Das ist nicht ganz leicht zu durchschauen. Verständlicher wird es, wenn man in einer sogenannten Vierfelder-Tabelle mit absoluten Häufigkeiten rechnet und erst am Ende daraus die Wahrscheinlichkeiten für *PPW* und *NPW* berechnet (mailLab, 2020).

## 2 Mathematische Hintergründe und Modellrechnungen

Bei 10 000 Personen, davon 100 krank, also bei einer Prävalenz von 1%, erhält man bei einer Spezifität von 98% und einer Sensitivität von 99% die Werte  $PPW = \frac{99}{297} \approx 33,33\%$  und  $NPW = \frac{9702}{9703} \approx 99,99\%$  (Abb. 1). Das bedeutet, es ist hier also

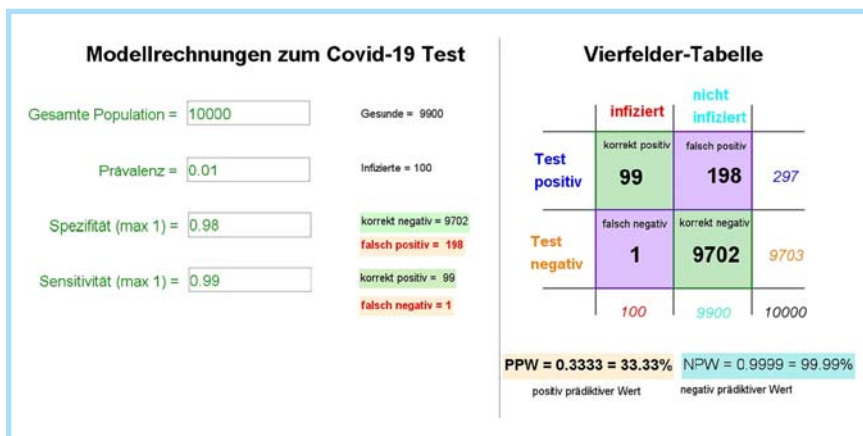


Abb. 1. Modellrechner 1 mit Vierfelder-Tabelle, Prävalenz 0.01

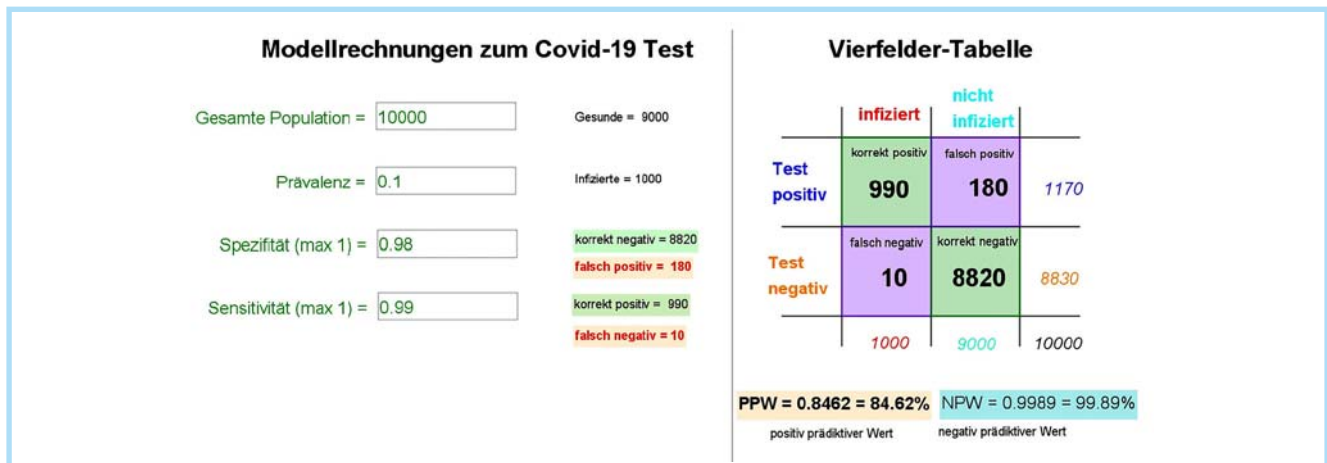


Abb. 2. Modellrechner 1 mit erhöhter Prävalenz von 0,1

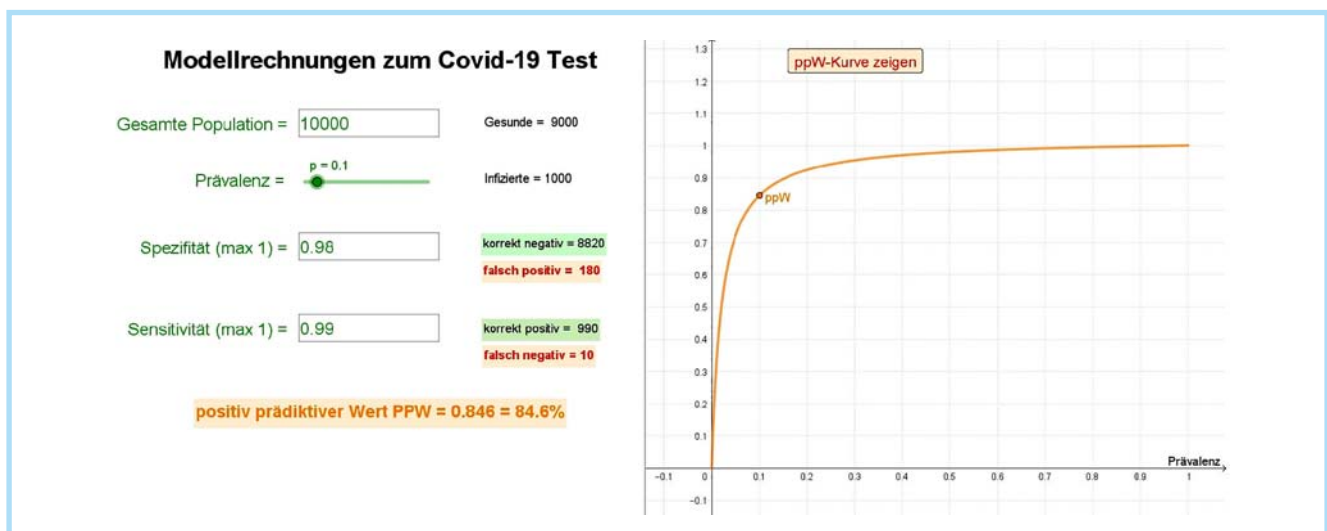


Abb. 3. Modellrechner 2 mit ppW-Kurve

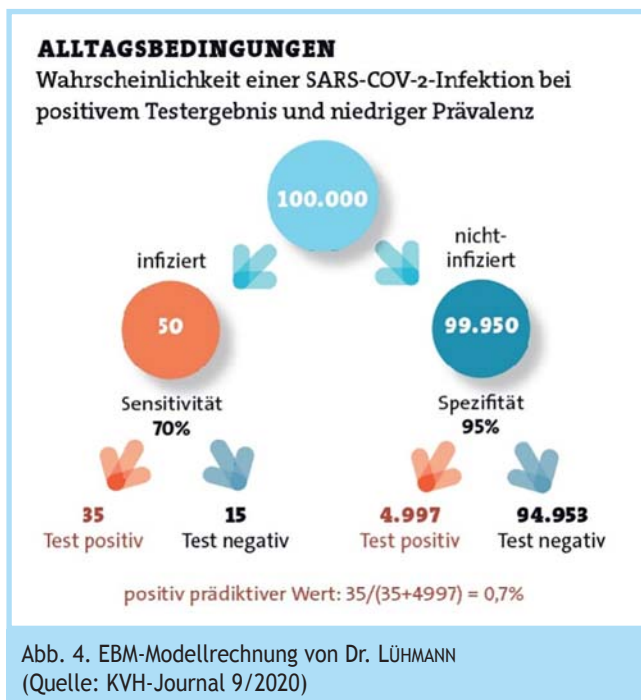


Abb. 4. EBM-Modellrechnung von Dr. LÜHMANN (Quelle: KVH-Journal 9/2020)

nur ein Drittel der Personen mit positivem Testergebnis tatsächlich infiziert.

