

Figura 16: Caleidoscopio de rastros de color.

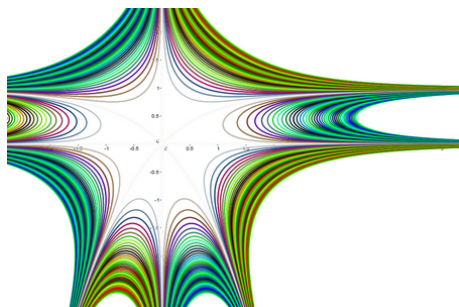


Figura 17: El rastro de color ayuda a visualizar el patrón que sigue una familia de curvas.

de curvas. En la figura 17 se muestra una visualización de la familia  $f(x, y) = 100[xy(x^2y + y^2 - x^2) - n]$ , para valores de  $n$  entre  $-10$  y  $10$ , con incremento  $0.25$ .

### 3.3. LA POTENCIA EXPLORADORA DEL RASTRO DE COLOR DINÁMICO

El procedimiento descrito permite visualizar puntos o lugares geométricos desconocidos... ¡sin necesidad de construir ni un punto del lugar! Solo necesitamos saber expresar la condición que deben cumplir los puntos del mismo.

Este modo de empleo del rastro de color dinámico es realmente potente, como podremos apreciar en los siguientes ejemplos. Simplemente *barriendo* la pantalla, el lugar geométrico aparece, como por arte de magia, ante nuestros ojos.

Por ejemplo, al estudiar el comportamiento de dos segmentos previamente construidos (*bisectores* interno y externo [1]) en un triángulo básico —dos de cuyos vértices son  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ — observamos cómo aparece la figura en forma de lágrima que corresponde al lugar geométrico en el que ambos segmentos tienen la misma longitud (figura 18).

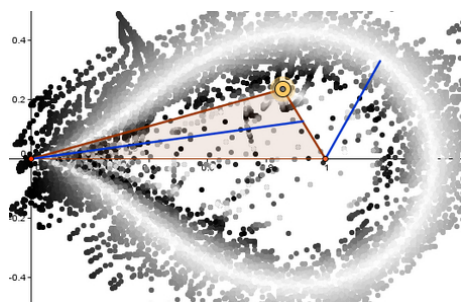


Figura 18: El rastro de color deja al descubierta un lugar en forma de lágrima.

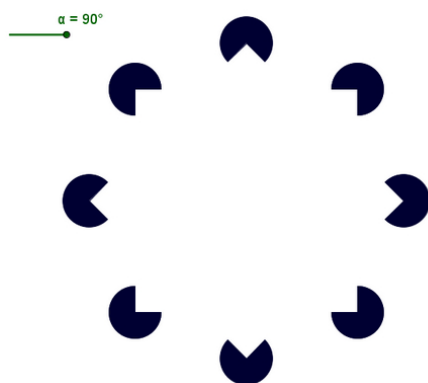


Figura 19: Efecto Kanizsa.

### 3.4. ILUSIÓN DE KANIZSA

En realidad, intuimos la figura en forma de lágrima mucho antes de que el trazo blanco sea continuo, gracias a un fenómeno de percepción visual conocido como ilusión de Kanizsa (figura 19), un efecto de contorno subjetivo ([2]). Nuestra mente tiende a unir los segmentos rectos presentes en los círculos, estableciendo un puente entre ellos, un contorno virtual que nos produce la impresión de estar visualizando dos cuadrados superpuestos, o una estrella octogonal, donde no hay trazo de nada.

Al ir apareciendo el rastro de color, este efecto ayuda a *trenzar* rápidamente unos puntos con otros de similar tonalidad, dirigiendo la mano hacia el lugar geométrico que deseamos encontrar.

