Sommes et produits

Pour 2 sommes à indices indépendants

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_i b_j$$

Indices appartenant à des ensembles

$$\prod_{p\in P} \sum_{k_{P.\mathrm{index}(p)}\in S(p)} a(k_{P.\mathrm{index}(p)}, p) = \sum_{\underline{K}\in E} \prod_{p\in P} a(\underline{K}[P.\,\mathrm{index}(p)], p)$$

Où $P.\,\mathrm{index}(p)$ est, pour P ordonné, la position de p dans cet ordre. E est le produit cartésien des ensembles $S(p)$ pour tous les p de P :

$$E = \prod_{p\in P} S(p)$$

$\underline{K}$ est un vecteur de $\#P$ composantes, les indices ordonnés de sommation $k_{P.\mathrm{index}(p)}$:

$$\underline{K} = (k_{P.\mathrm{index}(p)} \in S(p) | p \in P) \Rightarrow \forall \underline{K} \in E, \#\underline{K} = \#P$$

Ensembles d'indices appartenant à des ensembles

$$\prod_{\underline{p}\in P} \sum_{\underline{k}_{P.\mathrm{index}(\underline{p})}\in S(\underline{p})} a(\underline{k}_{P.\mathrm{index}(\underline{p})}, \underline{p}) = \sum_{\underline{\underline{K}}\in E} \prod_{\underline{p}\in P} a(\underline{\underline{K}}[P.\,\mathrm{index}(\underline{p})], \underline{p})$$

Avec E le produit cartésien défini par :

$$E = \prod_{\underline{p}\in P} S(\underline{p})$$

Sommes et sommes

Pour 2 sommes à indices dépendants : Pas simple

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{f(i)} a_i b_j$$

Pour intervertir i et j, encadrons d'abord j :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], j \in [\![1, f(i)]\!]$$

Donc finalement, j aura parcouru $[\![1, \max\big(f([\![1, n]\!])\big)]\!]$.

Puis, déterminons, pour j fixé, quels i a-t-il « connu » ?

Pour chaque i, j ne peut apparaître qu'une fois dans $[\![1, f(i)]\!]$. Il nous reste à déterminer pour quels $[\![1, f(i)]\!]$ est apparu j.

Le critère est $f(i) \geq j$.

Ainsi, en posant :

$$\forall j \in [\![1, \max\big(f([\![1, n]\!])\big)]\!], E(j) = \{i \in [\![1, n]\!] | f(i) \geq j\}$$

On obtient :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{f(i)} a_i b_j = \sum_{j=1}^{\max\left(f([\![1,n]\!])\right)} \sum_{i \in E(j)} a_i b_j$$

Application pour $f\colon i \mapsto i^2$ et $n = 3$

D'une part :

$$(1): \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i^2} a_i b_j = a_1b_1 + a_2(b_1+b_2+b_3+b_4) + a_3(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8+b_9)$$

D'autre part :

$$\sum_{j=1}^{\max(\{i^2|i\in[\![1,3]\!]\})} \sum_{i\in E(j)} a_i b_j = \sum_{j=1}^{9}\sum_{i\in E(j)} a_i b_j$$

Où :

$$\forall j \in [\![1,9]\!], E(j) = \{i \in [\![1,3]\!] | i^2 \geq j\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E(1) = \{1,2,3\} \\ E(2) = E(3) = E(4) = \{2,3\} \\ E(5) = E(6) = E(7) = E(8) = E(9) = \{3\} \end{cases}$$

Donc :

$$(2): \sum_{j=1}^{\max(\{i^2|i\in[\![1,3]\!]\})} \sum_{i\in E(j)} a_i b_j = b_1(a_1+a_2+a_3) + (b_2+b_3+b_4)(a_2+a_3) + (b_5+b_6+b_7+b_8+b_9)(a_3)$$

L'égalité entre (1) et (2) est vérifiée.

