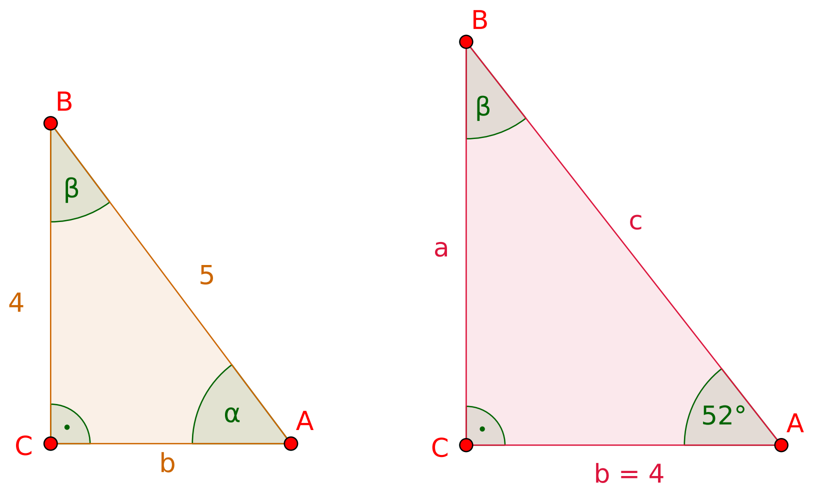
Goniometrické funkce v pravoúhlém Δ

Tangens a kotangens

Žán Pól Kastról

23. října 2021



(a) Umím b, ale neumím α a β

(b) Umím β, ale neumím a a c

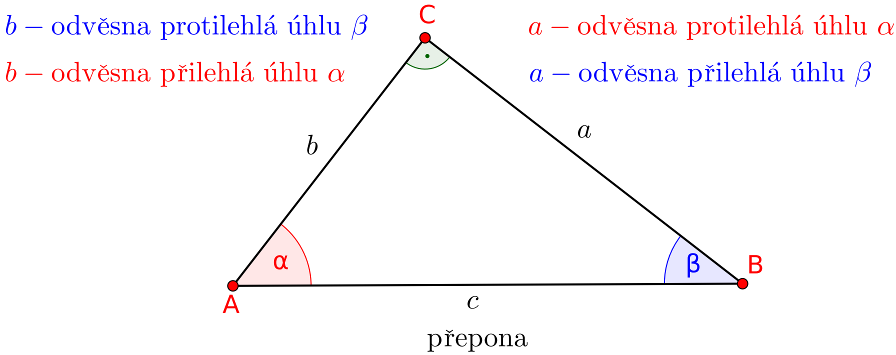
Obr. 1: Co umím a co neumím?

1 Úhly a strany v $\mathcal{PRATROJI}$

Víme, že v $\mathcal{PRATROJI}$ je vztah mezi **stranami** dán *Pýthagorovou větou*. Ta umožňuje ze dvou známých stran vypočítat stranu třetí. V $\mathcal{PV}$ však vůbec nevystupují **úhly**! A já je chci umět vypočítat, znám-li strany a basta! A nebo chci vypočítat strany, znám-li úhly a jednu stranu ($\mathcal{PV}$ mi nepomůže) (viz obr.1). Jediné, co o úhlech α a β vím, je to, že $\alpha + \beta = 180°$.

Ukáže se, že to je velice jednoduché, stačí znát něco o podobných trojúhelnících a vložit do toho trochu manuální práce (měření pravítkem).

V následujících úvahách budeme používat pojmy **přepona**, **přilehlá odvěsna** a **protilehlá odvěsna**. Přilehlost a protilehlost je pojem relativní – závisí na úhlu, vzhledem ke kterému to bereme (viz obr.2).



Obr. 2: Bacha na termíno-logii!

2 Definice funkce tangens

Narýsujme si pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami a, b takový, že $\alpha = 35°$ a $b = 10\,\mathrm{cm}$ (viz obr.3a). Změříme pravítkem odvěsnu a (s přesností na milimetry) a dostaneme hodnotu $a \doteq 7{,}0\,\mathrm{mm}$. Poměr protilehlé odvěsny ku přilehlé odvěsně je tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{10}{7} = 0,7.$$

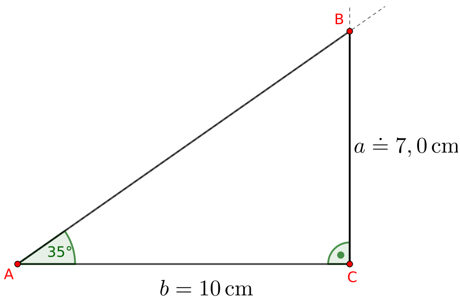
Nyní do ΔABC vnoříme menší trojúhelník ΔAFE takový, že přilehlá odvěsna bude $a' = 8\,\mathrm{cm}$ (viz obr.3b). Umíme bez opětovného měření zjistit, jakou hodnotu má protilehlá odvěsna a'?