## 4. CREACIÓN DE UN ESCÁNER

### 4.1. AÑADIENDO UN DESLIZADOR

El rastro de color dinámico es una herramienta poderosa para la investigación. Sin embargo, el movimiento manual del punto que deja el rastro resulta bastante

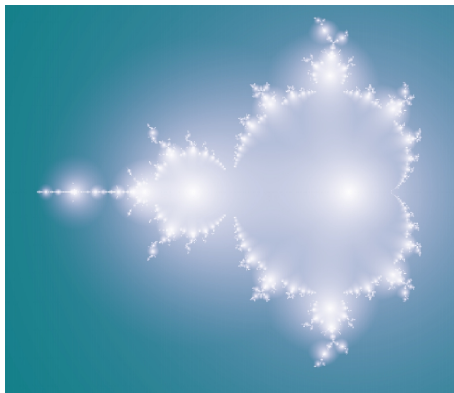


Figura 20: Imagen del conjunto de Mandelbrot, creada por el rastro de un solo punto.

incómodo, a la vez que impreciso. Gracias a la herramienta de GeoGebra *Deslizador*, podemos animar automáticamente ese punto, de forma que recorra línea tras línea los píxeles de la pantalla. En la figura 20 aparece la primera imagen obtenida con este procedimiento ([3]).

#### 4.2. AÑADIENDO LA HOJA DE CÁLCULO

El problema de las figuras así creadas es que tardan mucho en aparecer. El punto que va dejando el rastro tiene que ir línea tras línea recorriendo la pantalla. La imagen de la figura 20 tardó cuatro horas en generarse de esta forma.

El comando *Secuencia*, uno de los más poderosos con que cuenta GeoGebra, no nos puede ayudar en este caso. Este comando crea un objeto que es una lista de valores. Pero sigue comportándose como un único objeto *lista*. Para colorear varias filas a la vez necesitamos una colección de *puntos* independientes, cada uno con su correspondiente color dinámico y su rastro activado.

La aparición, en posteriores versiones de GeoGebra, de una nueva y práctica ventana, la *Hoja de Cálculo*, eliminó esa dificultad, pues, al contrario de lo que sucede con las hojas de cálculo convencionales, no solo permite la introducción en cada celda de valores numéricos o fórmulas, sino también de cualquier objeto de GeoGebra. Gracias a ella, a partir del punto que deja rastro es muy sencillo crear una columna de puntos que lo acompañen. El escáner consiste pues en una columna de  $n$  puntos  $B_1, \dots, B_n$ . Estos puntos, muy próximos, se animan automáticamente mediante el mismo deslizador, procediendo a un avance horizontal —píxel a píxel— con solo pulsar un botón. En su avance, la propiedad *Muestra Rastro* de GeoGebra está activada, por lo que en la pantalla irán apareciendo los distintos colores que cada punto adquirió en cada una de las posiciones escaneadas, configurando finalmente un mapa de color. Cada uno de estos colores queda determinado por la propiedad *Color Dinámico* de ese punto, que, como hemos visto, a su vez está determinada por el valor de  $e(P)$ .

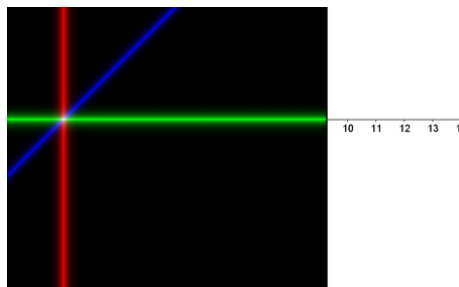


Figura 21: Tres condiciones distintas, una para cada canal de color.



Figura 22: Distribución aleatoria.

En resumen, el escáner permite el mapeado del plano descubriendo aquellos lugares donde se cumple una determinada relación o propiedad, *incluso desconociendo* la forma de construir tal lugar geométrico.

### 4.3. ALGUNOS EJEMPLOS

#### 4.3.1. TRES RECTAS

En la figura 21 aparece un ejemplo del escáner en acción. En este caso hemos empleado tres condiciones diferentes, una para cada canal RGB:  $\{x(P), y(P), x(P) - y(P)\}$ . Al aproximarse estas expresiones al valor cero, se visualizará, respectivamente, el eje  $OY$ , el eje  $OX$  y la gráfica de la función identidad.

