MathCon

The Mathematics Firm

Líneas Rectas

Contenido

1
Línea Recta

En este documento detallamos algunos aspectos sencillos de la gráfica de una línea recta. Partimos de las gráficas de rectas más simples, como rectas constantes, y rectas que pasan por el origen, para llegar a recta que tiene la forma $y = ax + b$. Posteriormente vemos otras formas de la ecuación de la recta que son equivalentes.

La línea recta es la figura geométrica más usada. Ésta puede representarse de muchas formas. Para poder estudiarla suponemos conocidos los conceptos de “punto” y “plano”.

Definición 1 *Definiciones de línea recta:*

1. *Una línea recta es la figura geométrica en el plano formada por una sucesión de puntos que tienen la misma dirección. Dados dos puntos diferentes, sólo una recta pasa por esos dos puntos.*
2. *Es la figura geométrica formada por un polinomio de primer grado $a_0 + a_1x$.*
3. *Es la figura geométrica obtenida al unir dos puntos, tal que la distancia recorrida sobre ésta figura, es la más corta.*

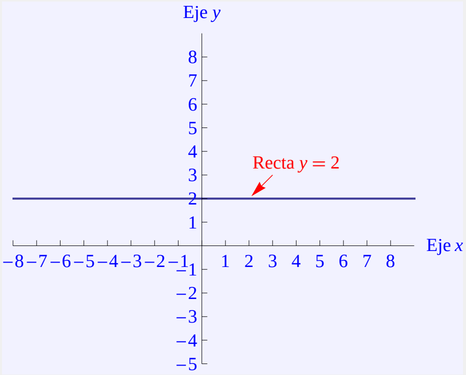
La recta es usada en una gran cantidad de aplicaciones.

1. Con líneas rectas podemos formar, triángulos, cuadrados, rectángulos, en general todos los polígonos.
2. Los modelos más simples pueden construirse con líneas rectas, por ejemplo un objeto en movimiento con aceleración constante puede modelarse con una línea recta donde la pendiente es la aceleración.

2
Rectas constantes

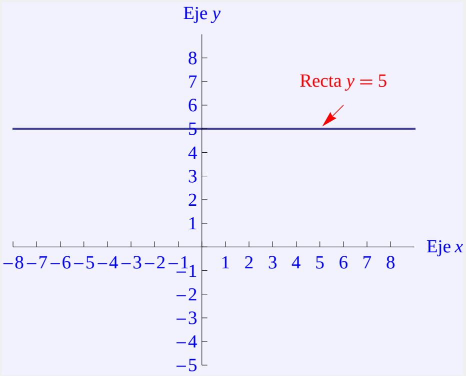
Las rectas constantes son aquellas que no tienen inclinación, aquí no importa que valor de la variable (independiente) x tome, siempre el valor de la variable (dependiente) y es el mismo.

2.1. Rectas horizontales



Ejemplo 1

Recta constante $y = 2$

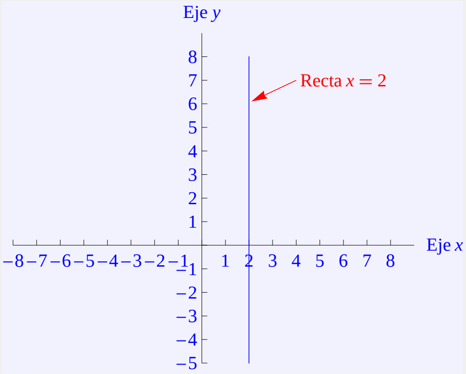


Ejemplo 2

Recta constante $y = 5$

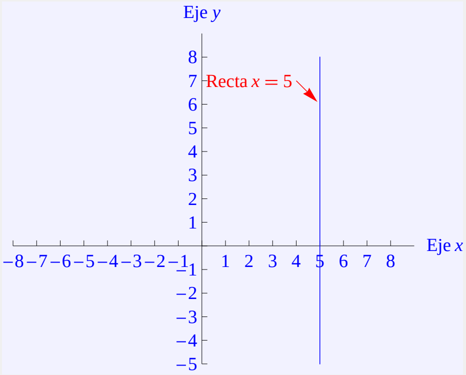
2.2. Rectas verticales

Las rectas verticales NO son funciones, sin embargo son usadas en muchas ocasiones. Una recta vertical tiene la fórmula $x = a$, es decir x toma un valor siempre (a), sin importar que valor es y.



Ejemplo 3

Recta constante $x = 2$



Ejemplo 4

Recta constante $x = 5$

3

Rectas con ecuación $y = ax$

Después de las rectas constantes, las más simples son aquellas que tienen como ecuación $y = ax$. Estas rectas son inclinadas, pasan siempre por el origen $(0, 0)$ y la inclinación esta determinada por el valor de a.

3.1. Rectas con $a > 0$

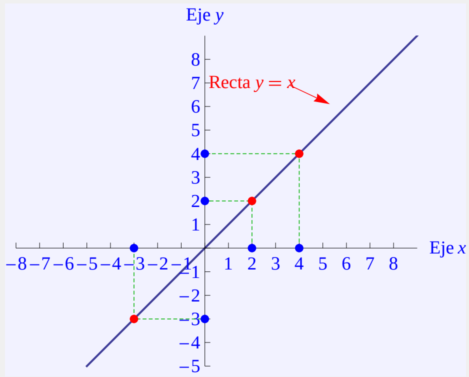
Si a es positivo, entonces cada vez que crece x la recta ax crece. Lo podemos ver más claramente con los siguientes ejemplos que dividimos en dos casos, si $a \geq 1$ ó si $1 > a > 0$.

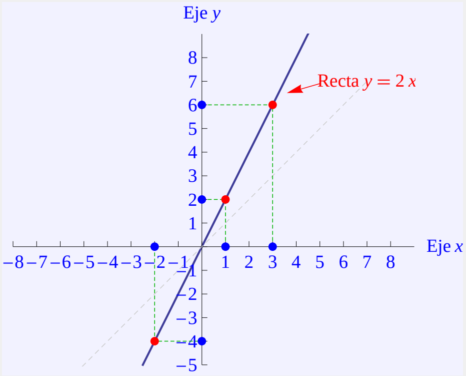
3.1.1. Rectas con $a \geq 1$

Ejemplo 5

Recta con $a = 1$, es decir $y = x$. Quiere decir, que siempre el valor de y es el mismo que el valor de x. También se llama la recta (ó función) identidad.

x	y
4	4
2	2
-3	-3





Ejemplo 6

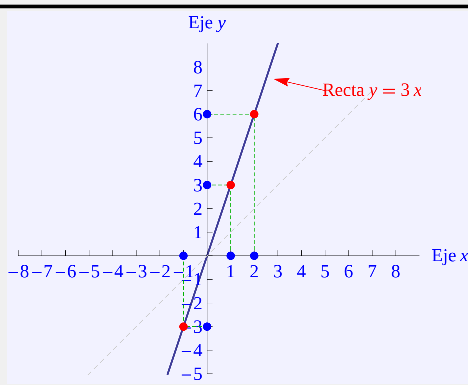
Recta $y = 2x$, aquí la inclinación es 2, es decir, cada vez que crece x, y crece al doble. Algunos valores de ésta recta son: (en la figura vemos el desplazamiento de $y = 2x$ respecto a la recta $y = x$, en un tono muy tenue).