Pour 2 sommes à indices dépendants : Ensembles

$$\sum_{i\in E_1}\sum_{j\in E_2(i)} f(i,j) = \sum_{j\in E_3}\sum_{i\in E_4(j)} f(i,j)$$

Avec :

$$j \in E_3 = \bigcup_{i\in E_1} E_2(i)$$

Et :

$$\forall j \in E_3, E_4(j) = \{i \in E_1 | j \in E_2(i)\}$$

Analogie avec l'étude précédente

$$E_1 = [\![1, n]\!]$$

$$E_2(i) = [\![1, f(i)]\!]$$

$$E_3 = \bigcup_{i \in [\![1,n]\!]} [\![1, f(i)]\!] = [\![1, \max\big(f([\![1, n]\!])\big)]\!]$$

$$E_4(j) = \{i \in [\![1, n]\!] | j \in [\![1, f(i)]\!]\}$$

Pour 2 sommes à ensembles d'indices appartenant à des ensembles dépendants

$$\sum_{\underline{i} \in E_1} \sum_{\underline{j} \in E_2(\underline{i})} f(\underline{i}, \underline{j}) = \sum_{\underline{j} \in E_3} \sum_{\underline{i} \in E_4(\underline{j})} f(\underline{i}, \underline{j})$$

Pour intervertir $\underline{i}$ et $\underline{j}$, répertorions d'abord tous les $\underline{j}$ possibles.

À travers les différents $\underline{i}$, $\underline{j}$ parcourt tous les éléments des $E_1(\underline{i})$.

Ainsi :

$$\underline{j} \in E_3 = \bigcup_{\underline{i} \in E_1} E_2(\underline{i})$$

Maintenant, déterminons, pour $\underline{j}$ fixé, quels $\underline{i}$ a-t-il « connu » ?

$$E_4(\underline{j}) = \{\underline{i} \in E_1 | \underline{j} \in E_2(\underline{i})\}$$

Distributivité

$$\sum_{\underline{i} \in E_1} \left(\sum_{\underline{j} \in E_2(\underline{i})} f(\underline{i}, \underline{j}) + \sum_{\underline{j} \in E_3(\underline{i})} f(\underline{i}, \underline{j}) \right) = \sum_{\underline{i} \in E_1} \sum_{\underline{j} \in E_2(\underline{i})} f(\underline{i}, \underline{j}) + \sum_{\underline{i} \in E_1} \sum_{\underline{j} \in E_3(\underline{i})} f(\underline{i}, \underline{j})$$

Produits et produits

Interversion de deux produits

Soit un produit, dont les ensembles d'indices $\underline{p_1}$ appartiennent à un ensemble P_1, de produits dont les indices $\underline{p_2}$ appartiennent à un ensemble P_2 fonction de $\underline{p_1}$:

$$\prod_{\underline{p_1}\in P_1}\prod_{\underline{p_2}\in P_2(\underline{p_1})} a(\underline{p_1},\underline{p_2}) = \prod_{\underline{p_2}\in P_3}\prod_{\underline{p_1}\in P_4(\underline{p_2})} a(\underline{p_1},\underline{p_2})$$

Avec :

$$P_3 = \bigcup_{\underline{p_1}\in P_1} P_2(\underline{p_1})$$

Et :

$$P_4(\underline{p_2}) = \{\underline{p_1}\in P_1 | \underline{p_2}\in P_2(\underline{p_1})\}$$

Distributivité

$$\prod_{\underline{p_1}\in P_1}\left(\prod_{\underline{p_2}\in P_2(\underline{p_1})} a(\underline{p_1},\underline{p_2}) \cdot \prod_{\underline{p_2}\in P_3(\underline{p_1})} a(\underline{p_1},\underline{p_2})\right)$$

$$= \left(\prod_{\underline{p_1}\in P_1}\prod_{\underline{p_2}\in P_2(\underline{p_1})} a(\underline{p_1},\underline{p_2})\right) \cdot \left(\prod_{\underline{p_1}\in P_1}\prod_{\underline{p_2}\in P_3(\underline{p_1})} a(\underline{p_1},\underline{p_2})\right)$$