#### 4.3.2. UN MAPA ALEATORIO

Basta sustituir las anteriores expresiones por la condición (la misma en todos los canales)  $\text{random}() + 0x(B_i)$  para obtener la figura 22. (Nota: el sumando nulo  $0x(B_i)$  sirve para obligar a GeoGebra a recalcularse toda la expresión cada vez que varíe la posición del punto  $B_i$ ; sin él, una vez calculado un número pseudoaleatorio, su valor permanecería constante a lo largo de toda la animación.)

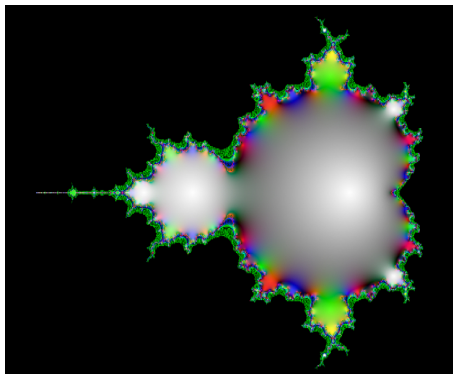


Figura 23: Velocidad de convergencia en el conjunto de Mandelbrot.

#### 4.3.3. EL CONJUNTO DE MANDELBROT

En la imagen del conjunto de Mandelbrot de la figura 23, el color indica la velocidad de convergencia de las potencias del número complejo. En concreto, los canales RGB son exponenciales del tipo  $y = e^{-|x|}$ , donde cada exponente  $x$  es, respectivamente, el módulo del complejo resultante tras 10, 14 y 18 iteraciones. Como suele pasar al representar muchos fractales, la imagen resultante, a todo color, es sencillamente (o complejamente) espectacular.

#### 4.3.4. CUATRO RECTAS CONCURRENTES

Veamos otro ejemplo, ahora contemplando todo el proceso típico de exploración y descubrimiento. Vamos a usar el escáner para intentar averiguar qué cuadriláteros poseen la propiedad de que concurren las cuatro rectas de Euler de los cuatro triángulos que se pueden formar con sus vértices.

Para ello, partimos de un triángulo  $ABC$ , que consideraremos fijo, y añadimos un cuarto punto libre  $D$ . Creamos las rectas de Euler de los cuatro triángulos  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ABD$  y  $ABC$ , y calculamos las áreas de los triángulos que forman al cortarse entre ellas. Las rectas serán concurrentes cuando esas áreas sean nulas (figura 24). Cada punto  $B_i$  del escáner hará las veces del cuarto vértice  $D$  del cuadrilátero  $ABCD$ .

Tras pasar el escáner, podemos comprobar que el lugar buscado pasa por los centros del triángulo ([4])  $X_1$  (incentro),  $X_3$  (circuncentro),  $X_4$  (ortocentro),  $X_{13}$  (punto de Fermat o 1.<sup>er</sup> punto isogónico),  $X_{14}$  (2.<sup>o</sup> punto isogónico),  $X_{15}$  y  $X_{16}$  (isogonales de  $X_{13}$  y  $X_{14}$ ). Además, pasa —entre otros— por los exincentros, las reflexiones de  $A$ ,  $B$  y  $C$  sobre los lados opuestos, los vértices de los triángulos equiláteros construidos sobre los lados... (figura 25).

Toda esta información señala a la circunferencia circunscrita al triángulo  $ABC$  y a la cúbica de Neuberg (figura 26, [5]) como el lugar geométrico al que debe pertenecer el cuarto vértice  $D$  para que concurren las rectas de Euler del cuadrilátero