Dies ändert sich grundlegend, wenn bei einer Prävalenz von 10% oder höher getestet wird. Hier ist schon bei fast 85% der positiv Getesteten zu erwarten, dass sie tatsächlich positiv sind (Abb. 2).

Um dies besser verstehen zu können, kann man den PPW Wert abhängig von der Prävalenz  $p$  (mit festgehaltenen Wert für Spezifität und Sensitivität) berechnen. Mit GeoGebra ist es möglich, den Punkt  $ppW(p | PPW)$  in einem Koordinatensystem darzustellen und die funktionale Abhängigkeit durch eine Ortslinie zu visualisieren (Abb. 3).

Man sieht, dass diese Kurve nahe im Ursprung sehr steil ansteigt und ab einer Prävalenz von 8% im Beispiel über 80% der positiv Getesteten auch tatsächlich infiziert sind. Bei anderen Parametern für Spezifität und Sensitivität ändert sich diese Kurve geringfügig, behält aber ihr charakteristisches Verhalten.

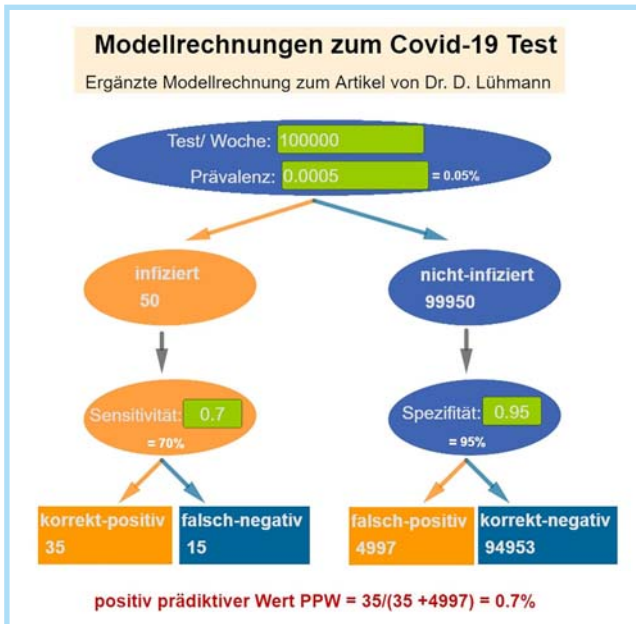


Abb. 5. Modellrechner 3 in der Struktur und mit den Parametern von Dr. LÜHMANN

### 3 Mathematische Argumentationen im Internet

#### 3.1 EBM-Artikel von Dr. LÜHMANN

Im September 2020 gab es eine Modellrechnung von Dr. DAGMAR LÜHMANN, Vizevorsitzende des Netzwerks Evidenzbasierte Medizin (EBM) (LÜHMANN, 2020). Die Prävalenz taucht hier versteckt in der nicht weiter erläuterten Annahme von 50 Infizierten auf 100 000 auf, was einer Prävalenz von 0,05 % entspricht (Abb. 4). Im gleichen Artikel ist aber an anderer Stelle davon die Rede, dass in einer normalen Hausarztpraxis mit einer Prävalenz von 3 % zu rechnen sei. Das ist schlichtweg das 60-fache. In einer weiteren Version des Modellrechners kann man der Struktur von Dr. LÜHMANN folgend ihre Rechnungen nachempfinden und diese dann auch mit anderen Startparametern durchführen, insbesondere für die Prävalenz (Abb. 5). Da sie unkommentiert und ausschließlich mit einer ausgesprochen niedrigen Annahme der Prävalenz von 0,05 % arbeitet,

