

2.3 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน

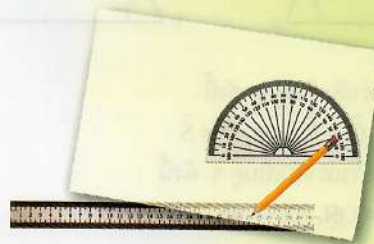
จากที่กล่าวมาแล้วว่า การตรวจสอบความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูป โดยทั่วไปจะต้องตรวจสอบการเท่ากันของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกัน 3 คู่ และการเท่ากันของขนาดของมุมคู่ที่สมนัยกันอีก 3 คู่ ต่อไปนักเรียนจะได้เห็นว่า เราสามารถตรวจสอบการเท่ากันของความยาวของด้านหรือขนาดของมุมเพียง 3 คู่ ตามเงื่อนไขที่กำหนด ก็เป็นการเพียงพอที่จะสรุปได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ในหัวข้อนี้ จะกำหนดเงื่อนไขให้รูปสามเหลี่ยมสองรูป มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน ดังกิจกรรมต่อไปนี้

กิจกรรม : สืบรวจ ด้าน-มุม-ด้าน

อุปกรณ์

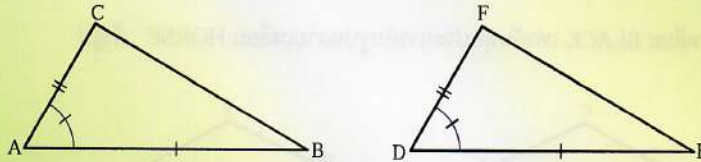
- ✦ โพรแทรกเตอร์
- ✦ ไม้บรรทัด
- ✦ ดินสอ
- ✦ กระดาษลอกลาย



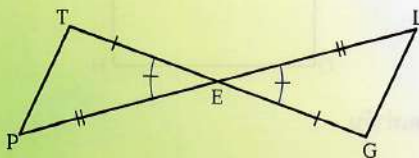
ขั้นตอนการทำกิจกรรม

กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อต่อไปนี้ มีด้านที่ยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมที่มีขนาดเท่ากัน 1 คู่ จงสำรวจว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปดังกล่าวเท่ากันทุกประการหรือไม่

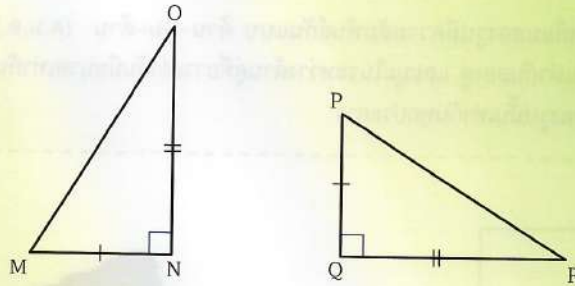
1.



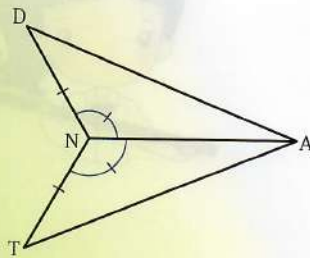
2.



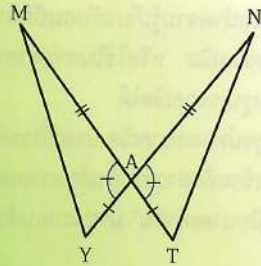
3.



4.



5.



ผลจากการสำรวจข้างต้น นักเรียนจะเห็นว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้ในแต่ละข้อเท่ากันทุกประการ และเมื่อพิจารณาจากรูปที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ จะเห็นว่าเป็นการกำหนดด้านที่ยาวเท่ากันสองคู่ และมุมที่มีขนาดเท่ากันหนึ่งคู่ โดยมุมคู่นั้นเป็นมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน ซึ่งกล่าวว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีความสัมพันธ์กันแบบ **ด้าน-มุม-ด้าน (Side-Angle-Side)** หรือเขียนย่อ ๆ ว่า **ด.ม.ด. (SAS)** และผลที่ได้ตามมาคือ ด้านที่เหลืออีกหนึ่งคู่ จะยาวเท่ากัน และมุมที่เหลืออีกสองคู่ จะมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ



มุมเทคโนโลยี

นักเรียนสามารถดาวน์โหลดไฟล์ GSP เพื่อสำรวจเพิ่มเติมเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน-มุม-ด้าน ได้ที่ <http://ipst.me/9143>



โดยทั่วไป รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด.ม.ด. จะเท่ากันทุกประการ ซึ่งเป็นไปตามสมบัติต่อไปนี้

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน (ด.ม.ด.) กล่าวคือ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

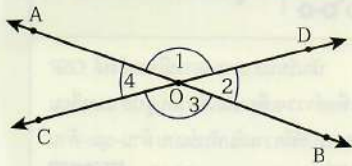


ชวนคิด 2.5

รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมีมุมคู่หนึ่งที่มีขนาดเท่ากัน แต่มุมคู่นี้ไม่อยู่ในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันนั้น รูปสามเหลี่ยมทั้งสองจะเท่ากันทุกประการหรือไม่



123 มุมคณิต



กำหนดให้ \overleftrightarrow{AB} และ \overleftrightarrow{CD} ตัดกันที่จุด O

เนื่องจาก $\angle AOB$ และ $\angle COD$ เป็นมุมตรง

จะได้ $\hat{1} + \hat{2} = 180^\circ$ และ $\hat{3} + \hat{4} = 180^\circ$

ดังนั้น $\hat{1} = \hat{3}$

ในทำนองเดียวกัน

จะได้ $\hat{2} + \hat{1} = 180^\circ$ และ $\hat{4} + \hat{1} = 180^\circ$

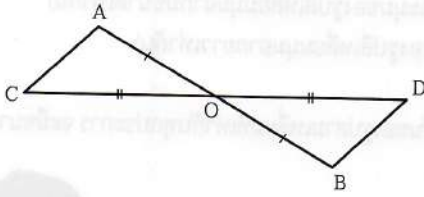
ดังนั้น $\hat{2} = \hat{4}$

นั่นคือ ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากัน

เราสามารถนำความรู้เกี่ยวกับสมบัติต่าง ๆ ข้างต้น มาใช้ในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต หรือใช้ในการหาความยาวของด้าน และขนาดของมุมของรูปเรขาคณิตได้

ในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต บางครั้งจะต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับขนาดของมุมตรงข้ามที่กล่าวว่า "ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากัน" มาประกอบด้วย ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 จากรูป กำหนดให้ \overline{AB} ตัดกับ \overline{CD} ที่จุด O ทำให้ $AO = BO$ และ $CO = DO$
จงพิสูจน์ว่า $\triangle AOC \cong \triangle BOD$



วิเคราะห์โจทย์ เพื่อหาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

กำหนดให้ \overline{AB} ตัดกับ \overline{CD} ที่จุด O ทำให้ $AO = BO$ และ $CO = DO$
ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle AOC \cong \triangle BOD$

พิสูจน์ พิจารณา $\triangle AOC$ และ $\triangle BOD$

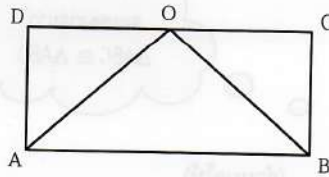
$$AO = BO \quad (\text{กำหนดให้})$$

$$\hat{AOC} = \hat{BOD} \quad (\text{ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน})$$

$$CO = DO \quad (\text{กำหนดให้})$$

$$\text{ดังนั้น } \triangle AOC \cong \triangle BOD \quad (\text{ด.ม.ด.})$$

ตัวอย่างที่ 2 $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และจุด O เป็นจุดกึ่งกลางของ \overline{DC} จงพิสูจน์ว่า $\hat{AOD} = \hat{BOC}$
แนวคิด จากโจทย์ที่กำหนดให้ เพื่อความสะดวกในการพิสูจน์ ให้สร้างรูปที่สอดคล้องกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้



กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และจุด O เป็นจุดกึ่งกลางของ \overline{DC}
ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{AOD} = \hat{BOC}$

จะพิสูจน์ก่อนว่า
 $\triangle AOD \cong \triangle BOC$

พิสูจน์

พิจารณา $\triangle AOD$ และ $\triangle BOC$

$$DO = CO$$

(กำหนดให้จุด O เป็นจุดกึ่งกลางของ \overline{DC})

$$\widehat{A}DO = \widehat{B}CO$$

(มุมภายในแต่ละมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีขนาดเท่ากัน)

$$AD = BC$$

(ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากยาวเท่ากัน)

$$\text{ดังนั้น } \triangle AOD \cong \triangle BOC$$

(ค.ม.ด.)

$$\text{จะได้ } \widehat{A}OD = \widehat{B}OC$$

(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

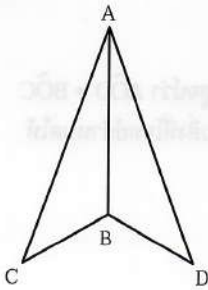


ชวนคิด 2.6

จากตัวอย่างที่ 2 รูปสามเหลี่ยม ABO เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด เพราะเหตุใด



ตัวอย่างที่ 3

จากรูป กำหนดให้ $BC = BD$ และ $\widehat{A}BC = \widehat{A}BD$ จงหาขนาดของ $\widehat{B}AD$ ถ้ากำหนดให้ $\widehat{A}BC = 120$ องศาและ $\widehat{A}BC + \widehat{B}AC = 140$ องศา

จะแสดงก่อนว่า
 $\triangle ABC \cong \triangle ABD$

วิธีทำ

พิจารณา $\triangle ABC$ และ $\triangle ABD$

$$BC = BD$$

(กำหนดให้)

$$\widehat{A}BC = \widehat{A}BD$$

(กำหนดให้)

$$AB = AB$$

(\overline{AB} เป็นด้านร่วม)

$$\text{ดังนั้น } \triangle ABC \cong \triangle ABD$$

(ค.ม.ด.)

$$\text{จะได้ } \widehat{B}AC = \widehat{B}AD$$

(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

$$\widehat{A}BC + \widehat{B}AC = 140$$

(กำหนดให้)

$$120 + \widehat{B}AC = 140$$

($\widehat{A}BC = 120^\circ$)

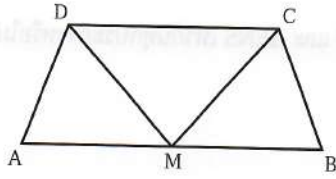
$$\text{ดังนั้น } \widehat{B}AC = 20^\circ$$

$$\text{จะได้ } \widehat{B}AD = 20^\circ$$

(สมบัติของการเท่ากัน)

ตอบ 20°

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว มีจุด M เป็นจุดกึ่งกลางของ \overline{AB} ดังรูป



ถ้า $DM = 5$ หน่วย จงหาความยาวของ \overline{CM}

123 | มุมคณิต

รูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันเพียงคู่เดียว และด้านที่ไม่ขนานกันยาวเท่ากัน ซึ่งทำให้มุมที่ฐานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน

จะแสดงก่อนว่า
 $\triangle ADM \cong \triangle BCM$

วิธีทำ พิจารณา $\triangle ADM$ และ $\triangle BCM$

$$AD = BC$$

(ด้านที่ไม่ขนานกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วยาวเท่ากัน)

$$\hat{M}AD = \hat{M}BC$$

(มุมที่ฐานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)

$$AM = BM$$

(กำหนดให้จุด M เป็นจุดกึ่งกลางของ \overline{AB})

ดังนั้น $\triangle ADM \cong \triangle BCM$

(ด.ม.ด.)

