CONJUNTOS NUMÉRICOS

Todo es real y sencillo, aún lo imaginario y complejo

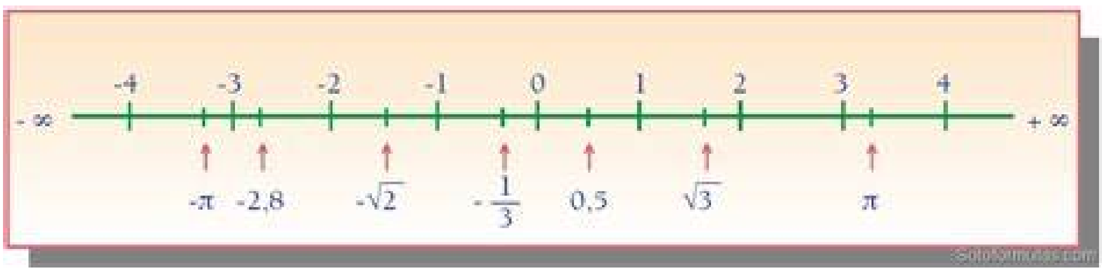
En la Italia renacentista de comienzos del siglo XVI uno de los espectáculos callejeros más populares en la ciudad universitaria de Bolonia eran los duelos. Pero no solo los de espadas. También había combates puramente intelectuales.
Se trataba de desafíos matemáticos, en los que dos o más expertos batallaban por encontrar la solución a un problema. El duelo se llevaba a cabo en plazas públicas y era seguido por miles de habitantes.
Fue en esta época que algunos matemáticos italianos se empezaron a dar cuenta de que algunas ecuaciones eran imposibles de resolver……

Ante la necesidad de avanzar en sus conocimientos, el hombre necesitó ir ampliando el universo de los conjuntos numéricos y así llegaste a conocer, hasta ahora, al conjunto de los números reales

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Números naturales}: N\\ 0\,(\text{cero})\\ \text{Números negativos}\end{array}\right\}\text{Números enteros}: Z\\ \text{Números fraccionarios}\end{array}\right\}\text{Números racionales}: Q\\ \text{Números irracionales}: I\end{array}\right\}\text{Números reales}: R$$

Los **números racionales** (formados por todos aquellos que pueden escribirse como el cociente de dos enteros, es decir, a/b, con b distinto de cero) unidos a los **números irracionales** (números con infinitas cifras decimales no periódicas) forman el conjunto de los NÚMEROS REALES. El conjunto de los reales (IR) al igual que el de los racionales (Q) es denso (o sea que entre dos reales siempre existe otro real), pero se diferencia de Q, en que, mientras en el conjunto de los racionales quedaban "huecos" en la recta numérica, en los números reales esos huecos han sido ocupados por los irracionales, con lo que podemos afirmar que los reales cubren toda la recta numérica, es decir que:

"A cada número real le corresponde un punto sobre la recta y a cada punto de la recta numérica le corresponde un número real".



¡Ahora a trabajar!

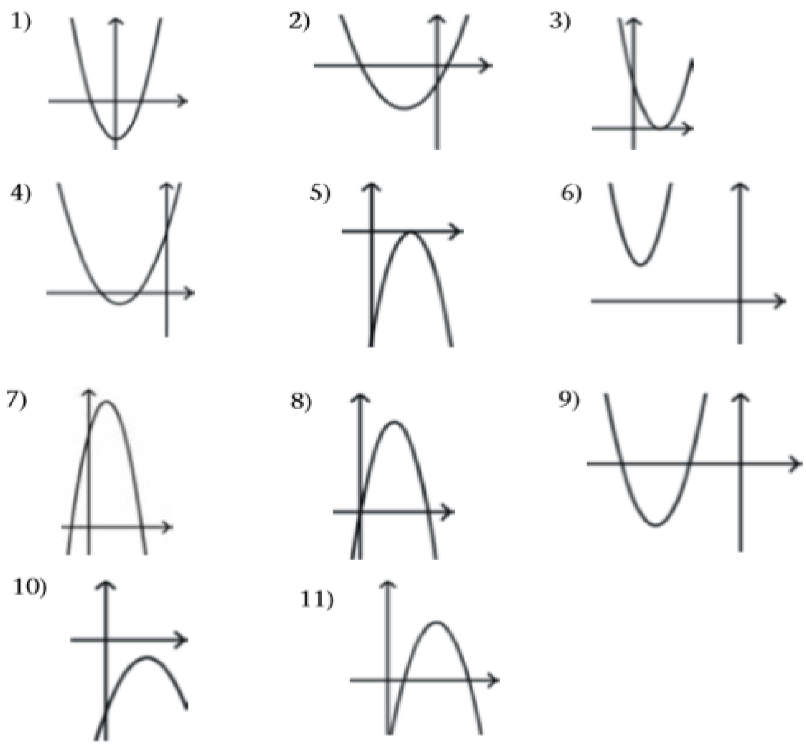
Actividad 1: Identifica cada uno de los números con los conjuntos a los que pertenecen