Umíme, měřit již netřeba (třeba tam číhá had!). Trojúhelníky ABC a AFE jsou přece podobné, takže platí:

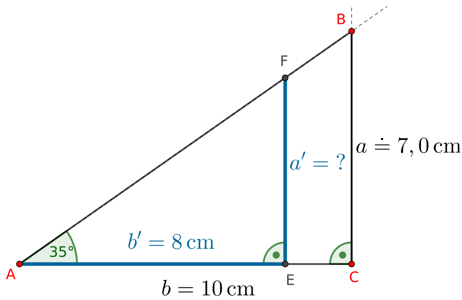
$$\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$$

Ale poměr $\frac{a}{b}$ známe, tedy $\frac{a'}{b'} = 0,7$ a odtud

$$a' = 0,7 \cdot b' = 0,7 \cdot 8 = \underline{\underline{5,6\,[\mathrm{cm}]}}$$



(a) Změříme a



(b) Podobné trojúhelníky

Obr. 3:

https://www.geogebra.org/m/bhaumaay

Závěr: Měřením jsme zjistili, že v $\mathcal{PRATROJI}$ s úhlem $\alpha = 35°$ je poměr odvěsny k tomuto úhlu protilehlé a odvěsny k tomuto úhlu přilehlé roven číslu $0,70$. Pokud narazíme na jakýkoli jiný $\mathcal{PRATROJ}$ s úhlem $\alpha = 35°$, jsme díky našemu měření schopni výše uvedeným postupem spočítat jednu z odvěsen, pokud známe odvěsnu druhou. A nemusíme již podruhé měřit.

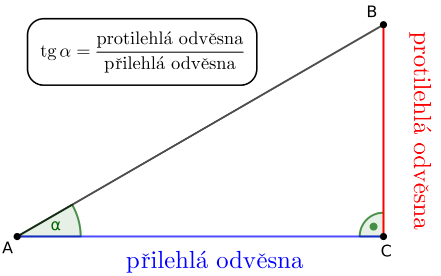
Poměr $0,7$ získaný pro úhel $35°$ je tedy velice cenný a je vhodné si ho někde uchovat pro další použití.

Tomuto vzácnému poměru budeme od nynějška říkat vznešeně **tangens úhlu** $35°$ a budeme to zapisovat zkráceně

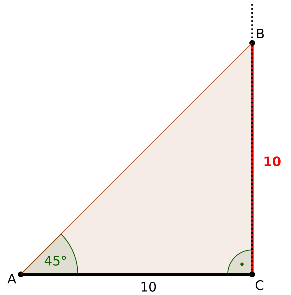
$$\operatorname{tg} 35° = 0,7$$

Úhel α můžeme v trojúhelníku samozřejmě měnit v intervalu $(0°; 180°)$. Pro každou hodnotu úhlu z tohoto intervalu můžeme narýsovat příslušný $\mathcal{PRATROJ}$, měřením zjistit poměr protilehlé a přilehlé odvěsny a tím získat hodntu tangens tohoto úhlu (a zase si jí někam poznačit)!

Pro libovolnou hodnotu úhlu z intervalu $(0°; 180°)$ je tedy tangens



(a) Definice funkce tangens



α	tg(α)
5°	0.09
10°	0.18
15°	0.27
20°	0.36
25°	0.47
30°	0.58
35°	0.7
40°	0.84
45°	1
?	?
?	?

(b) Magická tabulka vzniklá měřením

Obr. 4:

https://www.geogebra.org/m/sfxemyjg

tohoto úhlu **definován** vztahem:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}}} \tag{1}$$

Hodnota čísla $\operatorname{tg}\alpha$ závisí na velikosti úhlu α. Změníme-li úhel, změní se jeho tangens. Říkáme, že číslo $\operatorname{tg}\alpha$ **je funkcí** úhlu α a máme-li na mysli přiřazování všech možných hodnot tangens všem možným úhlům z intervalu $(0°; 180°)$, mluvíme o **funkci tangens**.