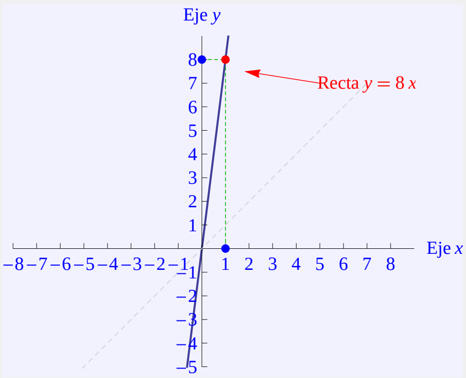
x	y
3	6
1	2
-2	-4

Ejemplo 7

Recta $y = 3x$, quiere decir que el valor de y es el triple al de x, también vemos en la figura el desplazamiento de $y = 3x$ respecto a la recta $y = x$.

x	y
2	6
1	3
-1	-3

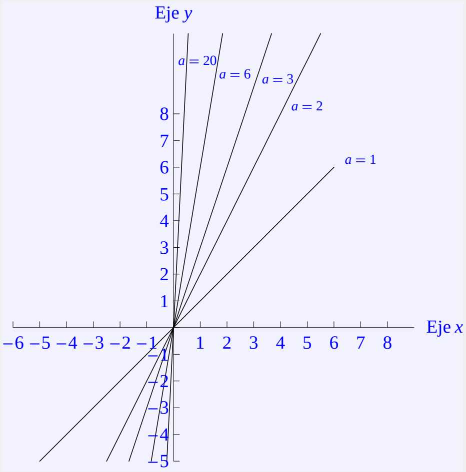




Ejemplo 8

Recta $y = 8x$, la inclinación es 8, es decir cada vez que crece x, y crece 8 veces. Algunos valores de esta recta son:

x	y
3	24
1	8
-2	-16

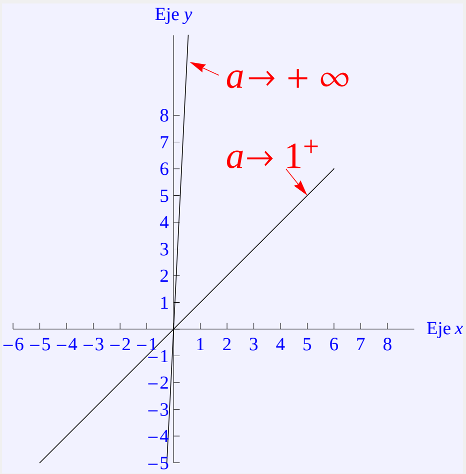


Ejemplo 9

En esta figura observamos como la recta

$$y = ax$$

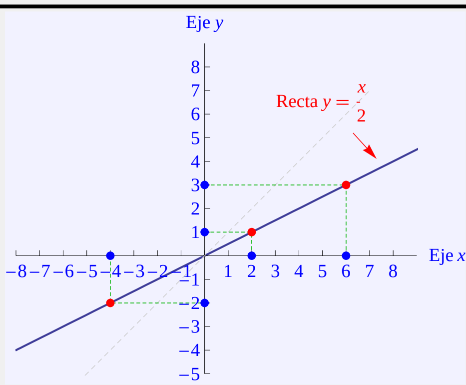
se acerca más al eje y cada vez que a se hace más grande, $a = 1, 2, 3, 6, 20$.



Ejemplo 10

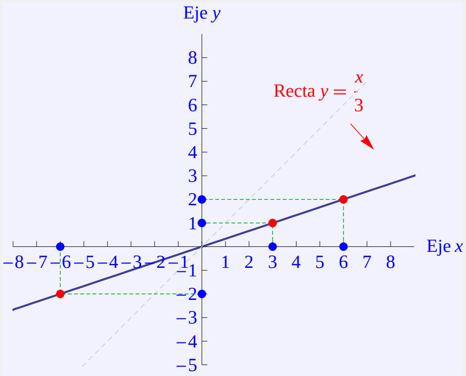
El siguiente esquema representa el comportamiento de las rectas $y = ax$ cuando $a > 1$. Si a se hace muy grande “$a \to +\infty$", entonces la gráfica se acerca más al eje y. Si a se acerca a 1 por arriba,“$a \to 1^+$ $(a > 1)$", entonces la gráfica se acerca más a la gráfica de $y = x$.

3.1.2. Rectas con $1 > a > 0$



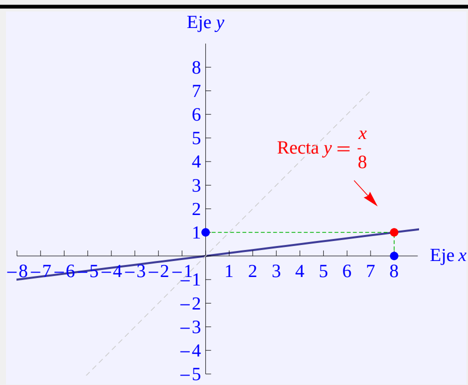
Ejemplo 11

Gráfica de la función $y = \dfrac{x}{2}$, en este caso $a = \dfrac{1}{2}$, es decir ahora a es más pequeño que 1, y y crece a la mitad de x.



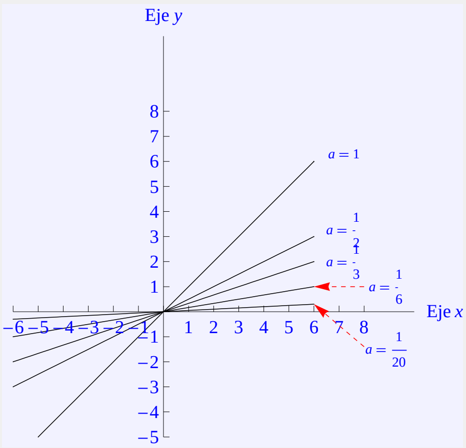
Ejemplo 12

Gráfica de la función $y = \dfrac{x}{3}$, aquí $a = \dfrac{1}{3}$, es decir ahora a es más pequeño que $\dfrac{1}{2}$, 1.



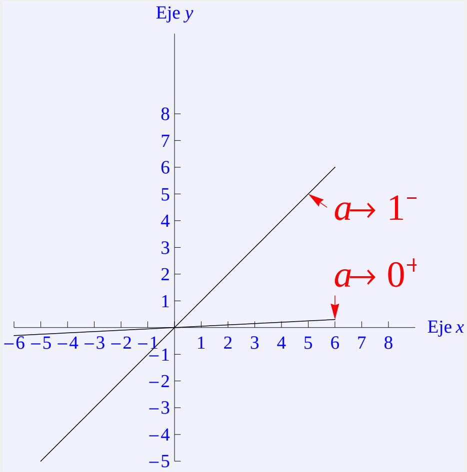
Ejemplo 13

Gráfica de la función $y = \dfrac{x}{8}$, donde $a = \dfrac{1}{8}$, es decir ahora a es mucho más pequeño que 1, y la gráfica se acerca al eje x.