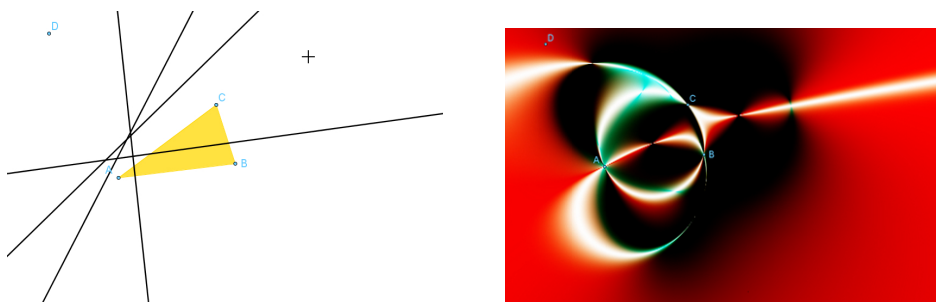


Figura 24: ¿Cuándo concurren las cuatro rectas de Euler? El escáner nos señala el lugar.

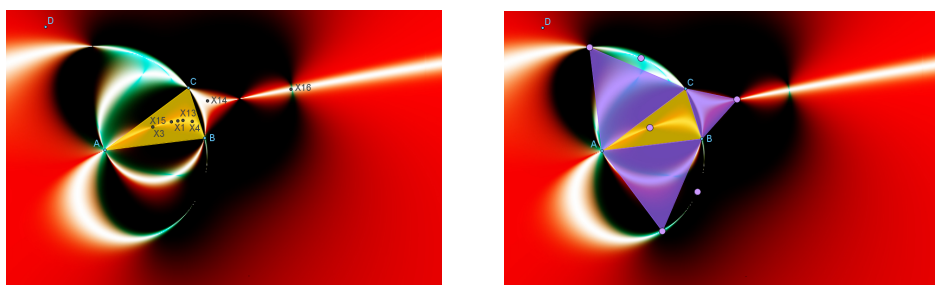


Figura 25: Centros del triángulo y otros puntos notables por los que pasa el lugar geométrico buscado.

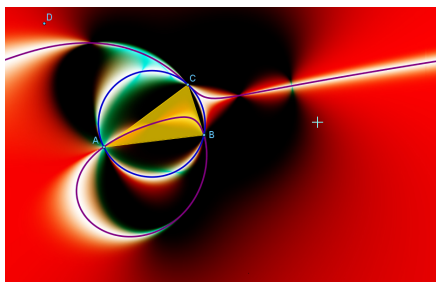


Figura 26: La circunferencia circunscrita y la cúbica de Neuberg.

$ABCD$ . Podemos así concluir que, para cumplir esa condición, el cuadrilátero  $ABCD$  debe ser cíclico o bien uno de sus vértices debe pertenecer a la cúbica de Neuberg determinada por el triángulo formado por los otros tres.

#### 4.4. ANÁLISIS DE IMÁGENES ESCANEADAS

GeoGebra permite introducir imágenes de fondo en la ventana gráfica. Esto permite que, una vez realizado el escáner, podamos realizar una captura de pantalla,

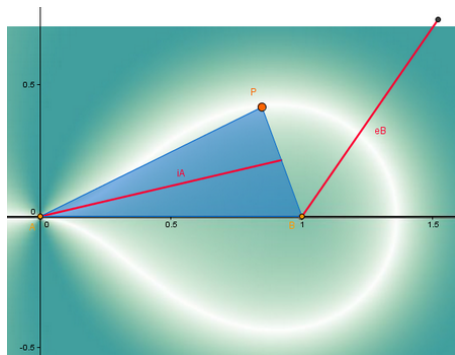


Figura 27: Análisis detallado sobre una imagen.

recortar la parte de la imagen que nos interese y proceder a un análisis más detallado de la misma en una nueva construcción de GeoGebra. Para ello, basta colocarla como imagen de fondo y construir sobre ella los elementos de comprobación deseados (figura 27).

## 5. ALGUNAS APLICACIONES DEL ESCÁNER

### 5.1. DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

La creación de los mapas de colores facilita la observación visual de los puntos de una región plana más próximos a verificar una relación dada (ya sea algebraica o geoméricamente). Esta visualización puede servir de ayuda a la comprensión global y local de la relación objeto de estudio. Mostraré algunos ejemplos del uso del escáner como apoyo didáctico en la enseñanza de las matemáticas. Estos ejemplos se pueden encontrar formando parte de las actividades del *Proyecto Gauss* ([6]).