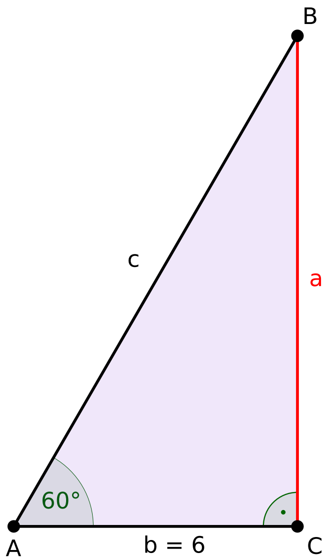
Díky definici (1) (viz též obr.4a) si měřením snadno vytvoříme **tabulku hodnot funkce tangens** (obr.4b). Tu můžeme využít dvěma způsoby:

- K výpočtům odvěsen a úhlů v $\mathcal{PRATROJI}$.
- K nakreslení **grafu funkce tangens** .

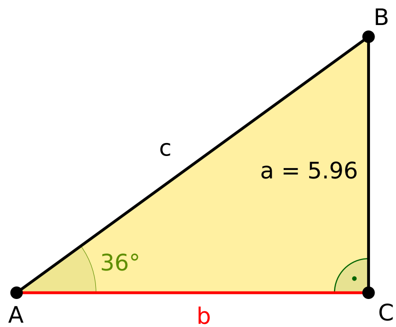
3 Výpočet odvěsen a úhlů v *PRATROJI*

Příklad 1: Užití tangens k výpočtu odvěsny

a) Urči stranu a v obrázku vlevo (**protilehlá** odvěsna).
b) Urči stranu b v obrázku vpravo (**přilehlá** odvěsna).



(a)



(b)

Výsledky:

a) $a = 10,39$ b) $b = 8,2$

Řešení:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{a}{b}} \qquad (*)$$

a) Ze vztahu (∗) vyjádříme a:

$$\underline{a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha}$$

a dosadíme:

$$a = 6 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$$

- Hodnotu $\operatorname{tg} 60^\circ$ můžeme vyčíst z naší *magické tabulky* (https://www.geogebra.org/m/sfxemyjg) ($\operatorname{tg} 60^\circ = 1,73$) a vynásobit 6.
- Nebo rovnou počítáme na *SciCalcu* (https://www.geogebra.org/scientific nebo pomocí aplikace v mobilu[a]). Bacha – zde se zadává tangens nikoliv jako **tg**, ale jako **tan**!
- Nebo počítáme na svojí kapesní kal-kulajdě...

Dostáváme:

$$\boxed{a = 10,39}$$

b) Ze vztahu (∗) vyjádříme b:

$$\underline{b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}}$$

a dosadíme:

$$b = \frac{5,96}{\operatorname{tg} 36^\circ}$$

$$\boxed{b \doteq 8,20}$$

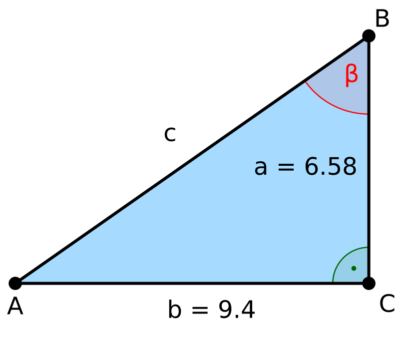
Generátor zadání:

https://www.geogebra.org/m/peexuuwe

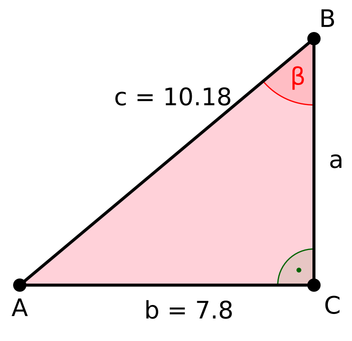
[a] https://play.google.com/store/apps/details?id=org.geogebra.android.scicalc

Příklad 2: Užití tangens k výpočtu úhlu

a) Urči úhel β v obrázku vlevo.
b) Urči úhel β v obrázku vpravo.