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
$9,5$					
-6					
45					
$0,333333...$					
$\sqrt{-16}$					
$0,1223334444...$					
$\sqrt{25}$					
$-\frac{3}{2}$					

Actividad 2: Analizando los parámetros indica que gráfica le corresponde a cada una de las siguientes funciones

$f(x) = (x - 2)^2$ $\quad g(x) = (x + 5)^2 - 4$ $\quad h(x) = -(x - 3)^2 + 4$

$t(x) = 2\ (x + 5)^2 + 2$ $\quad k(x) = 4 - (2x - 1)^2$



Si necesitas puedes ver los siguientes videos sobre las formas de la función cuadrática:

- ✔ Forma polinómica
- ✔ Forma canónica
- ✔ Forma factorizada

Actividad 3: Calcula las raíces de las seis funciones

Si necesitas ayuda puedes seguir el siguiente enlace **¿Cómo resolver ecuaciones cuadráticas?**

CONCLUSIÓN:

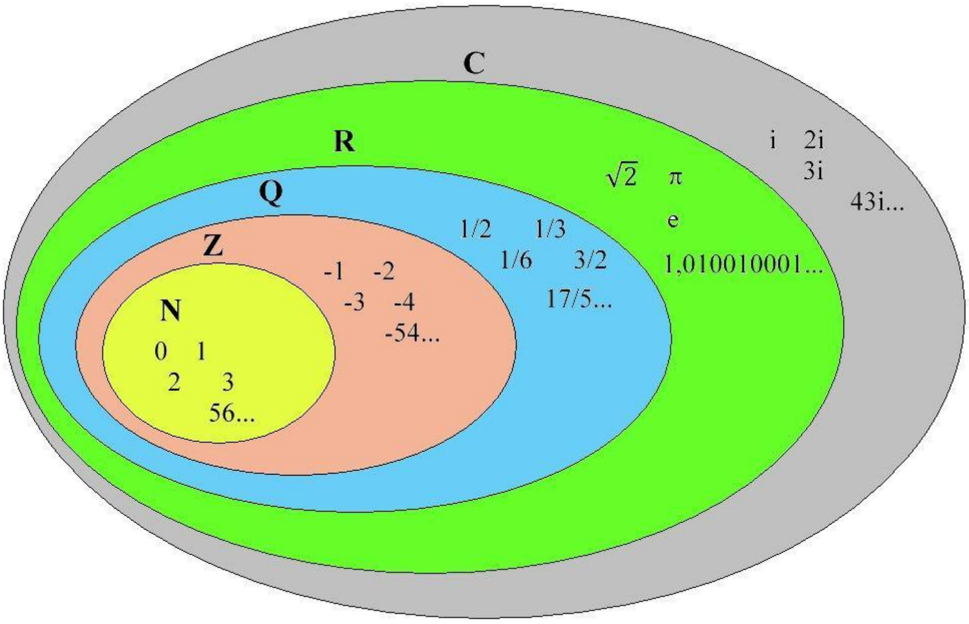
Actividad 4: Pensemos en el siguiente problema "***dado un segmento de 10 unidades, dividirlo en dos partes, de manera tal que, el área que se obtenga de esas dos partes sea de 40 unidades cuadradas***". Trata de resolverlo

La solución debía ser fácil. Si una parte es "x" la otra parte es "y = x-10", tal que x.y = 40. Reemplazando: x.(10-x) = 40, operando $x^2 - 10x + 40 = 0$.