Ejemplo 14

En esta figura observamos como la recta se aproxima más al eje x cada vez que a se hace más pequeño, $a = \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{20}$.



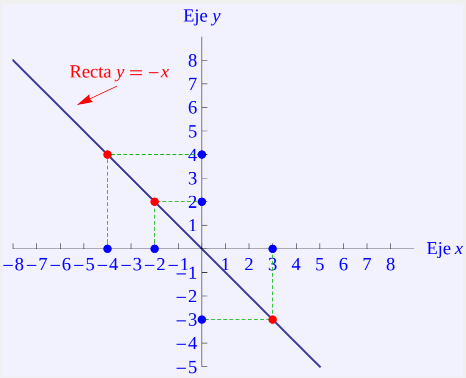
Ejemplo 15

El siguiente esquema representa el comportamiento de las rectas $y = ax$, cuando $1 > a > 0$. Si a se hace muy pequeño "$a \to 0^+$", entonces la gráfica se acerca más al eje x. Si a se acerca a 1 por abajo,"$a \to 1^-$ $(a > 0)$", entonces la gráfica se acerca más a la gráfica de $y = x$.

3.2. Rectas con $a < 0$

Si el valor de a es negativo, entonces cada vez que crece x la recta ax decrece. Lo podemos ver más claramente con los siguientes ejemplos, divididos en dos casos: $-1 < a < 0$ y $a \leq -1$. Estos casos son simétricos, del caso $a > 0$, respecto al eje y.

3.2.1. Rectas con $a \leq -1$



Ejemplo 16

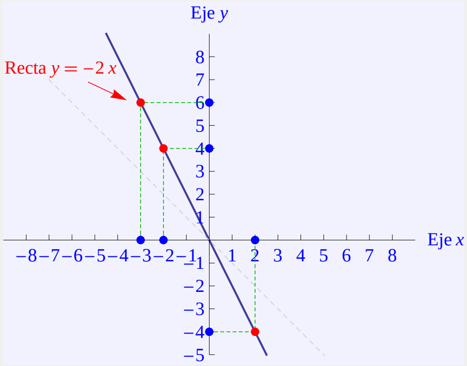
Recta con $a = -1$, es decir $y = -x$, quiere decir que siempre el valor de y es el mismo al valor de x, pero con signo contrario. Algunos valores de esta recta los vemos a continuación:

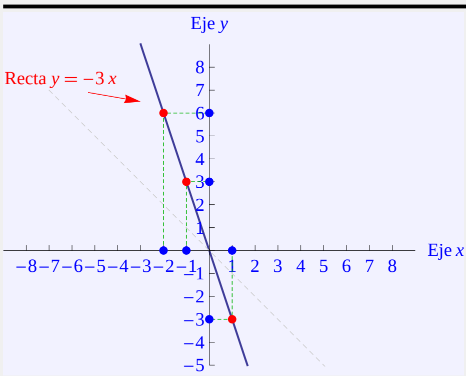
x	y
-4	4
-2	2
3	-3

Ejemplo 17

Recta con $a = -2$, es decir $y = -2x$, quiere decir que el valor de y es el doble al valor de x con signo contrario.

x	y
-3	6
-2	4
2	-4





Ejemplo 18

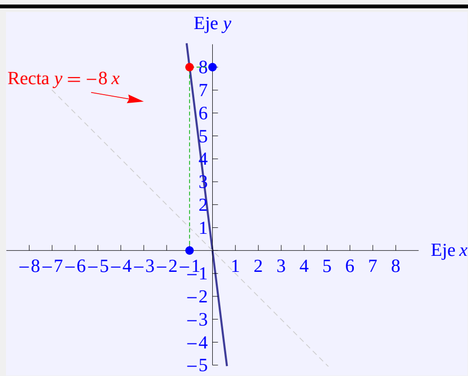
Recta con $a = -3$, es decir $y = -3x$, quiere decir que siempre el valor de y es el triple al valor de x, pero signo contrario. Algunos valores de esta recta los vemos a continuación:

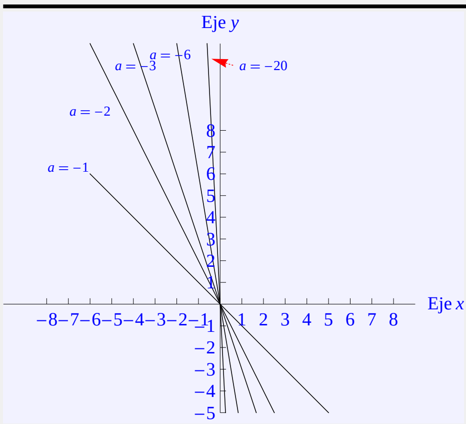
x	y
1	-3
-1	3
-2	6

Ejemplo 19

Recta con $a = -8$, es decir $y = -8x$, quiere decir que el valor de y es ocho veces el valor de x con signo contrario.

x	y
-1	8
1	-8
2	-16



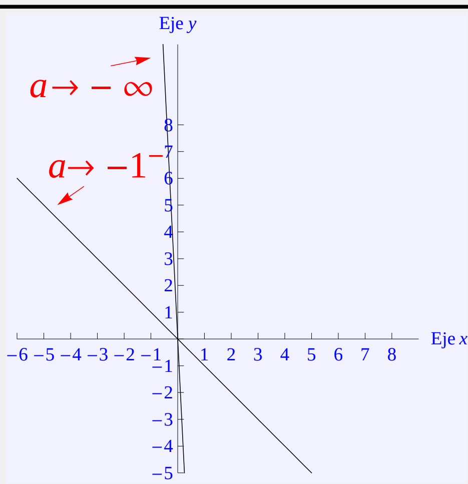


Ejemplo 20

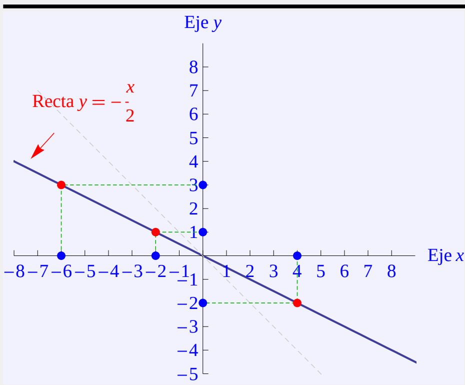
En esta figura observamos como la recta $y = ax$ se aproxima más al eje y cada vez que a se hace más "grande" en valor absoluto. Equivalentemente cada vez que a se hace más pequeño, ó a tiene a $-\infty$, $a = -1, -2, -3, -6, -20, \ldots$.