(a)



(b)

Výsledky:

a) $\beta \doteq 55°$ b) $\beta \doteq 50°$

Řešení:

$$\boxed{\operatorname{tg}\beta = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{b}{a}} \qquad (*)$$

a) Ve vztahu $(*)$ známe b i a, takže můžeme určit hodnotu tohoto poměru:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{9,4}{6,58} \doteq \underline{1,43}$$

Nyní jsme v opačné situaci než v předchozím příkladě – tam jsme znali úhel a hledali jednu z **odvěsen** v poměru $\frac{a}{b}$. Nyní známe poměr odvěsen, tedy tangens úhlu β a **hledáme úhel** β.

- Opět se můžeme juknout do *magické tabulky* (https://www.geogebra.org/m/sfxemyjg)
- Ve *SciCalcu* naťukáme

$$\tan^{-1}(1.43)$$

- Podobně na běžné kal-kulajdě použijeme **tlačítko**

$$\boxed{\tan^{-1}}$$

Dostáváme výsledek

$$\boxed{\beta \doteq 55^\circ}$$

b) Do poměru $\frac{b}{a}$ musíme pomocí *pýthagorovy věty* nejprve dopočítat odvěsnu a:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{10,18^2 - 7,8^2} \doteq \underline{6.54}$$

Odtud dostáváme

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} = \frac{7,8}{6,54} \doteq \underline{1,19}$$

Odtud jedním z nástrojů jako v části a) dostaneme

$$\boxed{\beta \doteq 50^\circ}$$

Generátor zadání:

https://www.geogebra.org/m/vqvtrrn5

4 Cvičení

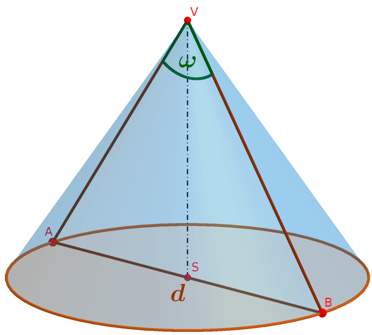
Zadání cv. 1: Komín Dalešického pivováru Řešení ⇒

Jak vysoký je komín z Postřižin[a], jestliže je vidět jeho vrchol ze vzdálenosti 95 m od paty komína pod úhlem 40°?

[a] https://www.csfd.cz/film/6665-postriziny/prehled/

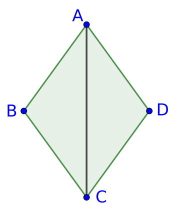
Zadání cv. 2: Kou-zelnická čepice Řešení ⇒

Vypočti objem kou-zelnické čepice v podobě rotačního kužele, jehož osový řez má úhel při vrcholu $\omega = 68°$ a průměr podstavy $d = 12\,\text{cm}$.



Zadání cv. 3: Do koso-čtverce! Řešení ⇒

Do koso-čtverce $ABCD$ je zakreslena úhlopříčka AC (dotažená až do krajů!). Přitom platí, že úhlopříčka AC má velikost 80 mm úhel DAB má velikost 72°. Vypočti délku druhé úhlopříčky a obvod koso-čtcerce!



Zadání cv. 4: Kostel Řeporyjců

Řešení ⇒

Románský kostel svatého Petra a Pavla v Řeporyjích[a] má věž, jejíž střecha je v podobě pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou $a = 4\,\text{m}$. Střecha má sklon $70°$. Vypočti:

a) výšku jehlanu

b) objem jehlanu

[a] https://www.wikiwand.com/cs/Kostel_svat%C3%A9ho_Petra_a_Pavla_(%C5%98eporyje)

5 Řešení cvičení

Řešení cv. 1: Komín Dalešického pivováru

Zadání ⇒

Jak vysoký je komín z Postřižin[a], jestliže je vidět jeho vrchol ze vzdálenosti 95 m od paty komína pod úhlem 40°?