Al resolver la ecuación queda $x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-15}$. A tales soluciones el filósofo y matemático alemán Descartes (1596-1650) las llamó ***imposibles o imaginarios***, y en 1637 dedujo que las soluciones no reales de las ecuaciones, son números de la forma a+b**i**, con a y b reales.

Fue Karl F. Gauss (1777-1855) físico, matemático y astrónomo alemán quien usó los números complejos en forma realmente confiable y científica. En 1799 demostró que las soluciones de cualquier ecuación algebraica de cualquier grado, pertenecen a un conjunto de números que él llamo **complejos**, y que este conjunto estaba formado por un número ordinario (número real) más un múltiplo de la raíz cuadrada de –1, llamado unidad imaginaria.

Quizás todo esto suena como algo completamente abstracto y sin utilidad real, que solo podría interesarle a intelectuales que viven en el mundo de las ideas, pero eso está lejos de la realidad.
En el siglo XX, los números imaginarios empezaron a tener muchos usos prácticos, permitiendo a ingenieros y físicos, entre otros, resolver problemas que de otra forma no hubieran tenido solución.
Hoy estos números imaginarios y complejos están detrás de algunas de las tecnologías más esenciales que usamos.
Resultaron especialmente valiosos cuando se inventó la electricidad, ya que son muy útiles para analizar cualquier cosa que se expresa en ondas (como las ondas eléctricas).
La ingeniería eléctrica utiliza números complejos, en los que "i" es usado para indicar la amplitud y la fase de una oscilación eléctrica.
Sin estos números, no se hubiera podido desarrollar las telecomunicaciones. No existiría la radio, la televisión e internet y hoy no estarías leyendo esto en tu computadora, tablet o celular.
Los números imaginarios también permitieron todo tipo de desarrollos tecnológicos y científicos, desde el radar y el GPS hasta la resonancia magnética y las neurociencias.
La física cuántica reduce todas las partículas a formas de onda, lo que significa que los números complejos son fundamentales para comprender ese extraño mundo.
No sólo podrían ser clave para el futuro, sino que algunos creen que eventualmente podrían servir para responder una de las grandes incógnitas que siguen dejando perplejos a los científicos: ¿qué pasó antes del Big Bang y cuándo empezó realmente el tiempo? (enlace al artículo completo)



NÚMEROS COMPLEJOS

Como dijimos, la noción de número complejo aparece ante la imposibilidad de los números reales de abarcar a las raíces de orden par del conjunto de los números negativos.

Entonces, $\sqrt{-\ 4}$ no tiene solución real ¿cómo lo solucionamos?

$\sqrt{-4} \;=\; \sqrt{4}.\,\sqrt{(-1)} \;=\; 2\,i \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(-1)} \;=\; i$ definiendo la **UNIDAD IMAGINARIA**

Potencias de i

$$i^1 = i$$
$$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$
$$i^3 = i \cdot i^2 = -i$$
$$i^4 = i \cdot i^3 = -i \cdot i =$$
$$= -i^2 = -(-1) = 1$$

Calcula ahora las siguientes potencias de i

$i^5 =$ $\qquad$ $i^6 =$

$i^7 =$ ____ $i^8 =$

¿Observas alguna regularidad? ¿Cómo haríamos para calcular i^{764} ?