#### 5.1.1. BISECTRICES, INCENTRO, EXINCENTROS

La figura 28 ([7]) muestra el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de cada par de lados de un triángulo. Gracias a los tres canales de color, aparecen diferenciadas las bisectrices según el vértice. La imagen resultante permite apreciar rápidamente tres aspectos importantes. Por una parte, la perpendicularidad de las bisectrices interiores y exteriores en cada uno de los vértices. Por otra, los puntos de corte entre ellas (incentro, exincentros). Finalmente, ofrece una visión global del lugar geométrico como un todo, es decir, un conjunto de seis rectas determinadas por un solo triángulo, que se convierte así en un triángulo inscrito dentro de otro mayor (cuyos vértices son los exincentros y cuyas alturas son las bisectrices interiores). Y todo ello sin más que establecer la condición de equidistancia: volvemos a insistir en que no hemos empleado ningún método constructivo (tales como los clásicos de regla y compás).

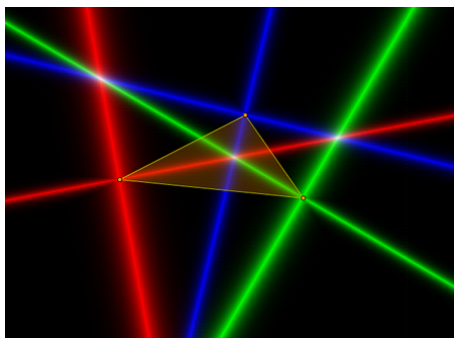


Figura 28: Bisectrices, incentro, exincentros.

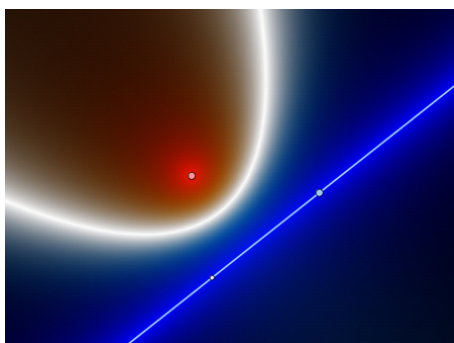


Figura 29: Foco y directriz de una parábola.

### 5.1.2. LA PARÁBOLA

La figura 29 ([8]) muestra el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de una recta y un punto dado. En este caso, se aprovechan los canales de color para distinguir las dos regiones a ambos lados de la parábola. De esta manera, la imagen resultante ayuda a interpretar la ecuación de la curva como una *frontera* entre ambas regiones planas, es decir, ayuda a reinterpretar una *ecuación* como un frágil equilibrio entre dos *inecuaciones*.

### 5.1.3. BAJO EL MISMO ÁNGULO

La figura 30 ([9]) muestra el lugar geométrico de los puntos del plano que forman con ambos segmentos el mismo ángulo (o, dicho de otra manera, desde los que *se ven* ambos segmentos bajo el mismo ángulo). El escáner nos brinda una forma sencilla de mostrar un ejemplo de lugar geométrico enrevesado y discontinuo. Además, permite proponer fácilmente problemas particulares con condiciones añadidas del tipo *¿y sí...?*; por ejemplo, qué sucede si los segmentos son paralelos, o perpendiculares, o los cuatro extremos se sitúan en los vértices de un cuadrado, etc.



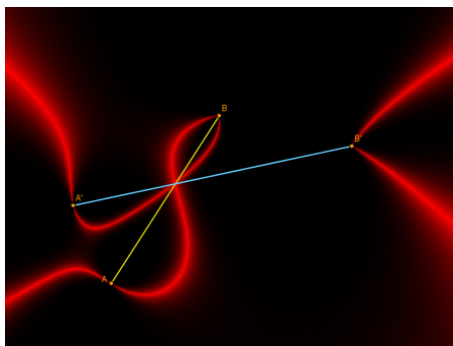


Figura 30: Bajo el mismo ángulo.