steht sie in der Kritik, gewollt oder ungewollt zum Wegbereiter der Querdenken-Verschwörungsideologen zu werden. Wenngleich ihre Startwerte sehr ‚speziell‘ sind, kann man sich dem Schluss ihres Artikels durchaus anschließen: „Test, test, test. Test every suspected case ...“. Beim anlasslosen Testen hingegen wird man immer und zwangsläufig falsch-positive Ergebnisse produzieren, und zwar umso mehr, je geringer die Prävalenz ist.

In den Abbildungen 4 und 5 wurden Darstellungen benutzt, die im üblichen Schulunterricht mal mehr, mal weniger gebräuchlich sind. Die Vierfelder-Tabelle mit absoluten Häufigkeiten kommt in Schulbüchern durchaus vor und erklärt sich selber. Die gebräuchlichste Darstellung in der Schule ist das Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten an den Pfaden, meist ohne absolute Zahlen. Die Darstellung von Dr. LÜHMANN ähnelt dem schultypischen Baumdiagramm, arbeitet aber ausschließlich mit absoluten Häufigkeiten.

Es ist interessant zu untersuchen, wo sich im Baumdiagramm (Abb. 6) der positiv prädiktive Wert  $PPW$  verorten lässt. Es handelt sich um die bedingte Wahrscheinlichkeit  $p_+(I)$ , die nach dem Satz von BAYES berechnet werden kann als

$$PPW = p_+(I) = \frac{990}{990 + 180} = 0.8462 = 84.62\%$$

und im invertierten Baumdiagramm an den unteren Verzweigungen auftaucht, während Prävalenz, Spezifität und Sensitivität im normalen Baumdiagramm als Wahrscheinlichkeiten auftauchen. In den Baumdiagrammen kann man die absoluten Häufigkeiten anzeigen lassen. Dann tauchen in der unteren Ebene die Werte auf, die in der Vierfelder-Tabelle die inneren Felder belegen.

#### 3.2 Querdenken-Flugblatt

Ende Oktober gab es eine bundesweite Flugblatt Aktion der Querdenken-Bewegung (Abb. 7), verantwortlich laut Impressum Dr. BODO SCHIFFMANN. Hier wurden in seiner Modellrechnung 500 Infizierte auf 1 000 000 angenommen (SCHIFFMANN, 2020). Damit kommt Dr. SCHIFFMANN auf Werte, die einen zunächst erschrecken (und erschrecken sollen), 490 korrekt-positiv, 9995 falsch-positiv).