Los valores **se repiten de cuatro en cuatro**, por eso, para saber cuánto vale una determinada potencia de i, se divide el exponente entre 4, y el resto es el exponente de la potencia equivalente a la dada.

i^{22}

$$\begin{array}{r|l} 22 & 4 \\ \hline 2 & 5 \end{array}$$

$i^{22} = (i^4)^5 \cdot i^2 = -1$

$i^{27} = -i$

Definición de número complejo

Un número complejo z se define como un par ordenado de números reales:

$$z = (a,\ b)\ con\ a\ y\ b \in R$$

donde el primer elemento del par ordenado se llama parte real del número complejo, y el segundo elemento se llama parte imaginaria:

$$Re\,(z) = a \qquad\qquad Im\,(z) = b$$

Podemos identificar de manera natural los complejos de parte imaginaria nula con los **NÚMEROS REALES**:

$$(a, 0)\ \in C \leftrightarrow a\ \in R$$

Por otra parte, los números de parte real nula: $z = (0, b)$ se denominan **IMAGINARIOS PUROS.** Se define la unidad imaginaria:

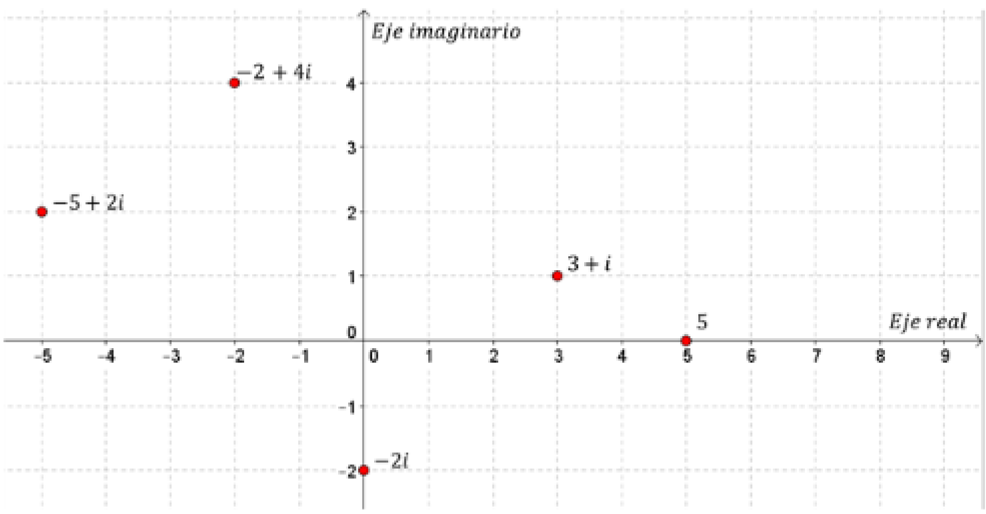
$i = (0, 1)$ **unidad imaginaria**

Podemos entonces deducir otra forma de expresar un número complejo:

$$z = (a, b) = a\,\underbrace{(1{,}0)}_{1} + b\,\underbrace{(0{,}1)}_{i}$$ entonces $z = a + b\,i$ **forma binómica**

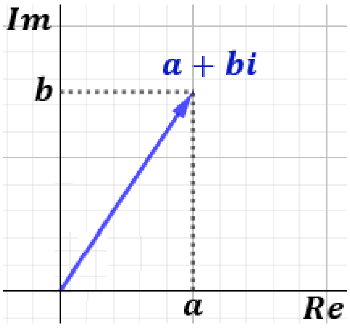
Representación gráfica de números complejos

Dado que hemos definido al número complejo como un par ordenado de números reales, es natural interpretarlo como un punto en el plano. En el eje de abscisas (eje real) ubicamos los complejos de parte imaginaria nula (reales) y en el eje de ordenadas (eje imaginario) los imaginarios puros.



Otra forma de representarlos es hacerlo como vectores en el plano. El plano se denomina en este caso, **plano complejo**

El complejo $z = a + bi$ se representa como el vector con coordenadas (a, b):

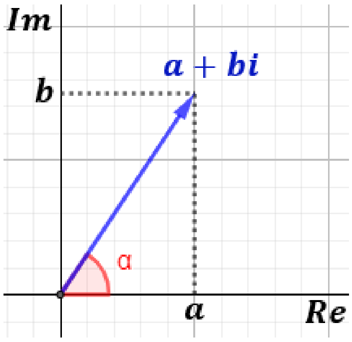


- El eje horizontal es el eje real.
- El eje vertical es el eje imaginario.