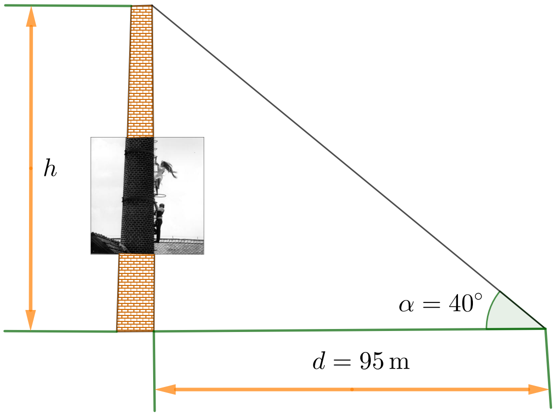
[a] https://www.csfd.cz/film/6665-postriziny/prehled/

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{d}$$

$$h = d \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

$$h = 95 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ$$

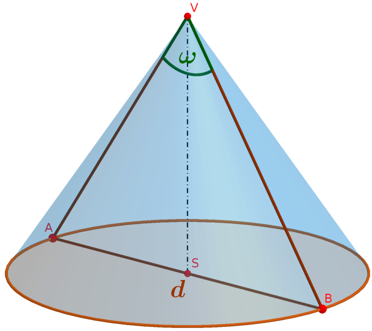
$$\boxed{h \doteq 80\,\mathrm{m}}$$



Řešení cv. 2: Kou-zelnická čepice

Zadání ⇒

Vypočti objem kou-zelnické čepice v podobě rotačního kužele, jehož osový řez má úhel při vrcholu $\omega = 68°$ a průměr podstavy $d = 12\,\text{cm}$.

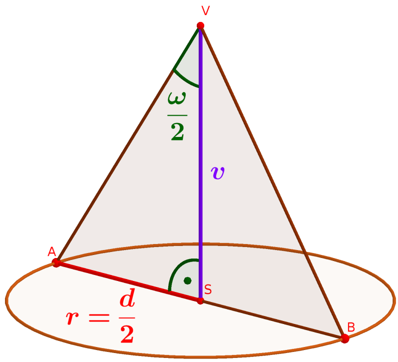


Každej blbec ví ($\mathcal{KBV}$), že objem *kužele* (stejně jako *jehlanu*) je dán vztahem

$$\boxed{V = \frac{1}{3}Sv}$$

Přitom S je obsah *podstavy*, zde

$$\boxed{S = \pi r^2}$$



Přičemž poloměr $r = \frac{d}{2} = 6\,\text{cm}$ známe. Zbývá určit výšku jehlanu v a k tomu nám dopomáhej *tangens*!
V pravoúhlém ΔVSA platí:

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{r}{v}$$

Odtud

$$v = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}} = \frac{6}{\operatorname{tg} 34°}$$

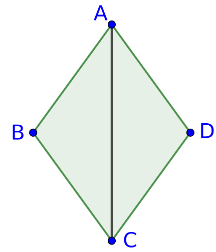
Krzevá přesnost nebudeme tuto hodnotu počítat zvlášť, ale všechno raději nafrkáme do toho prvního vzorce pro objem:

$$\boxed{V} = \frac{1}{3}Sv = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\pi \cdot 6^2}_{S} \cdot \underbrace{\frac{6}{\operatorname{tg} 34^\circ}}_{v} \doteq \boxed{335{,}34\,\mathrm{cm}^3}$$

Řešení cv. 3: Do koso-čtverce

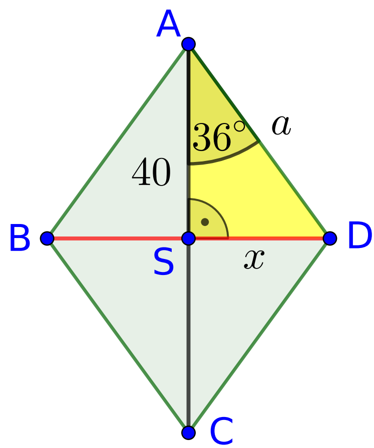
Zadání ⇒

Do koso-čtverce $ABCD$ je zakreslena úhlopříčka AC (dotažená až do krajů!). Přitom platí, že úhlopříčka AC má velikost 80 mm úhel DAB má velikost 72°. Vypočti délku druhé úhlopříčky a obvod koso-čtcerce!