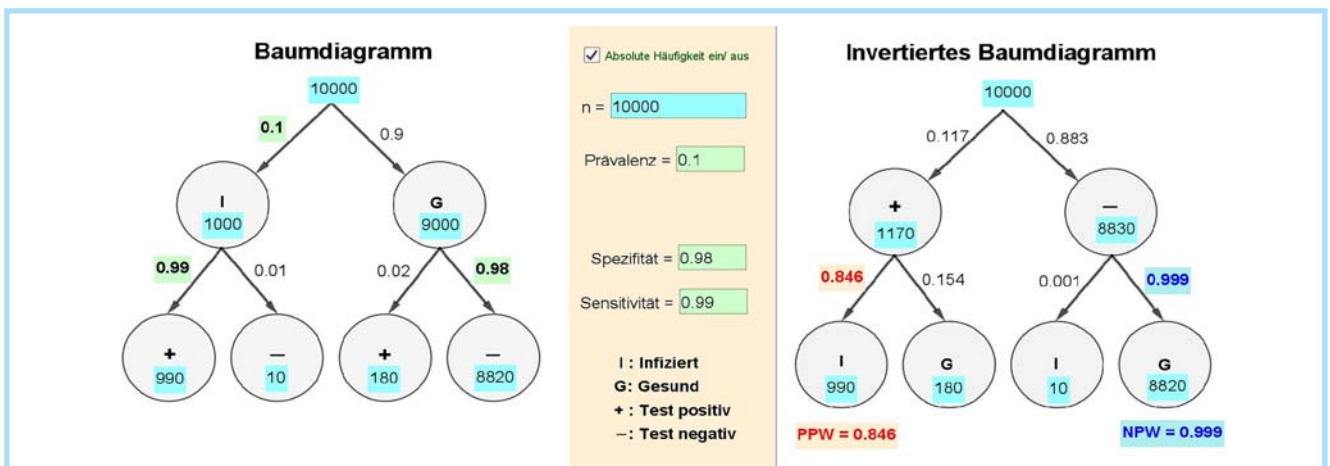


Abb. 6. Baumdiagramm und invertiertes Baumdiagramm, Prävalenz 0,1



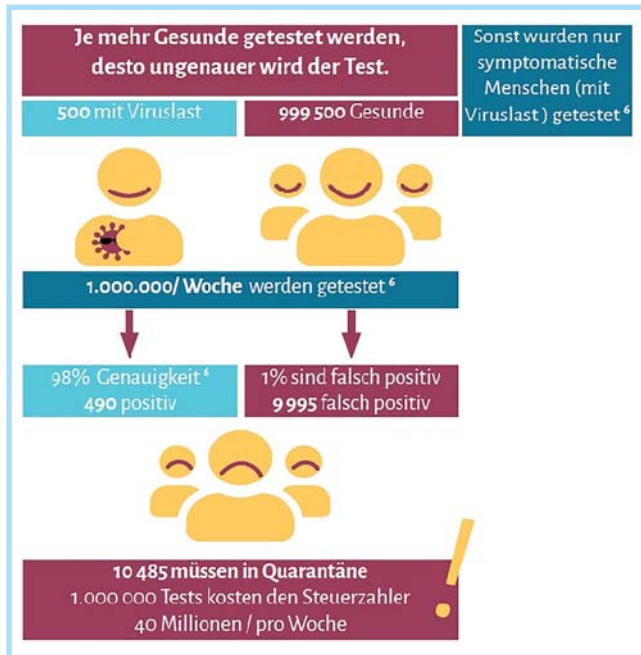


Abb. 7. Modellrechnung von Dr. SCHIFFMANN aus dem Flugblatt

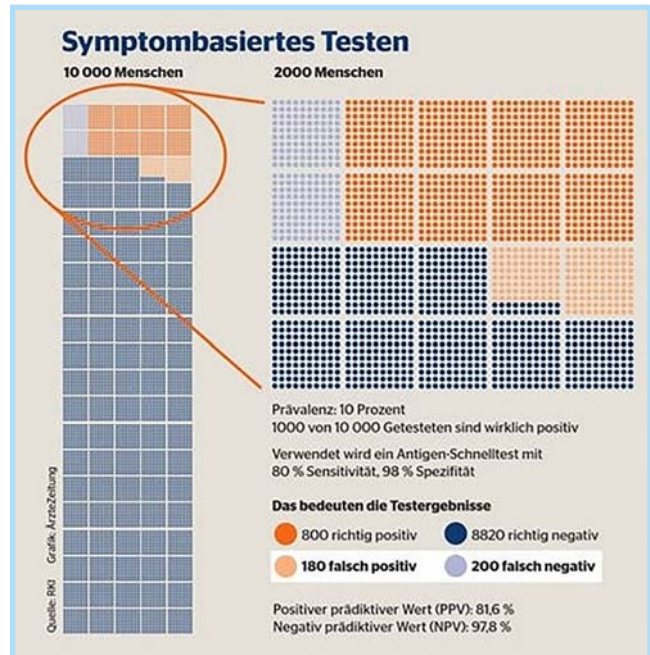


Abb. 9. Modellrechnung ÄrzteZeitung

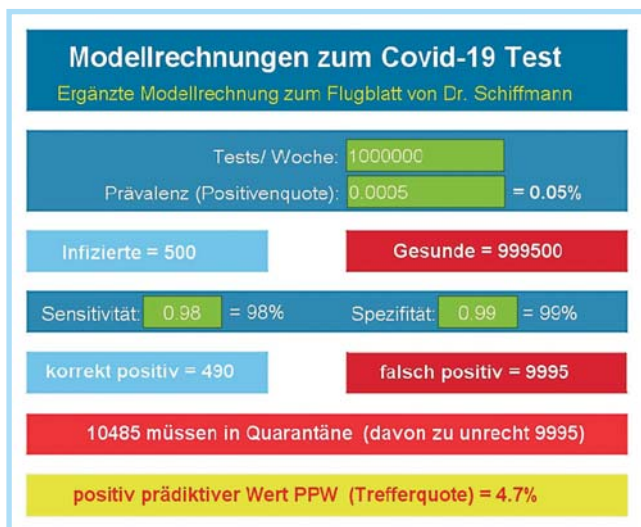


Abb. 8. Modellrechner 4 in der Struktur und mit den Parametern von Dr. SCHIFFMANN

Das Flugblatt ist ‚wissenschaftlich‘ aufgemacht, die Rechnungen sind für sich gesehen korrekt. Wo ist dann der Haken? Er ist gut versteckt in der Annahme von 500 Infizierten auf 1 000 000. Denn das ist – wie bei Dr. LÜHMANN – eine Prävalenz von 0,05 %. Mit dieser sehr niedrigen Modellannahme kommt Dr. SCHIFFMANN dann zu extremen Ergebnissen (PPW unter 5 %), die entsprechend politisch ausgeschlachtet werden. In einer weiteren Version des Modellrechners kann man nun in der Struktur von Dr. SCHIFFMANN seine Rechnungen nachempfinden (Abb. 8) und vor allem mit anderen Startparametern durchführen.

### 3.3 Modellrechnung der ÄrzteZeitung zur Zuverlässigkeit von Antigen-Schnelltests

Grundsätzlich gelten die oben angestellten Überlegungen für PCR-Tests auch für die neuen Antigen-Schnelltests, nur dass die