<u>Módulo y argumento de un número complejo</u>

La longitud del vector se denomina **módulo** del complejo z.

El ángulo que forma el vector con la parte positiva del eje real se denomina **argumento** del complejo z



Dado un número complejo en forma binómica $z = a + b\,i$, se define

el módulo de z como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

y a su argumento como $arg(z) = atan\,(b/a)$, con $a \neq 0$

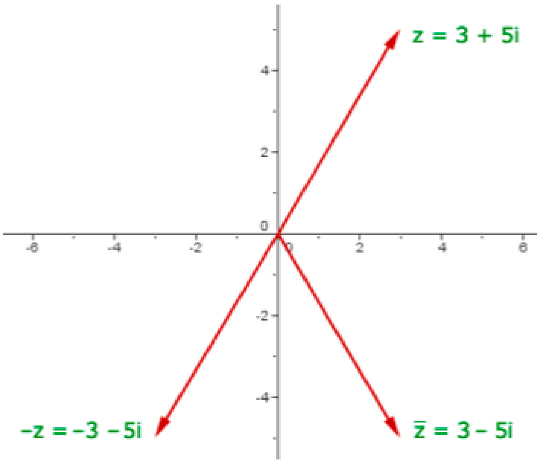
¿Cuál es el módulo del complejo -7 -3i?

Conjugado y opuesto de un complejo

Dado un número complejo $z = a + b\,i$

se define a su **CONJUGADO** como $\bar{z} = a - bi$

y se define a su **OPUESTO** como $-z = -a - b\,i$



Operaciones en el conjunto de los complejos

★ SUMA Y RESTA

Sean z y w dos complejos dados en su forma binómica:

$$\begin{aligned} z &= a + b \cdot i \\ w &= c + d \cdot i \end{aligned}$$

La **suma** de los complejos z y w es un número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales y cuya parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias:

$$\begin{aligned} &z + w = \\ &= (a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) = \\ &= (a + c) + (b + d) \cdot i \end{aligned}$$

La **resta** es análoga, pero restando:

$$\begin{aligned} &z - w = \\ &= (a + b \cdot i) - (c + d \cdot i) = \\ &= (a - c) + (b - d) \cdot i \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\boldsymbol{z = 1 + 5 \cdot i}$$
$$\boldsymbol{w = 2 - 3 \cdot i}$$

Calculamos la suma $z + w$:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{z + w =} \\ &\boldsymbol{=(1 + 5 \cdot i) + (2 - 3 \cdot i) =} \\ &\boldsymbol{=(1 + 2) + (5 - 3) \cdot i =} \\ &\boldsymbol{=3 + 2 \cdot i} \end{aligned}$$

Calculamos la resta $z - w$:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{z - w =} \\ &\boldsymbol{=(1 + 5 \cdot i) - (2 - 3 \cdot i) =} \\ &\boldsymbol{=(1 - 2) + \big(5 - (-3)\big) \cdot i =} \\ &\boldsymbol{=-1 + 8 \cdot i} \end{aligned}$$

★ MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

La **multiplicación** de los complejos z y w se define como

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{z \cdot w =} \\ &\boldsymbol{=(a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) =} \\ &\boldsymbol{=(a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot i} \end{aligned}$$

Nota: para obtener la fórmula puedes calcular el producto como si fuera un producto de binomios teniendo en cuenta que $i^2 = -1$

Para **dividir** dos números complejos debemos multiplicar numerador y denominador (dividendo y divisor) por el conjugado del denominador.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$$\frac{3+2i}{1-2i} = \frac{(3+2i)\cdot(1+2i)}{(1-2i)\cdot(1+2i)} = \frac{3+6i+2i+4i^2}{1-(2i)^2} = \frac{3+8i-4}{1+4} = -\frac{1}{5} + \frac{8}{5}i$$

★ POTENCIA DE COMPLEJOS

¿Cómo resolverías $(2 - 5i)^3$?