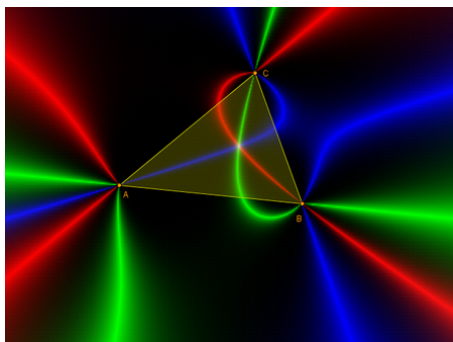


Figura 31: Punto isogónico (punto de Fermat).

#### 5.1.4. PRIMER PUNTO ISOGÓNICO (PUNTO DE FERMAT)

La figura 31 ([9]) es una continuación lógica de la anterior. Dado el triángulo  $ABC$ , aplicamos el escáner con la condición, en cada uno de los canales, de que se vea cada par de lados del triángulo bajo el mismo ángulo. Los tres lugares geométricos obtenidos, cada uno con su color correspondiente, solo se cortarán en aquel punto en que los tres lados se vean con el mismo ángulo (punto isogónico). Si todos los ángulos del triángulo son menores que  $120^\circ$ , este punto caerá en el interior del triángulo coincidiendo con el punto de Fermat.

#### 5.2. TRAZADO DE CURVAS ALGEBRAICAS

Algunos puntos singulares, o incluso ramas enteras, de algunas curvas pueden no hacerse visibles mediante el método de trazado tradicional. El escáner puede servir para volver a hacerlos visibles. En el ejemplo de la figura 32, el origen de coordenadas de la curva  $x^2 + y^2 - x^3 = 0$  no aparece como punto de la curva en su representación gráfica habitual.

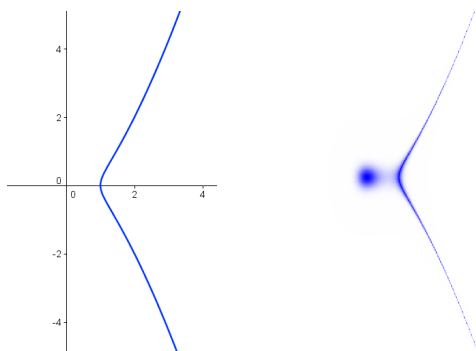


Figura 32: Un punto escamoteado. A la izquierda, una representación habitual de la curva. A la derecha, la imagen escaneada.

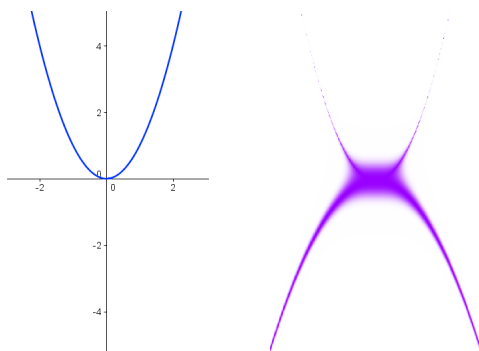


Figura 33: Una rama sin trazar.

En el ejemplo de la figura 33 es toda una rama de la curva  $2x^6 - 8y^3 + 6x^4y = 0$  la que normalmente no se visualiza.

Si asignamos colores distinguiendo signos, es decir, diferenciando entre «próximo a 0 pero positivo (en azul)» de «próximo a 0 pero negativo (en rojo)», podemos comprender mejor qué sucede en las curvas anteriores (figura 34). Tanto en las proximidades de la rama como el punto escamoteados la curva no cambia de signo, se anula sin que esto signifique un cambio de signo. Esto parece despistar al algoritmo de trazado de curvas implícitas implantado (al menos de momento) en GeoGebra y otros programas de cálculo simbólico.