Parameter etwas anders sind. Die Hersteller der Antigen-Tests geben selber gerne Sensitivitäten von 90 % bis 98 % und Spezifitäten von 98 % bis 100 % an. Dazu muss man aber wissen, dass diese Angaben sich auf Proben beziehen, die laut PCR-Test alle positiv waren und die unter optimalen Laborbedingungen untersucht worden sind. In der Praxis enthalten jedoch nur rund 80 % aller Proben von infizierten Personen auch tatsächlich das Virus, zum Beispiel aufgrund von Fehlern beim Abstrich. Daher wird die maximale klinische Sensitivität in der Regel konservativer geschätzt mit 80 Prozent (maiLab, 2020).

Bei Antigen-Schnelltests verschiedener Hersteller sind dann auch laut einer empirischen Untersuchung Sensitivitäten von 29,7 bis 79,8 Prozent und Spezifitäten von 98,8 bis 99,9 Prozent festgestellt worden (LEUKER, LEIN, ANTÃO, VON KLEIST & JENNY, 2020). Die ÄrzteZeitung stellt eine Modellrechnung für einen Schnelltest mit einer Prävalenz von 10 % (d. h. symptombasiertes Testen) dar (Abb. 9), setzt die Sensitivität auf 80 % und die Spezifität auf 98 % und kommt dann auf PPW = 81,6 % (LEUKER et al., 2020).