Propiedades de los números complejos

➢ Propiedades de las operaciones

1. $z + w = w + z$ y $zw = wz$
2. $v + (w + z) = (v + w) + z$ y $v(wz) = (vw)z$
3. $v(w + z) = vw + vz$ y $(w + z)v = wv + zv$
4. $z + 0 = 0 + z = z$
5. $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$
6. $z + (-z) = 0$
7. $z \cdot z^{-1} = 1$

➢ Propiedades del conjugado

1) $\overline{\left(\overline{z}\right)} = z$

2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

4) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

5) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

6) $\overline{z^{-1}} = \left(\overline{z}\right)^{-1}$

7) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z)$

8) $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}\,(z)$

Ejercitación

1- Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado

a) $(6-5i)+(2-i)-2(-5+6i)$

b) $(2-3i)-(5+4i)+\frac{1}{2}(6-4i)$

c) $(3+2i)(4-2i)$

d) $(2+3i)(5-6i)$

e) $(-i+1)(3-2i)(1+3i)$

f) $\dfrac{2+4i}{4-2i}$

g) $\dfrac{1-4i}{3+i}$

h) $\dfrac{4+4i}{-3+5i}$

i) $\dfrac{5+i}{-2-i}$

j) $\dfrac{4-2i}{i}$

k) $6-3\left(5+\dfrac{2}{5}i\right)$

l) $\dfrac{(-3i)^2(1-2i)}{2+2i}$

2- De los siguientes números complejos z, calcula $-z$, $\bar{z}$, $-\bar{z}$, $i\,\bar{z}$, iz, $\overline{iz}$

a) $z = 3 - 2i$ b) $z = 4i$ c) $z = -1 - i$

3- Resuelve los siguientes productos y cocientes

a) $(2-3i)(-2+6i)$ **b)** $(2i-3)(7+\frac{1}{5}i)$ **c)** $(\sqrt{3}+2i)(1-5i)$

d) $\dfrac{2-3i}{-2+6i}$ **e)** $\dfrac{6+4i}{-1-2i}$ **f)** $\dfrac{-3i}{2i+3}$

g) $\dfrac{1}{3-4i}$ **h)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ **i)** $\dfrac{1-5i}{\sqrt{3}+2i}$

4- Encuentra x e y para que se verifique la siguiente igualdad

$$(x + 3i) + (2 - 5yi) = 6 - 4i$$

5- Un cuadrado tiene su vértice sobre el complejo (4, 0) encuentra los otros complejos que corresponden a los tres vértices faltantes

6- Calcular z en cada una de las expresiones

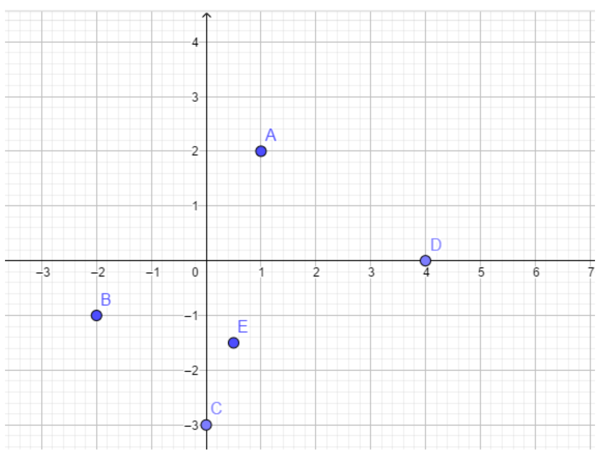
a) $z + (4 - 7i) = 7 - 5i$ b) $(3 + 2i).\, z = 26 - 13i$ c) $z/ (3 + i) = 2 - 2i$

7- Representa los siguientes complejos en el plano

a) $z_1 = 5 - 3i$ **b)** $z_2 = -3 + 4i$ **c)** $z_3 = 3i$ **d)** $z_4 = -2i$

e) $z_5 = 7 + \frac{1}{2}i$ **f)** $z_6 = -\frac{3}{2} - i$ **g)** $z_7 = 5$ **h)** $z_8 = -6$

8- Indicar qué complejo representa cada punto en el plano



Enlace a lista de videos sobre los [NÚMEROS COMPLEJOS]