$\mathcal{KBV}$, že v kosočtverci se úhlopříčky půlí (jako v každém *rovnoběžníku*) a navíc jsou na sebe **kolmé**. Proto použijeme pravoúhlý ΔASD, kde S je střed BD:

$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{x}{40}$$



Odtud

$$x = 40 \cdot \operatorname{tg} 36^\circ$$

A dále

$$\boxed{|BD|} = 2x = 2 \cdot 40 \cdot \operatorname{tg} 36^\circ \doteq \boxed{58{,}12\,[\mathrm{mm}]}$$

Dále $\mathcal{KBV}$, že obvod kosočtverce je $o = 4a$. Stranu a zřejmě určíme pomocí *Pýthagorovy věty* pro ΔASD:

$$a = \sqrt{40^2 + x^2} = \sqrt{40^2 + (40 \cdot \operatorname{tg} 36^\circ)^2}$$

Pročež

$$\boxed{o} = 4a = 4\sqrt{40^2 + (40 \cdot \operatorname{tg} 36^\circ)^2} \doteq \boxed{197{,}8\,\mathrm{mm}}$$

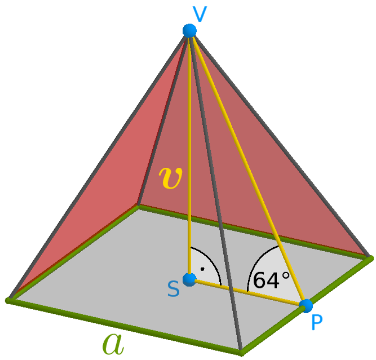
Řešení cv. 4: Kostel Řeporyjců

Zadání ⇒

Románský kostel svatého Petra a Pavla v Řeporyjích[a] má věž, jejíž střecha je v podobě pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou $a = 4\,\mathrm{m}$. Střecha má sklon $70°$. Vypočti:

a) výšku jehlanu
b) objem jehlanu

[a] https://www.wikiwand.com/cs/Kostel_svat%C3%A9ho_Petra_a_Pavla_(%C5%98eporyje)



a) Z ΔVSP dostáváme:

$$\operatorname{tg} 64° = \frac{v}{\frac{a}{2}} = \frac{v}{2} \rightarrow v = 2 \operatorname{tg} 64°$$

$$\boxed{v \doteq 4{,}1\,\mathrm{m}}$$

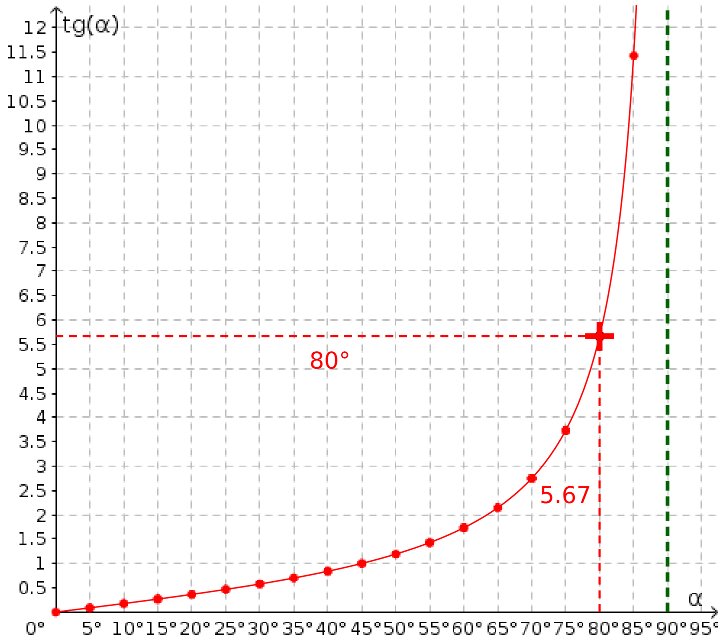
b) Pro objem jehlanu platí:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} S v}$$

$$V = \frac{1}{3} a^2 v = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 2 \operatorname{tg} 64° \rightarrow \boxed{V = 21{,}9\,\mathrm{m}^3}$$

6 Graf funkce tangens

Vrátíme se k naší *tabulce hodnot* funkce tangens (obr.4b) a vyneseme ji do grafu. Můžeme také použít aplet v GeoGebře (odkaz v obr.7).



Obr. 7:

https://www.geogebra.org/m/Dqpfd5JB

Vidíme, že grafem je *křivka*, která začíná v počátku (bod $[0; 0]$ do grafu však nepatří, pač trojúhelník nemůže mít $\alpha = 0°$).