Es sei noch erwähnt, dass man bei einer angenommenen Prävalenz von 0.05 % in einem anlasslosen Testen (wie Dr. LÜHMANN) auch PPW = 1,9 % erhält. Also nur bei knapp 2 von 100 positiven Tests ist das Ergebnis zurecht positiv, in 98 Fällen liegt der Schnelltest daneben. Die ÄrzteZeitung verwendet sogenannte Icon Arrays als Darstellung (Abb. 9), in denen mit absoluten Häufigkeiten gearbeitet wird. Dies wird als eine neue Visualisierung bezeichnet, geeignet für „Personen, die Probleme im Umgang mit Zahlen haben – und für Personen mit geringem Interesse an numerischen Informationen“ (LEUKER et al., 2020) (sind damit etwa die Ärzte, an die sich der Artikel richtet, gemeint?). Dies ist aber nichts anderes als eine spezielle Form des in Excel seit Jahrzehnten bekannten Diagrammtyps Gestapelte Säulen.

Es ist noch eine Besonderheit der Antigen-Schnelltests bekannt: Der PPW ist nicht gleichverteilt. Wenn die Viruslast sehr hoch ist, erhöht sich die Trefferquote deutlich und nimmt bei geringer Viruslast entsprechend rasant ab. Auf T-Online war zum

Aspekt der Genauigkeit von Schnelltests verallgemeinernd zu lesen: „Wenn der Test also positiv ausfällt, ist die Testperson mit ziemlicher Sicherheit infiziert“ (WEINER & SAGENER, 2020). Das ist in der Allgemeinheit so nicht zutreffend, insbesondere weil man bei der Durchführung des Tests ja nicht weiß, ob die Testperson eine hohe Viruslast hat. Man kann wohl andersherum mit Blick auf den NPW sagen: Wenn der Test negativ ist, ist die Testperson mit ziemlicher Sicherheit nicht infiziert, d. h. für den Preis einer hohen Fehlerquote bei den positiven Ergebnissen kann man die Personen mit negativem Ergebnis ziemlich zuverlässig in eine Veranstaltung, in ein Flugzeug, in ein Altersheim oder Krankenhaus lassen.

#### 4 Fazit

In Politiker-Reden werden jetzt häufig Massentestungen gefordert und damit die Hoffnung verbunden, alle Infizierten durch positive Testergebnisse zu finden. Bei einer geringen Prävalenz bekommt man aber zwangsläufig eine relevante Zahl von falsch-positiven Ergebnissen, die wegen hoher Werte von Spezifität und Sensitivität falsch eingeschätzt wird und zu sehr schlechten PPW Werten führt.

„Bei Massentests, also bei niedriger Prävalenz, werden viele falsch positive Testergebnisse mit SARS-CoV-2-Antigen-Schnelltests erzeugt. Dagegen sind positive Testresultate bei gezielterem Testen (etwa von symptomatischen Personen), also bei höherer Prävalenz, verlässlicher.“ (LEUKER et al., 2020)

Die aktuelle Krise der Covid-19 Pandemie bringt eine Fülle an mathematischen Fragen und Problemen mit sich, die der Mathematikunterricht aufgreifen kann und sollte. Neben den meist dominierenden fachlichen Aspekten hat der Mathematikunterricht auch eine allgemeinbildende und eine demokratische Aufgabe. MARTIN WAGENSCHNIGER postulierte in einem berühmten Zitat, das „Verstehen des Verstehbaren ist ein Menschenrecht“ und Heinrich Winter betonte: „Interessant und wirklich unentbehrlich für Allgemeinbildung sind Anwendungen der Mathematik erst, wenn in Beispielen aus dem gelebten Leben erfahren wird, wie mathematische Modellbildung funktioniert und welche Art von Aufklärung durch sie zustande kommen kann, und Aufklärung ist Bürgerrecht und Bürgerpflicht“ (WINTER, 1995). In diesem Sinne möchte dieser Artikel dazu einen kleinen Beitrag leisten.

Die verwendeten Modellrechner und weitere Informationen werden im GeoGebra Book ‚Zuverlässigkeit von Covid-Tests‘ (ELSCHENBROICH, 2020a), weitere Aspekte und Aufgaben im GeoGebra Book ‚Corona: Mathematik und Modellbildung‘ (ELSCHENBROICH, 2020b) angeboten.