Ejemplo 21

El siguiente esquema representa el comportamiento de las rectas cuando $a < -1$. Si a se hace muy pequeño "$a \to -\infty$", entonces la gráfica se acerca más al eje y. Si a se acerca a -1 por abajo,"$a \to -1^-$ $(a < -1)$", entonces la gráfica se acerca más a la gráfica de $y = -x$.



3.2.2. Rectas con $-1 < a < 0$



Ejemplo 22

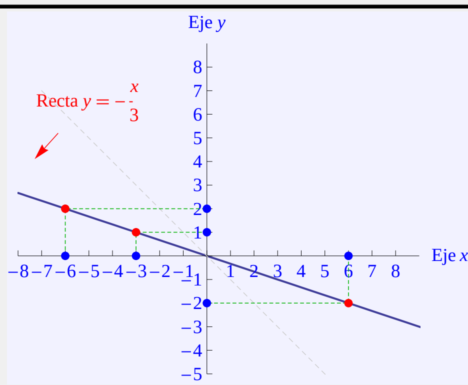
Recta con $a = -\dfrac{1}{2}$, es decir $y = -\dfrac{1}{2}x$, quiere decir que el valor de y es la mitad el valor de x con signo contrario.

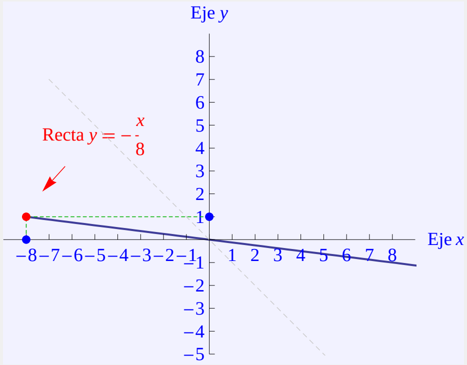
x	y
-6	3
-2	1
4	2

Ejemplo 23

Recta con $a = -\dfrac{1}{3}$, es decir $y = -\dfrac{1}{3}x$, quiere decir que el valor de y es la tercera parte del valor de x con signo contrario.

x	y
-6	2
-3	1
6	-2





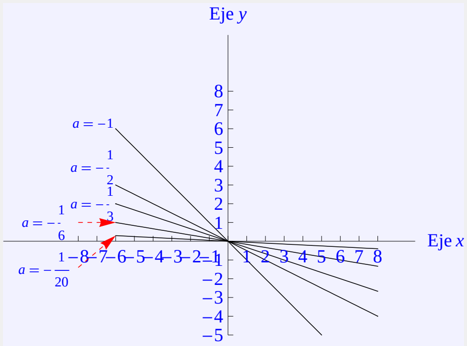
Ejemplo 24

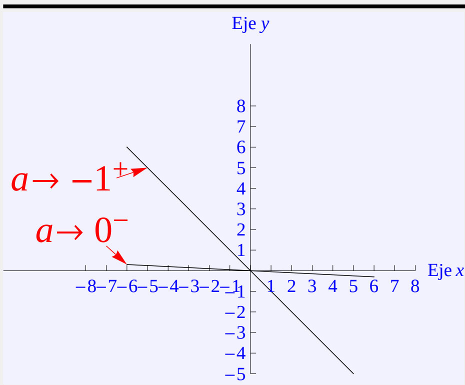
Recta con $a = -\frac{1}{8}$, es decir $y = -\frac{1}{8}x$, quiere decir que el valor de y es la octava parte el valor de x con signo contrario.

x	y
-8	1
8	-1
16	-2

Ejemplo 25

En esta figura observamos como la recta se aproxima más al eje x cada vez que a se acerca más al cero por abajo($a < 0$), $a = -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{20}, \ldots$.



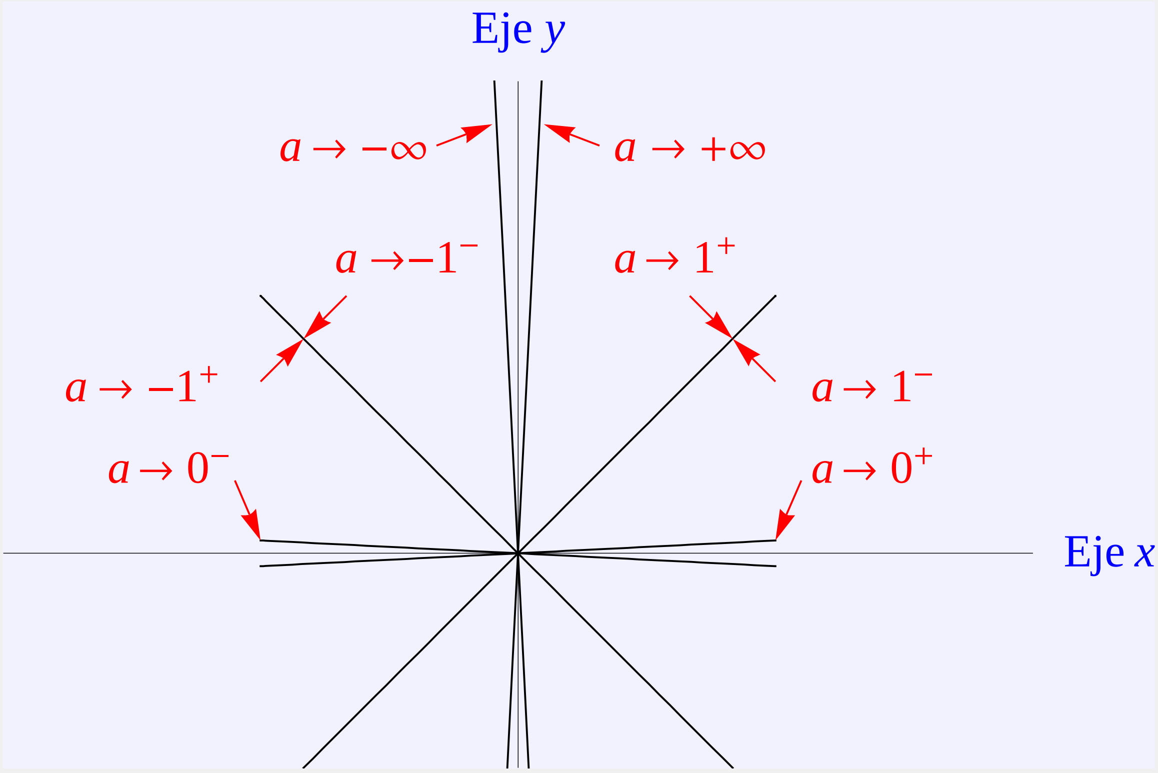


Ejemplo 26

El siguiente esquema representa el comportamiento de las rectas cuando $-1 < a < 0$. Si a se acerca al cero "$a \to 0^-$", entonces la gráfica se acerca al eje x. Si a se acerca a -1 por arriba,"$a \to -1^+$", entonces la gráfica se acerca más a la gráfica de $y = -x$.