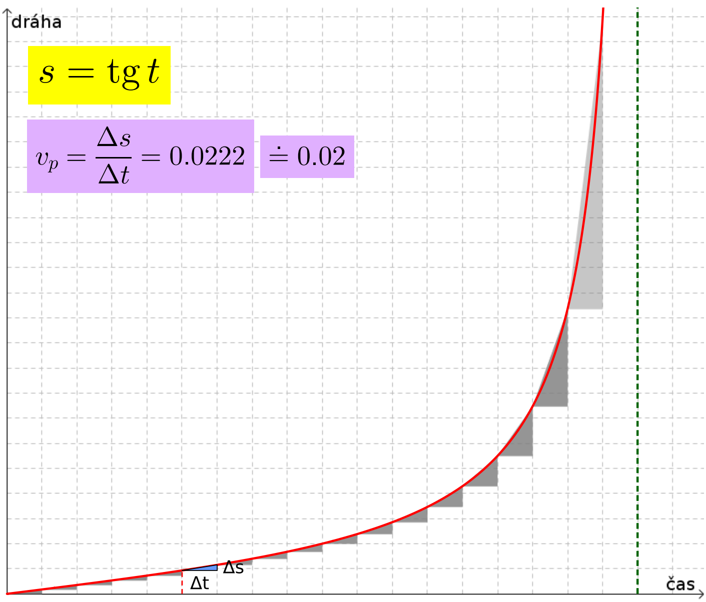
Zpočátku roste tangens skoro lineárně (graf do cca 25° připomíná přímku). Potom je vidět, jak se rychlost růstu začíná prudce zvyšovat.

Blížíme-li se s úhlem α k $90°$, přibližuje se křivka grafu čím dále tím více k zelené čárkované přímce vedené kolmo k vodorovné ose grafu bodem $[90°; 0]$. Tuto přímku graf nikdy neprotne, ani se jí nedotkne. Říkáme jí po domácku a s láskou **ASYMPTOTA**.

Pro úhel $\alpha = 90°$ hodnota tangens **neexistuje**, pač *PRATROJ* nemůže mít dva úhly pravé!

Příklad 3: Trochu fysiky:

Co když pojmeme graf funkce tangens tak, že na vodorovné ose je místo úhlu **čas** a na svislé **dráha** nějakého tělesa? Popiš charakter pohybu tohoto tělesa!



Obr. 8:

https://www.geogebra.org/m/rqxvcerc

Začátek grafu je téměř přímkový a dráha narůstá skoro rovnoměrně. Je to tedy skoro rovnoměrný pohyb se skoro konstantní rychlostí (sleduj v apletu v GeoGebře – odkaz u obrázku).
Po chvíli však dráha začne narůstat čí dál rychleji – rychlost tělesa se výrazně mění, jedná se tedy o **zrychlený pohyb**.
Přírůstky rychlosti v jednotlivých intervalech Δt jsou stále větší (sleduj, o kolik se zvětšuje fialové číslo v apletu), takže zrychlení není konstantní a pohyb je **nerovnoměrně zrychlený**.
Víme, že pokud bychom chtěli graf dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu, musela by dráha na čase záviset **kvadraticky** (Pro $\mathcal{RZP}$ je $s = \frac{1}{2}at^2$).

7 Definice funkce kotangens

Tangens jsme definovali jako poměr

$$\frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}}$$

Kotangens je **definován** jako poměr **opačný**:

$$\boxed{\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{protilehlá odvěsna}}} \tag{2}$$

Vidíme, že tangens a kotangens daného úhlu α jsou vzájemně převrácené hodnoty:

$$\boxed{\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}} \tag{3}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}} \tag{4}$$

Funkce *kotangens* je tedy pro účely výpočtů vlastně **nadbytečná**. **Z toho důvodu na kalkulačkách nenajdeme tlačítko cotg**! Chci-li určit kotangens nějakého úhlu, stačí určit tangens a vzít jeho *převrácenou hodnotu*.

Příklad 4: Nepříjemná šlamastyka

Představ si, že **KOBÁ** na tebe míří $AK-$čkem a chce, abys jí na kalkulačce spočítala *kotangens* úhlu $\alpha = 34°$. Co uděláš?

Na *SciCalcu* zjistíme:

$$\operatorname{tg} 34° \doteq 0,67$$

Odtud

$$\operatorname{cotg} 34° = \frac{1}{\operatorname{tg} 34°} \doteq \frac{1}{0,67} \doteq \boxed{1,49}$$

Samolitr je lepší do SciCalcu rovnou naťukat výraz

$$\frac{1}{\operatorname{tg} 34°} \doteq \boxed{1,48}$$

Tím se vyhneme zaokrouhlování a výsledek bude přesnější.

Δ

Da Sista Les

∞

.