### 5.3. DESCUBRIMIENTO DE LUGARES DIFÍCILMENTE ALGEBRIZABLES

En muchas ocasiones, la gráfica del lugar que aparece al pasar el escáner es difícil de algebrizar con exactitud. Pero incluso si lo que perseguimos es la *expresión algebraica* de un lugar geométrico, la visualización que nos ofrece el escáner facilita en gran medida su búsqueda. La forma de la curva o trazos visualizados nos facilitarían la comprensión de la naturaleza del lugar y el hallazgo de algunos puntos notables

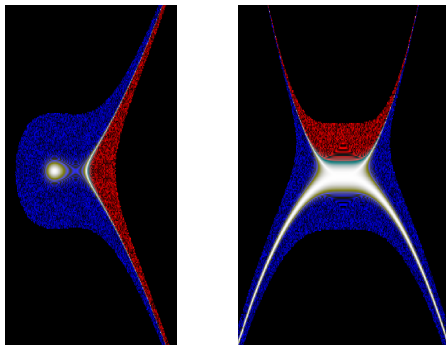


Figura 34: Estudio de los signos en las proximidades de las curvas de las figuras 32 y 33.

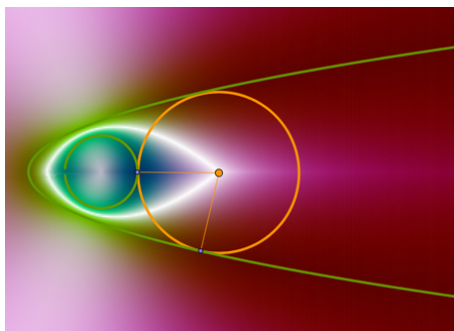


Figura 35: Bisectriz de dos curvas.

o singulares. En la figura 35 el paso del escáner encuentra la *bisectriz* entre dos curvas, es decir, el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ambas curvas ([10]).

#### 5.4. RECOGIDA DE DATOS

Es más, el escáner también permite almacenar en una lista las coordenadas de los puntos escaneados más próximos al lugar geométrico deseado. Esto resulta particularmente interesante en aquellos problemas (y son muchos) donde, para trasladar los resultados obtenidos a una aplicación práctica, no precisamos de una solución exacta, sino de un recorrido suficientemente aproximado. En la figura 36 se muestra el escáner recogiendo los datos de las coordenadas de la bisectriz de dos curvas. Para ello usa el siguiente procedimiento:

1. Permite que el usuario predetermine el valor de un  $\epsilon$  (por llamarle de alguna forma) antes de realizar el escaneado. En el ejemplo se ha fijado inicialmente su valor en 0.025.
2. Existe una lista que sirve de almacén, vacía inicialmente.

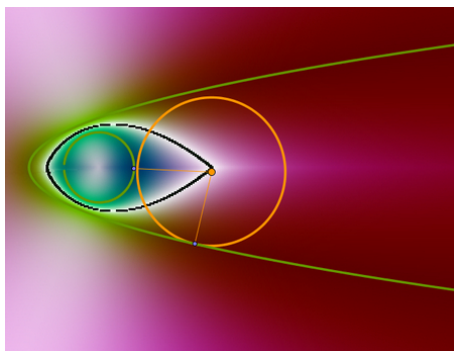


Figura 36: Proceso de recogida y almacenamiento automático de coordenadas.

3. Otra lista almacena la posición de los puntos del escáner que, en cada momento de su avance, están situados suficientemente próximos a la curva, es decir, para  $\varepsilon > 0$ , aquellas coordenadas de los puntos  $B_i$  del escáner que verifican  $|e(B_i)| < \varepsilon$ .
4. Usando un breve *script* (otra gran utilidad de GeoGebra: la posibilidad de programación directa por parte del usuario), cada vez que la lista de puntos suficientemente próximos se actualiza debido al avance del escáner, se van añadiendo los valores de esta lista a la lista que sirve de almacén.