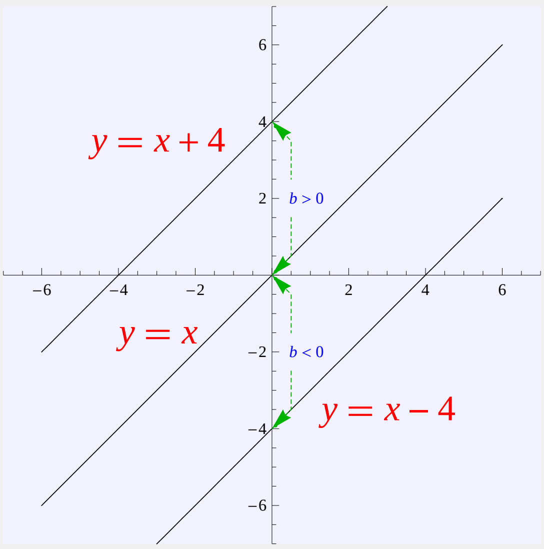
Ejemplo 27

Todos los casos anteriores se representan en la siguiente figura:



4

Recta de la forma $y = x + b$

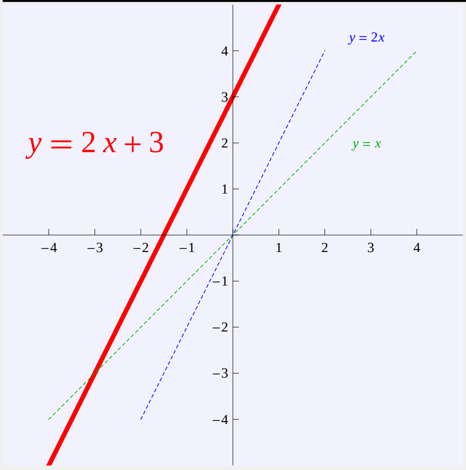


Ejemplo 28

La recta $y = x + b$, simplemente se desplaza sobre el eje y tanto como b. Si b es positivo, entonces la recta se desplaza hacia arriba del cero. Si b es negativo, entonces la recta se desplaza hacia abajo del cero.

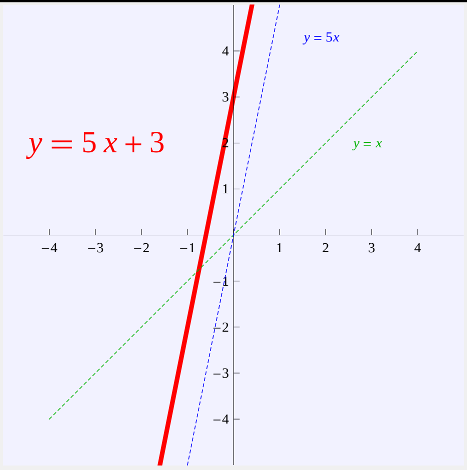
5

Recta con ecuación $y = ax + b$



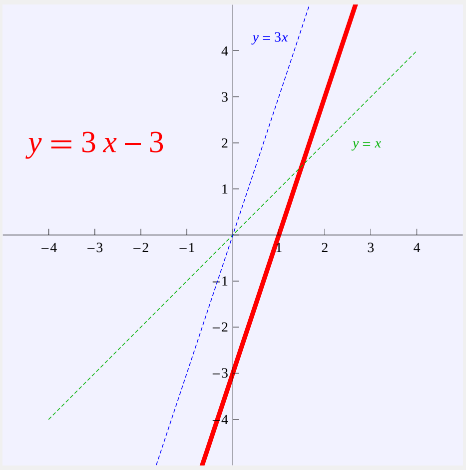
Ejemplo 29

Gráfica de la recta $y = 2x + 3$. A partir de la recta $y = x$, primero se gira hacia el eje y para obtener $y = 2x$, en seguida se levanta según $b = 3$, para llegar finalmente a $y = 2x + 3$.



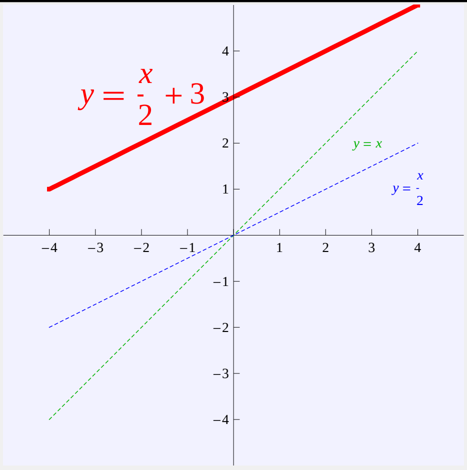
Ejemplo 30

Gráfica de la recta $y = 5x + 3$. A partir de la recta $y = x$, primero se gira hacia el eje y para obtener $y = 5x$, en seguida se levanta según $b = 3$, para obtener finalmente $y = 5x + 3$.



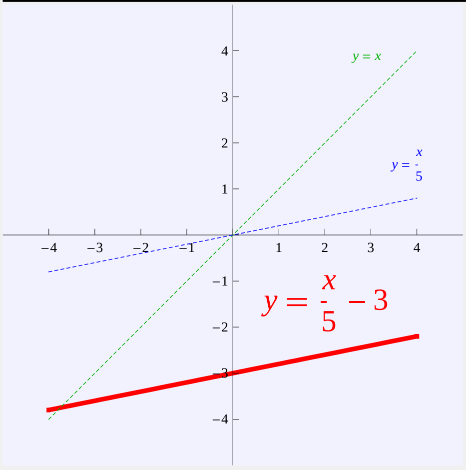
Ejemplo 31

Gráfica de la recta $y = 3x - 3$. A partir de la recta $y = x$, primero se gira hacia el eje y para obtener $y = 3x$, en seguida se baja según $b = -3$, para obtener $y = 3x - 3$.



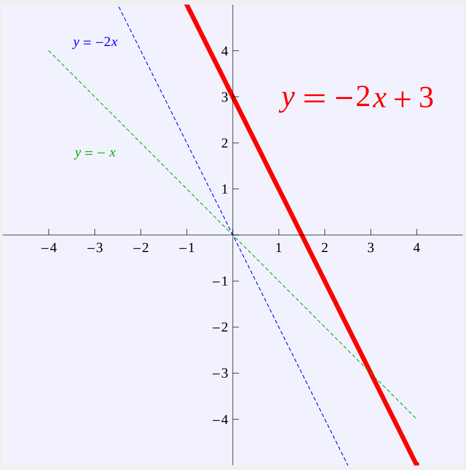
Ejemplo 32

Gráfica de la recta $y = \dfrac{x}{2} + 3$. A partir de la recta $y = x$, primero se gira hacia el eje x para obtener $y = \dfrac{x}{2}$, en seguida se levanta $b = 3$, para obtener finalmente $y = \dfrac{x}{2} + 3$.