#### Literatur

ELSCHENBROICH, H.-J. (2020a). *Zuverlässigkeit von Covid-Tests*. GeoGebra Book. <https://www.geogebra.org/m/yf9szkan> (22.12.2020).

ELSCHENBROICH, H.-J. (2020b). *Corona: Mathematik & Modellbildung*. GeoGebra Book. <https://www.geogebra.org/m/cfamtppe> (22.12.2020).

FRÖHLICH, K. (2020). *Wie zuverlässig ist der PCR-Test auf Corona?* <https://www.mdr.de/wissen/wie-zuverlaessig-sind-corona-tests-100.html> (22.12.2020).

Futurezone GmbH (2020). *Musk nach Beschwerde über Corona-Schnelltest zurechtgestutzt*. <https://futurezone.at/digital-life/elon-musk-nach-beschwerde-ueber-corona-schnelltest-zurechtgestutzt/401099865> (22.12.2020).

LEUKER, C., LEIN, I., ANTÃO, E., VON KLEIST, M. & JENNY, M. (2020). *Corona-Schnelltests – die Prävalenz macht's!* ÄrzteZeitung. <https://www.aerztezeitung.de/Wirtschaft/Corona-Schnelltests-die-Prävalenz-machts-414743.html> (22.12.2020).

LÜHMANN, D. (2020). *Anlassloses Testen auf SARS-Cov-2*. *KVH- Journal* 9/2020, 28-30. [https://www.ebm-netzwerk.de/de/medien/pdf/ebm-9\\_20\\_kvh\\_journal\\_anlassloses-testen.pdf](https://www.ebm-netzwerk.de/de/medien/pdf/ebm-9_20_kvh_journal_anlassloses-testen.pdf) (22.12.2020).

mailLab (2020). *Test positiv*. <https://www.youtube.com/watch?v=czzrPQlg54Q&feature=youtu.be> (22.12.2020).

Münchener Zeitungs-Verlag (2020). *Vorfall in bayerischer Klinik: Von 60-Positiv-Ergebnissen doch 58 negativ – Labor-Chefin nennt Gründe*. <https://www.merkur.de/bayern/coronavirus-bayern-corona-tests-pcr-amper-panne-klinik-isar-ergebnisse-taufkirchen-zr-90082728.html> (22.12.2020).

SCHIFFMANN, B. (2020). *Mach dich schlau - Werde aktiv! Bundesweites Flugblatt*. [https://coronainfo-tour.de/media/files/coronas-scharfe-kurven\\_beidseitig\\_a4.pdf](https://coronainfo-tour.de/media/files/coronas-scharfe-kurven_beidseitig_a4.pdf) (22.12.2020).

WEINER, M. & SAGENER, N. (2020). *Wie zuverlässig sind die Corona-Schnelltests?* [https://www.t-online.de/gesundheit/krankheiten-symptome/id\\_88584896/risiko-falsch-positiver-corona-tests-wie-zuverlaessig-sind-die-schnelltests-.html](https://www.t-online.de/gesundheit/krankheiten-symptome/id_88584896/risiko-falsch-positiver-corona-tests-wie-zuverlaessig-sind-die-schnelltests-.html) (22.12.2020).

Westdeutscher Rundfunk Köln (2020). *Corona-Test: Welche Tests es gibt und wie zuverlässig sie sind*. <https://www.quarks.de/gesundheit/medizin/corona-test-wie-funktioniert-der-test/> (22.12.2020).

WINTER, H. (1995). *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung*. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, 37-46.

HANS-JÜRGEN ELSCHENBROICH, [hans-juergen.elschenbroich@mnu.de](mailto:hans-juergen.elschenbroich@mnu.de), war Lehrer für Mathematik und Informatik, Fachleiter am Studienseminar, Medienberater sowie Fachreferent Mathematik im MNU-Bundesvorstand. ■