## 6. CONCLUSIÓN

La combinación de herramientas y comandos que brinda el programa GeoGebra permite la creación de nuevos artilugios que aumentan notablemente el valor que cada una de las herramientas o comandos tiene por separado. Una de estas combinaciones permite construir fácilmente un escáner capaz de explorar las relaciones entre distintos objetos sin necesidad de conocer ni la expresión algebraica del lugar buscado ni ningún método de construcción específico. Debido a ello, este escáner ofrece una gran adaptabilidad como ayuda a la investigación de muy diversos problemas, además de conseguir imágenes de alto valor estético y didáctico.

Las imágenes obtenidas se pueden comparar con fotografías aéreas. La cartografía tradicional ha requerido de complicados y precisos cálculos para posicionar los contornos de accidentes geográficos, por lo que algunas imágenes aéreas del mismo territorio hubieran sido recibidas por los antiguos cartógrafos como una ayuda inestimable, tanto para agilizar el trazado del mapa como para comprender más rápida y profundamente la naturaleza y orografía del terreno. Gracias al escáner de color dinámico podemos obtener fácilmente imágenes similares, auténticos mapas del terreno matemático que deseamos explorar o comprender.

Además, la visualización de las imágenes así obtenidas puede favorecer enormemente una correcta interpretación de las relaciones existentes entre los elementos en juego. Incluso disponiendo de un considerable bagaje algebraico, las relaciones

expresadas mediante símbolos abstractos muchas veces no evidencian todo su alcance con la misma facilidad que las imágenes. Es cierto que también es necesario aprender a interpretar estas últimas, pero generalmente se precisa de una inversión mucho menor de tiempo y trabajo para lograrlo.

Por último, el poder conseguir estas imágenes sin necesidad de disponer de alguna fórmula o ecuación, ni de averiguar primero algún método constructivo, hace del escáner de color dinámico una herramienta especialmente valiosa en la investigación y descubrimiento de nuevas relaciones.

## REFERENCIAS

- [1] R. LOSADA, T. RECIO Y J. L. VALCARCE, On the automatic discovery of Steiner-Lehmus generalizations, *Proceedings of ADG 2010* (J. Richter-Gebert y P. Schreck, editores), München (2010), pp. 171–174.
- [2] R. LOSADA, *La Percepción* (sección 21), <http://www.iespraviva.com/rafa/ojo/>, 2003.
- [3] R. LOSADA, Magic color: Ghost constructions, *GeoGebra User Forum*, <http://www.geogebra.org/forum/viewtopic.php?f=22&t=6175>, 2009.
- [4] C. KIMBERLING, *Encyclopedia of Triangle Centers*, <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/>
- [5] B. GIBERT, *Catalogue of Triangle Cubics*, <http://bernard.gibert.pagesperso-orange.fr/ctc.html>
- [6] J. L. ÁLVAREZ Y R. LOSADA, Materiales didácticos, *Proyecto Gauss*, <http://recursostic.educacion.es/gauss/web/>, 2010–2011.
- [7] R. LOSADA, Bisectrices exteriores y exincentros, *Proyecto Gauss*, [http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales\\_didacticos/eso/actividades/geometria/poligonos/triangulo05\\_exincentros/actividad.html](http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/poligonos/triangulo05_exincentros/actividad.html)
- [8] R. LOSADA, La parábola, *Proyecto Gauss*, [http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales\\_didacticos/eso/actividades/funciones/concretas/cuadratica\\_1/actividad.html](http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/funciones/concretas/cuadratica_1/actividad.html)
- [9] R. LOSADA, Bajo el mismo ángulo, *Proyecto Gauss*, [http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales\\_didacticos/eso/actividades/geometria/poligonos/viviani\\_fermat\\_1/actividad.html](http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/poligonos/viviani_fermat_1/actividad.html)
- [10] I. ADAMOU, *Curvas y superficies bisectrices y diagrama de Voronoi de una familia finita de semirrectas paralelas en  $R^3$* , tesis doctoral, <https://www.educacion.gob.es/teseo/mostrarRef.do?ref=1044816#>, 2013.