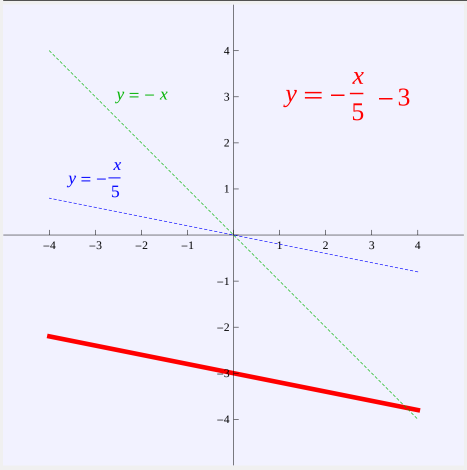
Ejemplo 33

Gráfica de la recta $y = \dfrac{x}{5} - 3$. A partir de la recta $y = x$, primero se gira hacia el eje x para obtener $y = \dfrac{x}{5}$, en seguida se baja según $b = -3$, para obtener finalmente $y = \dfrac{x}{5} - 3$.



Ejemplo 34

Gráfica de la recta $y = -2x + 3$, a partir de la recta $y = -x$, primero se gira hacia el eje y para obtener $y = -2x$, en seguida se levanta según $b = 3$, para obtener finalmente $y = -2x + 3$.



Ejemplo 35

Gráfica de la recta $y = -\dfrac{x}{5} - 3$, a partir de la recta $y = -x$, primero se gira hacia el eje x para obtener $y = -\dfrac{x}{5}$, en seguida se baja según $b = 3$, para obtener $y = -\dfrac{x}{5} - 3$.

6

Ecuación de la recta dada la pendiente y un punto

La ecuación de la recta de la forma $y = ax + b$, es la ecuación donde se conoce la pendiente, que es a, y la distancia dónde la recta interseca al eje y que es b.

Toda recta tiene una representación de la forma

$$y = ax + b$$

Si se conoce la pendiente de la recta a y un punto (x_1, y_1), entonces la ecuación es:

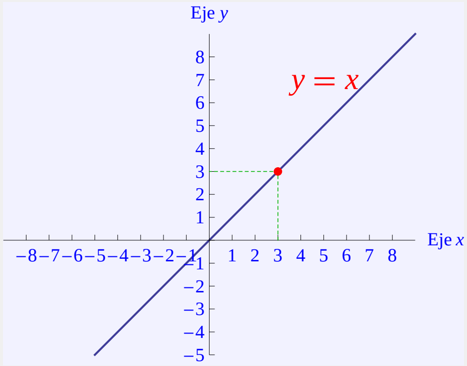
$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

La pendiente a nos dice que tipo de inclinación tiene la recta, el número b nos dice que tanto subimos o bajamos a la recta. Así sabemos que tipo de gráfica es de acuerdo al capítulo anterior.

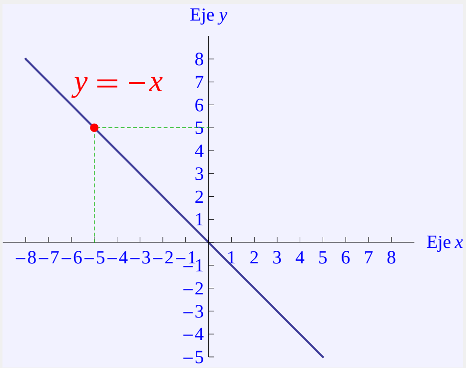
Ejemplo 36

¿Cuál es la ecuación y la gráfica de la recta con pendiente $a = 1$ que pasa por el punto $(3, 3)$?
La ecuación es $y - 3 = 1(x - 3)$, equivalentemente:

$$\begin{aligned} y - 3 &= 1(x-3) \\ y &= x - 3 + 3 \\ y &= x \end{aligned}$$



Ejemplo 37



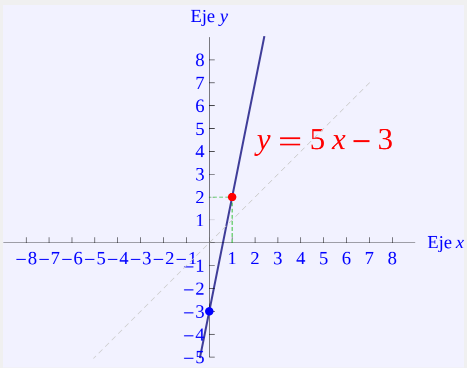
¿Cuál es la ecuación y la gráfica de la recta con pendiente $a = -1$ que pasa por el punto $(5, -5)$?
La ecuación es $y - (-5) = -1(x - 5)$, equivalentemente:

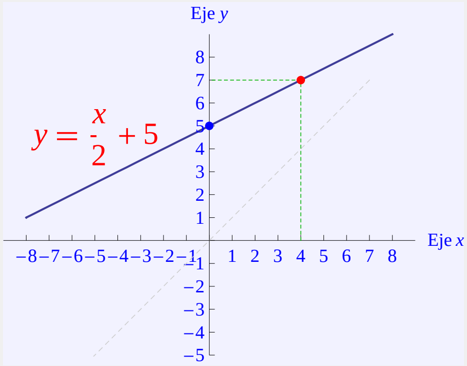
$$\begin{aligned} y + 5 &= -1(x-5) \\ y &= -x + 5 - 5 \\ y &= -x \end{aligned}$$

Ejemplo 38

¿Cuál es la ecuación y la gráfica de la recta con pendiente $a = 5$ que pasa por el punto $(1, 2)$?
La ecuación es $y - 2 = 5(x - 1)$, equivalentemente:

$$\begin{aligned} y - 2 &= 5(x-1) \\ y &= 5x - 5 + 2 \\ y &= 5x - 3 \end{aligned}$$





Ejemplo 39

¿Cuál es la ecuación y la gráfica de la recta con pendiente $a = \frac{1}{2}$ que pasa por el punto $(4, 7)$?

La ecuación es $y - 7 = \frac{1}{2}(x - 4)$, equivalentemente:

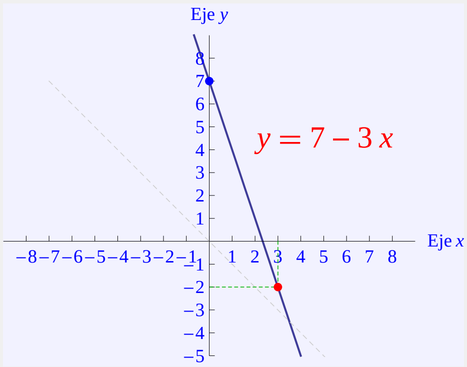
$$\begin{aligned} y - 7 &= \frac{1}{2}(x - 4) \\ y &= \frac{x}{2} - 2 + 7 \\ y &= \frac{x}{2} + 5 \end{aligned}$$

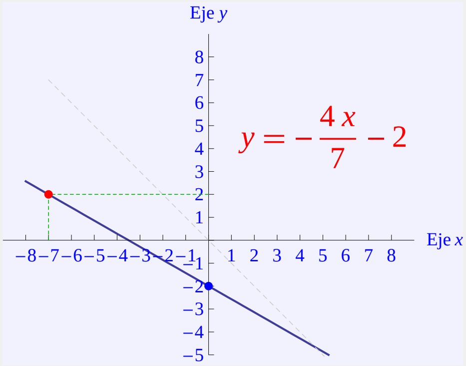
Ejemplo 40

¿Cuál es la ecuación y la gráfica de la recta con pendiente $a = -3$ que pasa por el punto $(3, -2)$?