จะได้ $DM = CM$

(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)

$$DM = 5 \text{ หน่วย}$$

(กำหนดให้)

ดังนั้น $CM = 5 \text{ หน่วย}$

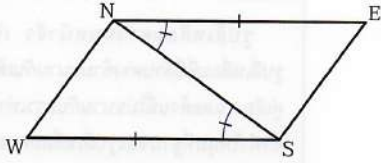
(สมบัติของการเท่ากัน)

ตอบ 5 หน่วย



แบบฝึกหัด 2.3

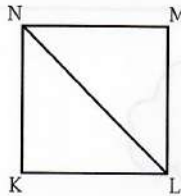
1.



จากรูป $\triangle WSN$ และ $\triangle ENS$ เท่ากันทุกประการหรือไม่ เพราะเหตุใด

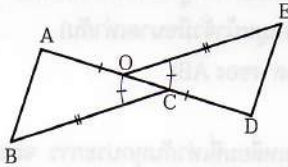


2.



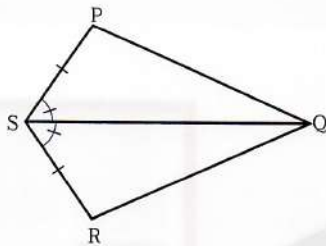
$\square KLMN$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มี \overline{NL} เป็นเส้นทแยงมุม จงพิสูจน์ว่า $\triangle NKL \cong \triangle LMN$

3.



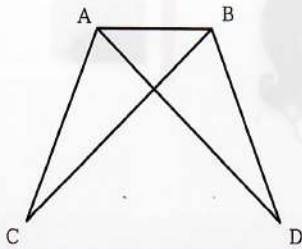
จากรูป กำหนดให้ $AC = DO$, $BC = EO$ และ $\widehat{ACB} = \widehat{D\hat{O}E}$ จงพิสูจน์ว่า $AB = DE$

4.



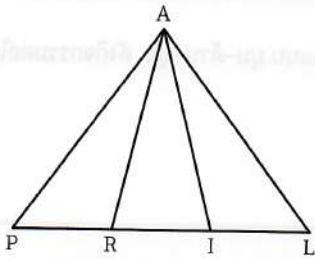
$\square PQRS$ มี \overline{SQ} เป็นเส้นทแยงมุม $PS = RS$ และ $\widehat{PSQ} = \widehat{RSQ}$ จงพิสูจน์ว่า $\widehat{SPQ} = \widehat{SRQ}$

5.



จากรูป กำหนดให้ $BC = AD$ และ $\widehat{ABC} = \widehat{BAD}$ ถ้า $\widehat{BAC} = 110^\circ$ จงหาขนาดของ \widehat{ABD}

6.

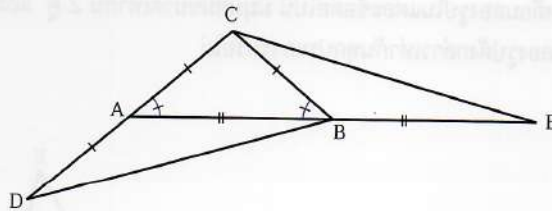


จากรูป จุด R และจุด I อยู่บน \overline{PL} ทำให้ $AI = AR$, $PR = LI$
และ $\widehat{ARI} = \widehat{AIR}$ ถ้า \overline{AP} ยาว 12 เซนติเมตร
จงหาความยาวของ \overline{AL}

7. กำหนดให้ $\square ABCD$ มี \overline{BD} และ \overline{AC} เป็นเส้นทแยงมุมซึ่งแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน และตัดกันที่จุด P จงหาว่า

- 1) ถ้า $AB = 6$ หน่วย แล้ว \overline{CD} ยาวกี่หน่วย
- 2) ถ้า $\widehat{DAP} = 40^\circ$ แล้ว \widehat{BCP} มีขนาดกี่องศา

8. จากรูป กำหนดให้ จุด A เป็นจุดกึ่งกลางของ \overline{DC} และจุด B เป็นจุดกึ่งกลางของ \overline{AE} , $\widehat{CAB} = \widehat{CBA} = 40^\circ$
และ $AC = BC$ ดังรูป



ถ้า $AC = 36$ หน่วย และ $CE = 86$ หน่วย จงหาว่า \overline{DB} ยาวเท่าใด