La ecuación es $y - (-2) = -3(x - 3)$, equivalentemente:

$$\begin{aligned} y + 2 &= -3(x - 3) \\ y &= -3x + 9 - 2 \\ y &= -3x + 7 \end{aligned}$$





Ejemplo 41

¿Cuál es la ecuación y la gráfica de la recta con pendiente $a = -\frac{4}{7}$ que pasa por el punto $(-7, 2)$?

La ecuación es $y - 2 = -\frac{4}{7}(x - (-7))$, equivalentemente:

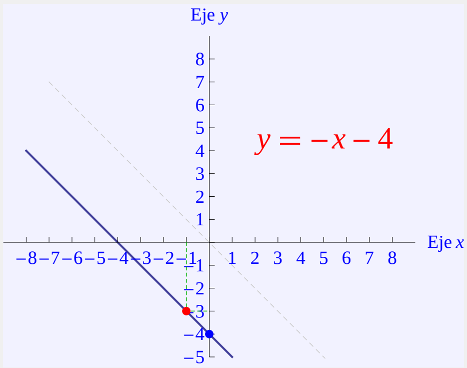
$$\begin{aligned} y - 2 &= -\frac{4}{7}(x + 7) \\ y &= -\frac{4}{7}x - 4 + 2 \\ y &= -\frac{4}{7}x - 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 42

¿Cuál es la ecuación y la gráfica de la recta con pendiente $a = -1$ que pasa por el punto $(-1, -3)$?

La ecuación es $y - (-3) = -1(x - (-1))$, equivalentemente:

$$\begin{aligned} y + 3 &= -1(x + 1) \\ y &= -x - 1 - 3 \\ y &= -x - 4 \end{aligned}$$



7

Ecuación de la recta dados dos puntos

Por dos puntos diferentes pasa siempre una y sólo una línea recta.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ es

$$y - y_1 = (\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1})(x - x_1)$$

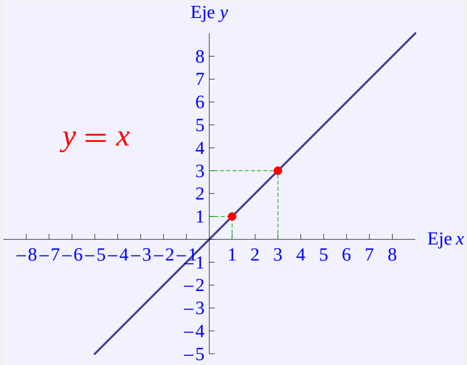
Observación: el orden de los puntos no es importante, sin embargo la pendiente se puede calcular como $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ó como $a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, pero no es lo mismo que $\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$, o $\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$

Ejemplo 43

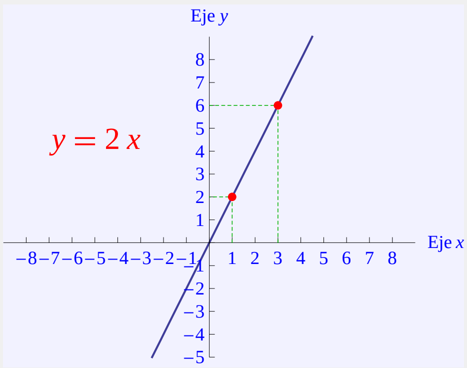
¿Cuál es la ecuación y la gráfica de la recta que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(3, 3)$?

La ecuación es $y - 1 = \dfrac{3-1}{3-1}(x-1)$, equivalentemente:

$$\begin{aligned} y - 1 &= 1(x-1) \\ y &= x - 1 + 1 \\ y &= x \end{aligned}$$



Ejemplo 44



¿Cuál es la ecuación y la gráfica de la recta que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(3, 6)$?

La ecuación es $y - 2 = \dfrac{6-2}{3-1}(x-1)$, equivalentemente:

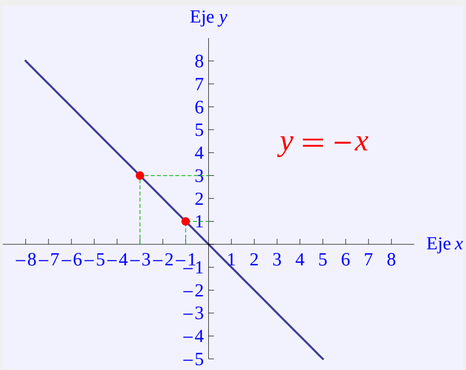
$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{4}{2}(x-1) \\ y &= 2x - 2 + 2 \\ y &= 2x \end{aligned}$$

Ejemplo 45

¿Cuál es la ecuación y la gráfica de la recta que pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(-3, 3)$?

La ecuación es $y - 1 = \dfrac{3-1}{-3-(-1)}(x - (-1))$, equivalentemente:

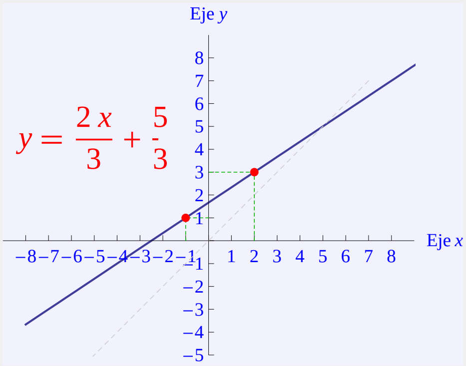
$$\begin{aligned} y - 1 &= \frac{2}{-2}(x+1) \\ y &= -1(x+1) + 1 \\ y &= -x - 1 + 1 \\ y &= -x \end{aligned}$$



Ejemplo 46

¿Cuál es la ecuación y la gráfica de la recta que pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(2, 3)$?
La ecuación es $y - 1 = \dfrac{3-1}{2-(-1)}(x - (-1))$, equivalentemente:

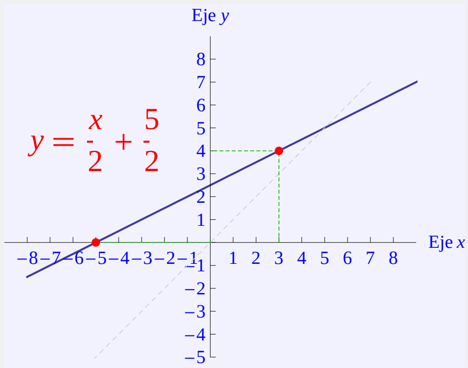
$$\begin{aligned} y - 1 &= \frac{2}{3}(x+1) \\ y &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} + 1 \\ y &= \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \end{aligned}$$



Ejemplo 47

¿Cuál es la ecuación y la gráfica de la recta que pasa por los puntos $(-5, 0)$ y $(3, 4)$?
La ecuación es $y - 0 = \dfrac{4-0}{3-(-5)}(x - (-5))$, equivalentemente:

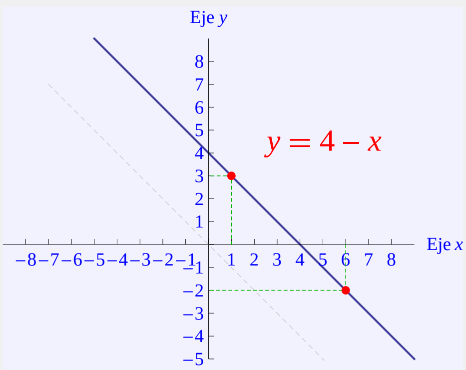
$$\begin{aligned} y &= \frac{4}{8}(x+5) \\ y &= \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{aligned}$$



Ejemplo 48

¿Cuál es la ecuación y la gráfica de la recta que pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(6, -2)$?
La ecuación es $y - 3 = \dfrac{-2-3}{6-1}(x - 1)$, equivalentemente:

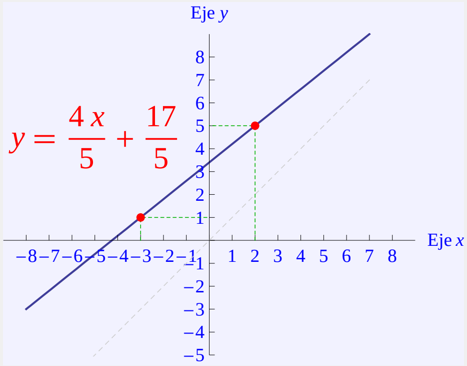
$$\begin{aligned} y - 3 &= \frac{-5}{5}(x-1) \\ y &= -x + 1 + 3 \\ y &= -x + 4 \end{aligned}$$



Ejemplo 49

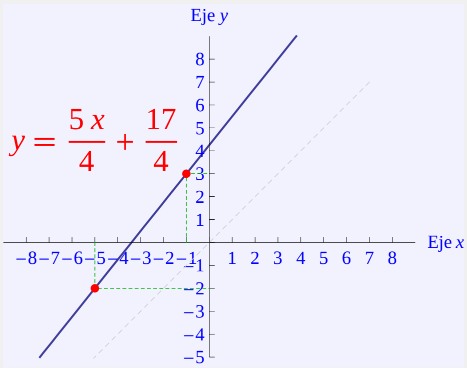
¿Cuál es la ecuación y la gráfica de la recta que pasa por los puntos $(-3, 1)$ y $(2, 5)$?
La ecuación es $y - 5 = \dfrac{5-1}{2-(-3)}(x-2)$, equivalentemente:

$$\begin{aligned} y - 5 &= \frac{4}{5}(x-2) \\ y &= \frac{4}{5}x - \frac{8}{5} + 5 \\ y &= \frac{4}{5}x + \frac{17}{5} \end{aligned}$$



Ejemplo 50

¿Cuál es la ecuación y la gráfica de la recta que pasa por los puntos $(-5, -2)$ y $(-1, 3)$?
La ecuación es $y - (-2) = \dfrac{3-(-2)}{-1-(-5)}(x - (-5))$, equivalentemente:



$$\begin{aligned} y + 2 &= \frac{5}{4}(x+5) \\ y + 2 &= \frac{5}{4}x + \frac{25}{4} \\ y &= \frac{5}{4}x + \frac{25}{4} - 2 \\ y &= \frac{5}{4}x + \frac{17}{4} \end{aligned}$$

8

Ejercicios

1. Bosquejar la graficar de la línea que tiene por ecuación: $y = 2x - 3$.
2. Bosquejar la graficar de la línea que tiene por ecuación: $y = 2/3x - 1/2$.
3. Bosquejar la graficar de la línea que tiene por ecuación: $y = -3x + 2$.
4. Bosquejar la graficar de la línea que tiene por ecuación: $y = 8x - 4$.
5. Bosquejar la graficar de la línea que tiene por ecuación: $y = 10x - 1/2$.
6. Bosquejar la graficar de la línea que tiene por ecuación:: $y = -2x - 2$.
7. Bosquejar la graficar de la línea que tiene por ecuación: $y = -5x + 8$.
8. Bosquejar la graficar de la línea que tiene por ecuación: $y = 6x - 3$.
9. Bosquejar la graficar de la línea que tiene por ecuación: $y = -7/3x - 3/5$.
10. Bosquejar la graficar de la línea que tiene por ecuación: $y = -11/7x - 8/3$.
11. Bosquejar la graficar de la línea que tiene por ecuación: $2x + y = 2$.
12. Bosquejar la graficar de la línea que tiene por ecuación: $5x - 3y = -7$.
13. Bosquejar la graficar de la línea que tiene por ecuación: $-3x - 8y = -11$.
14. Bosquejar la graficar de la línea que tiene por ecuación: $1/3x - 1/3y = 1/4$.
15. Bosquejar la graficar de la línea que tiene por ecuación: $x + y = 1/5$.
16. Bosquejar la graficar de la línea que tiene por ecuación: $-1/3x + 8/7y = 2$.
17. Bosquejar la graficar de la línea que tiene por ecuación: $2/3x - 3/2y = 3$.
18. Bosquejar la graficar de la línea que tiene por ecuación: $8/3x + 3/5y = -23$.
19. Bosquejar la graficar de la línea que tiene por ecuación: $-2x - 2/5y = -1/7$.

20. Bosquejar la graficar de la línea que tiene por ecuación: $11/32x+52/31y = 17/12$.
21. Encontrar la ecuación de la recta que es paralela a la recta $y = 2x$ y pasa por el punto $(2, 3)$, además bosquejear su gráfica.
22. Encontrar la ecuación de la recta que es paralela a la recta $y = -3x$ y pasa por el punto $(-1, -5)$, además bosquejear su gráfica.
23. Encontrar la ecuación de la recta que es paralela a la recta $y = -1/2x$ y pasa por el punto $(3, 5)$, además bosquejear su gráfica.
24. Encontrar la ecuación de la recta que es paralela a la recta $2x - 3y = 1$ y pasa por el punto $(1, -1)$, además bosquejear su gráfica.
25. Encontrar la ecuación de la recta que es paralela a la recta $-3x - 6y = 1/7$ y pasa por el punto $(1/3, -4/5)$, además bosquejear su gráfica.

MathCon

The Mathematics Firm

www.math.com.mx
José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx