

Wiskunde B+S''
3de graad D-finaliteit
III-WisS''-d

BRUSSEL

D/2023/13.758/

Versie augustus 2023

1 Inleiding

De uitrol van de modernisering secundair onderwijs gaat gepaard met een nieuwe generatie leerplannen. Leerplannen geven richting en laten ruimte. Ze faciliteren de inhoudelijke dynamiek en de continuïteit in een school en lerarenteam. Ze garanderen binnen het kader dat door de Vlaamse regering werd vastgelegd voldoende vrijheid voor schoolbesturen om het eigen pedagogisch project vorm te geven vanuit de eigen schoolcontext. Leerplannen zijn ingebed in het vormingsconcept van de katholieke dialoogschool. Ze versterken het eigenaarschap van scholen die d.m.v. eigen beleidskeuzes de vorming van leerlingen gestalte geven. Leerplannen laten ruimte voor het vakinhoudelijk en pedagogisch-didactisch meesterschap van de leraar, maar bieden ondersteuning waar nodig.

1.1 Het leerplanconcept: vijf uitgangspunten

Leerplannen vertrekken vanuit het **vormingsconcept** van de katholieke dialoogschool. Ze laten toe om optimaal aan te sluiten bij het pedagogisch project van de school en de beleidsbeslissingen die de school neemt vanuit haar eigen visie op onderwijs (taalbeleid, evaluatiebeleid, zorgbeleid, ICT-beleid, kwaliteitsontwikkeling, keuze voor vakken en lessen ...).

Leerplannen ondersteunen **kwaliteitsontwikkeling**: het leerplanconcept spoort met kwaliteitsverwachtingen van het Referentiekader onderwijskwaliteit (ROK). Kwaliteitsontwikkeling volgt dan als vanzelfsprekend uit keuzes die de school maakt bij de implementatie van leerplannen.

Leerplannen faciliteren een **gerichte studiekeuze**. De leerplandoelen sluiten aan bij de verwachte competenties van leerlingen in een bepaald structuuronderdeel. De feedback en evaluatie bij de realisatie ervan beïnvloeden op een positieve manier de keuze van leerlingen na elke graad.

Leerplannen gaan uit van de **professionaliteit** van de leraar en het **eigenaarschap** van de school en het lerarenteam. Ze bieden voldoende ruimte voor eigen inhoudelijke keuzes en een eigen didactische aanpak van de leraar, het lerarenteam en de school.

Leerplannen borgen de **samenhang** in de vorming. Die samenhang betreft de verticale samenhang (de plaats van het leerplan in de opbouw van het curriculum) en de horizontale samenhang tussen vakken binnen structuuronderdelen en over structuuronderdelen heen. Leerplannen geven expliciet aan voor welke leerplandoelen van andere leerplannen in de school verdere afstemming mogelijk is. Op die manier faciliteren en stimuleren de leerplannen leraren om over de vakken heen samen te werken en van elkaar te leren. Een verwijzing van een leraar naar de lessen van een collega laat leerlingen niet alleen aanvoelen dat de verschillende vakken onderling samenhangen en dat ze over dezelfde werkelijkheid gaan, maar versterkt ook de mogelijkheden tot transfer.

1.2 De vormingscirkel – de opdracht van secundair onderwijs

De leerplannen vertrekken vanuit een gedeelde inspiratie die door middel van een vormingscirkel voorgesteld wordt. We 'lezen' de cirkel van buiten naar binnen.

- Een lerarenteam werkt in een katholieke dialoogschool die onderwijs verstrekt vanuit een **specifieke traditie**. Vanuit het eigen pedagogisch project kiezen leraren voor wat voor hen en hun school goed



onderwijs is. Ze wijzen leerlingen daarbij de weg en gebruiken daarvoor **wegwijzers**. Die zijn een inspiratiebron voor leraren en zorgen voor een Bijbelse 'drive' in hun onderwijs.

- De kwetsbaarheid van leerlingen ernstig nemen betekent dat elke leerling **belooftevol** is en alle leerkansen verdient. Die leerling is **uniek als persoon** maar ook **verbonden** met de klas, de school en de bredere samenleving. Scholen zijn **gastvrije plaatsen** waar leerlingen en leraren elkaar ontmoeten in diverse contexten. De leraar vormt zijn leerlingen vanuit een **genereuze** attitude, hij geeft om zijn leerlingen en hij houdt van zijn vak. Hij durft af en toe de gebaande paden verlaten en stimuleert de **verbeelding en creativiteit** van leerlingen. Zo zaait hij door zijn onderwijs de kiemen van een hoopvolle, **meer duurzame en meer rechtvaardige wereld**.
- Leraren vormen leerlingen door middel van leerinhouden die we groeperen in negen **vormingscomponenten**. De aaneengesloten cirkel van vormingscomponenten wijst erop dat vorming een geheel is en zich niet in schijfjes laat verdelen. Je kan onmogelijk over taal spreken zonder over cultuur bezig te zijn; wetenschap en techniek hebben een band met economie, wiskunde, geschiedenis ... Dwarsverbanden doorheen de vakken zijn belangrijk. De vormingscirkel vormt dan ook een dynamisch geheel van elkaar voortdurend beïnvloedende en versterkende componenten.
- Vorming is voor een leraar nooit te herleiden tot een cognitieve overdracht van inhouden. Zijn meesterschap en passie brengt een leraar ertoe om voor iedere leerling de juiste woorden en gebaren te zoeken om **de wereld te ontsluiten**. Hij introduceert leerlingen in de wereld waarvan hij houdt. Een leraar zorgt er bijvoorbeeld voor dat leerlingen kunnen worden gegrepen door de cultuur van het Frans of door het ambacht van een metselaar. Hij initieert leerlingen in een wereld en probeert hen zover te brengen dat ze er hun eigen weg in kunnen vinden.
- Een leraar vormt leerlingen als **individuele leraar**, maar werkt ook binnen **lerarenteams** en binnen een **beleid van de school**. Het Gemeenschappelijk funderend leerplan helpt daartoe. Het zorgt voor het fundament van heel de vorming dat gerealiseerd wordt in vakken, in projecten, in schoolbrede initiatieven of in een specifieke schoolcultuur.
- De uiteindelijke bedoeling is om **alle leerlingen** kwaliteitsvol te vormen. Leerlingen zijn dan ook het hart van de vormingscirkel, zij zijn het op wie we inzetten. Zij dragen onze hoop mee: de nieuwe generatie die een meer duurzame en meer rechtvaardige wereld zal creëren.



1.3 Ruimte voor leraren(teams) en scholen

De leraar als professional, als meester in zijn vak krijgt vrijheid om samen met zijn collega's vanuit de leerplannen aan de slag te gaan. Hij kan eigen accenten leggen en differentiëren vanuit zijn passie, expertise, het pedagogisch project van de school en de beginsituatie van zijn leerlingen.

De leerplandoelen zijn noch chronologisch, noch hiërarchisch geordend. Ze laten ruimte aan het lerarenteam en de individuele leraar om te bepalen welke leerplandoelen op welk moment worden samengenomen, om didactische werkvormen te kiezen, contexten te bepalen, eigen leerlijnen op te bouwen, vakoverschrijdend te werken, flexibel om te gaan met een indicatie van onderwijstijd.

1.4 Differentiatie

Om optimale leerkansen te bieden is [differentiëren](#) van belang in alle leerlingengroepen. Leerlingen voor wie dit leerplan is bestemd, behoren immers wel tot dezelfde doelgroep, maar bevinden zich niet noodzakelijk in dezelfde beginsituatie. Zij hebben een niet te onderschatten – maar soms sterk verschillende – bagage mee vanuit de onderliggende graad, de thuissituatie en vormen van informeel leren. Het is belangrijk om zicht te krijgen op die aanwezige kennis en vaardigheden en vanuit dat gegeven, soms gedifferentieerd, verder te bouwen. Positief en planmatig omgaan met verschillen tussen leerlingen verhoogt de motivatie, het welbevinden en de leerwinst voor elke leerling.

De leerplannen bieden kansen om te differentiëren door te verdiepen en te verbreden en door de leeromgeving aan te passen. Ze nodigen ook uit om te differentiëren in evaluatie.

Differentiatie door te verdiepen en te verbreden

Sommige leerlingen denken meer conceptueel en abstract. Andere leerlingen komen vanuit een meer concrete benadering sneller tot inzichtelijk denken. Variëren in abstractie spreekt leerlingen aan op hun capaciteiten en daagt hen uit om van daaruit te groeien.

Daarnaast bieden leerplannen kansen om de complexiteit van leerinhouden aan te passen. Dat kan door een complexere situatie te schetsen, een minder ingewikkelde bewerking of handeling voor te stellen, of door meer kennis of vaardigheden aan te bieden om leerlingen uit te dagen.

De ene context kan betekenisvol zijn voor een leerlingengroep, terwijl een andere context dan weer betekenisvoller kan zijn voor een andere leerlingengroep. Leerinhouden in verschillende contexten aanbrenge biedt kansen om leerlingen aan te spreken op hun interesses en daagt hen tegelijk uit om andere interesses te verkennen en zo hun horizon te verruimen.

In 'extra' wenken bij de leerplandoelen en in beperkte mate ook via keuzeleerplandoelen bieden we je inspiratie om te differentiëren door te verdiepen en te verbreden.

Differentiatie door de leeromgeving aan te passen

Doordachte variatie in werkvormen (groepswerk, individueel, auditief, visueel, actief ...) vergroot de kans dat leerdoelen worden gerealiseerd door alle leerlingen. Het helpt hen bovendien ontdekken welke manieren van leren en informatie verwerken best bij hen passen.

De ene leerling kan snel of zelfstandig werken, de andere heeft meer tijd of begeleiding nodig. Variëren in de mate van ondersteuning, gericht aanbieden van hulpmiddelen (voorbeelden, schrijfkaders, stappenplannen ...) en meer of minder tijd geven, daagt leerlingen uit op hun niveau en tempo.

Leerlingen op hun niveau en vanuit eigen interesses laten werken kan door te differentiëren in product, bijvoorbeeld door leerlingen te laten kiezen tussen opdrachten die leiden tot verschillende eindproducten.

Het samenstellen van groepen kan een effectieve manier zijn om te differentiëren. Rekening houden met verschil in leerdoelen en leerlingenkenmerken laat leerlingen toe van en met elkaar te leren.

Technologie kan al die vormen van differentiatie ondersteunen. Zo kunnen leerlingen op hun maat werken met digitale leermiddelen zoals educatieve software of online oefenprogramma's.

Differentiatie in evaluatie

Tenslotte laten de leerplannen toe te differentiëren in [evaluatie](#) en feedback. Evalueren is beoordelen om te waarderen, krachtiger te maken en te sturen.

Na de afronding van een lessenreeks of na een langere periode gaan leraren door middel van summatieve evaluatie na waar leerlingen staan. De keuze van een evaluatie- en feedbackvorm is afhankelijk van de vooropgestelde doelen.



Formatieve evaluatie is geïntegreerd in het leerproces en gaat uit van een actieve betrokkenheid van leraar en leerling. Het zet leerlingen aan het denken over hun vorderingen en laat leraren toe om tijdens het leerproces effectieve feedback te geven. Door middel van formatieve evaluatie krijgen leraren een goed zicht op het leerproces van leerlingen zodat ze het verder gericht en waar nodig kunnen bijsturen. Het is bovendien een rijke bron voor leraren om te reflecteren over de eigen onderwijspraktijk en de eigen pedagogisch-didactische aanpak bij te sturen.

1.5 Opbouw van leerplannen

Elk leerplan is opgebouwd volgens een vaste structuur. Alle onderdelen maken inherent deel uit van het leerplan. Schoolbesturen van Katholiek Onderwijs Vlaanderen die de leerplannen gebruiken, verbinden zich tot de realisatie van het gehele leerplan.

De **inleiding** licht het leerplanconcept toe en gaat dieper in op de visie op vorming, de ruimte voor leraren(teams) en scholen en de mogelijkheden tot differentiatie.

De **situering** geeft aan waarop het leerplan is gebaseerd en beschrijft de samenhang binnen de graad en met de onderliggende graad, en de plaats in de lessentabel.

In de **pedagogisch-didactische duiding** komen de inbedding in het vormingsconcept, de krachtlijnen, de opbouw, de leerlijnen, de aandachtspunten met o.m. nieuwe accenten van het leerplan aan bod.

De **leerplandoelen** zijn helder geformuleerd en geven aan wat van leerlingen wordt verwacht. Waar relevant geeft een opsomming of een afbakening (★) aan wat bij de realisatie van het leerplandoel aan bod moet komen. Ook pop-ups bevatten informatie die noodzakelijk is bij de realisatie van het leerplandoel. De leerplandoelen zijn ingedeeld in een aantal rubrieken. Bovenaan elke rubriek vind je de relevante minimumdoelen van de basisvorming, de specifieke minimumdoelen en/of doelen die leiden naar een of meer beroepskwalificaties, afhankelijk van de finaliteit. Als leraar hoef je je die taal niet eigen te maken. Het volstaat dat je de leerplandoelen realiseert zoals opgenomen in het leerplan.

Waar relevant wordt de samenhang met andere leerplannen in dezelfde graad aangegeven, evenals de samenhang met de onderliggende graad.

'Duiding' bij een leerplandoel bevat een noodzakelijke toelichting bij het doel. In pedagogisch-didactische wenken vinden leraren inspiratie om met het leerplandoel aan de slag te gaan. Een rubriek 'extra' bij een leerplandoel biedt leraren inspiratie om verder te gaan dan wat het leerplandoel minimaal vraagt.

De **basisuitrusting** geeft aan welke materiële uitrusting vereist is om de leerplandoelen te kunnen realiseren.

Het **glossarium** bevat een overzicht van handelingswerkwoorden die in alle leerplannen van de graad als synoniem van elkaar worden gebruikt of meer toelichting nodig hebben.

De **concordantie** geeft aan welke leerplandoelen gerelateerd zijn aan bepaalde minimumdoelen, specifieke minimumdoelen of doelen die leiden naar een of meer beroepskwalificaties.

2 Situering

2.1 Samenhang in de derde graad

2.1.1 Samenhang met andere leerplannen Wiskunde binnen de finaliteit

Er zijn vier verschillende leerplannen Wiskunde voor de studierichtingen van de derde graad D-finaliteit. In de onderstaande tabel wordt aangegeven voor welke studierichtingen de leerplannen gelden.

Leerplan B	Audiovisuele vorming; Beeldende vorming; Dans; Freinetpedagogie; Grieks-Latijn; Humane wetenschappen; Latijn-moderne talen; Moderne talen; Muziek; Taal en communicatiewetenschappen; Welzijnswetenschappen; Woordkunst-drama
Leerplan B+S	Bedrijfsondersteunende informaticawetenschappen; Bedrijfswetenschappen; Economie-Moderne talen; Topsport-Bedrijfswetenschappen; Topsport-Economie
Leerplan B+S'	Architecturale Vorming; Biotechnologische en chemische wetenschappen; Biotechnologische en chemische STEM-wetenschappen; Bouw- en houtwetenschappen; Informatica- en communicatiewetenschappen; Latijn-Wetenschappen; Mechatronica; Moderne talen-Wetenschappen; Sportwetenschappen; Topsport-Wetenschappen
Leerplan B+S''	Economie-Wiskunde; Grieks-Wiskunde; Latijn-Wiskunde; Technologische wetenschappen en Engineering; Wetenschappen-Wiskunde

2.2 Plaats in de lessentabel

Het leerplan is gebaseerd op minimumdoelen van de basisvorming en op specifieke minimumdoelen. Het leerplan is gericht op 12 graaduren en is bestemd voor volgende studierichtingen van de doorstroomfinaliteit: Economie-Wiskunde; Grieks-Wiskunde; Latijn-Wiskunde; Technologische wetenschappen en Engineering; Wetenschappen-Wiskunde.

3 Pedagogisch-didactische duiding

3.1 Wiskunde en het vormingsconcept

Het leerplan Wiskunde is ingebed in het vormingsconcept van de katholieke dialogeschool. In het leerplan ligt de nadruk op de wiskundige vorming. Leerlingen leren om wiskundig te redeneren en te communiceren en om problemen op te lossen door gebruik te maken van wiskundige concepten en procedures. Daarnaast zijn er tal van interacties met andere vormingscomponenten zoals de natuurwetenschappelijke en technische vorming en de maatschappelijke vorming. Leerlingen leren wiskunde in verschillende wetenschapsgebieden te gebruiken en het helpt hen om kritisch denkende burgers te worden in de maatschappij.

Uit die vormingscomponenten zijn de krachtlijnen van het leerplan ontstaan.

3.2 Krachtlijnen

Wiskundige begrippen, concepten, eigenschappen en methodes begrijpen en toepassen



Leerlingen ontwikkelen inzicht in begrippen, concepten, eigenschappen en methodes op vlak van meetkunde, analyse, algebra, discrete wiskunde, kansrekenen en statistiek. De leerlingen leren ze ook in te zetten.

Wiskundig redeneren, argumenteren en communiceren

Leerlingen ontwikkelen hun wiskundige taalvaardigheid en denk- en redeneervaardigheid. Ze leren wiskundige redeneringen te beargumenteren en te communiceren.

Wiskundig modelleren en probleemoplossend denken

Leerlingen leren gebruik te maken van wiskundige modellen zoals grafieken, functies, matrices, rijen, diagrammen en de normale verdeling. Ze beschrijven fenomenen uit de realiteit aan de hand van wiskundige concepten. Ze lossen ook vraagstukken en problemen op door te mathematiseren en demathematiseren en door gebruik te maken van heuristieken.

Samenhang binnen wiskunde ontdekken en interacties tussen wiskunde en andere domeinen analyseren

Aan de hand van diverse contexten en voorbeelden van wiskundige toepassingen in verschillende domeinen krijgen leerlingen meer inzicht in wisselwerkingen. Ze ontdekken ook de samenhang binnen de wiskunde zelf en interpreteren wiskundige informatie uit de maatschappij op een kritische manier.

3.3 Opbouw

- Problemen oplossen en wiskundig redeneren
- Meetkunde: analytische ruimteteekunde
- Analyse
 - Grafisch onderzoek
 - Exponentiële en logaritmische functies
 - Goniometrische functies
 - Veelterm-, rationale en irrationale functies
 - Afgeleiden
 - Integralen
- Algebra
 - Matrices
 - Complexe getallen
 - Algebraïsche structuur
- Discrete wiskunde
 - Rijen
 - Telproblemen
- Data en onzekerheid
 - Kansrekenen
 - Statistiek
- Onderzoekskompetentie

3.4 Leerlijnen

3.4.1 Samenhang in de derde graad

De onderstaande tabel geeft een samenvatting van de leerinhouden in de vier verschillende leerplannen Wiskunde voor de derde graad D-finaliteit. In de opsomming van de extra leerinhouden voor de leerplannen B+S, B+S' en B+S'' ten opzichte van het basisleerplan B komen gelijke benamingen van leerinhouden niet steeds overeen met precies dezelfde leerplandoelen.

Leerplan B	Grafisch functieonderzoek, rekenen met reële getallen (bv. logaritmen), exponentiële en algemene sinusfuncties, concepten afgeleiden, rijen, kansrekenen, statistiek (representativiteit, samenhang versus causaliteit, normale verdeling) en generieke doelen
Leerplan B+S	Inhouden leerplan B + functieleer/analyse (uitbreiding functietypes, vergelijkingen en ongelijkheden, afgeleiden en integralen), matrices, hypothesetoetsen
Leerplan B+S'	Inhouden leerplan B + functieleer/analyse (uitbreiding functietypes, vergelijkingen en ongelijkheden, afgeleiden en integralen), matrices, complexe getallen, hypothesetoetsen
Leerplan B+S''	Inhouden leerplan B + functieleer/analyse (uitbreiding functietypes, vergelijkingen en ongelijkheden, limieten, afgeleiden en integralen), vectoren, analytische ruimtemeetkunde, goniometrie, matrices, complexe getallen, algebraïsche structuur, telproblemen, binomiale verdeling, hypothesetoetsen, uitspraken bewijzen

3.5 Aandachtspunten

Rubriek 'Problemen oplossen en wiskundig redeneren'

Het is niet de bedoeling om deze rubriek als een apart gegeven te benaderen: de leraar heeft de vrijheid en verantwoordelijkheid om de doelen breed en strategisch in te zetten en te combineren met doelen uit de inhoudelijke rubrieken.

Gebruik van contexten

Bij veel inhouden uit het leerplan is het aangewezen om zowel met als zonder context te werken. Werken met contexten kan leerlingen motiveren en maakt duidelijk dat wiskunde kan worden aangewend in meerdere contexten (leefwereld, maatschappelijk, wetenschappelijk, professioneel). Daardoor kan een positievere attitude tegenover wiskunde ontstaan. Contexten kunnen bijkomende aandacht vragen: het mathematiseren van de opgave en het demathematiseren van het resultaat. Bij contextvragen spelen ook niet-wiskundige factoren zoals taal een grotere rol dan bij kale opgaven. Kale opgaven en contextopgaven meten niet noodzakelijk altijd dezelfde wiskundige vaardigheden.

Wiskunde leren met en zonder contexten is belangrijk om kennis en vaardigheden te transfereren naar gelijkaardige en naar nieuwe situaties. Daarbij is het ook belangrijk om te variëren in contexten. Volgende leerplandoelen worden minimaal zonder context gerealiseerd, maar het is zinvol om ze ook met context te realiseren: LPD 10, 12, 13, 20, 27, 28.

Rubriek 'Onderzoekscompetentie'

De onderzoekscompetentie kan worden gerealiseerd met inhouden van dit leerplan die gerelateerd zijn aan specifieke minimumdoelen. In de studierichtingen waarin dit leerplan moet worden gerealiseerd kan de onderzoekscompetentie ook aan bod komen via inhouden van andere leerplannen. Om dat duidelijk te maken wordt het leerplandoel over de onderzoekscompetentie voorafgegaan door een #. Dat geeft aan dat het leerplandoel hier aan bod kan komen, maar dat het ook kan worden gerealiseerd via andere



leerplannen van het specifiek gedeelte van de studierichting. Je overlegt op schoolniveau welke keuzes worden gemaakt met betrekking tot de realisatie van de onderzoekscompetentie. In een overzichtsdocument kan je voor elke studierichting terugvinden via welke leerplannen onderzoeken kan worden gerealiseerd.

Bij LPD 55 geven we aan met welke inhouden de onderzoekscompetentie kan worden gerealiseerd. Op de leerplanpagina vind je in de loop van het eerste semester van volgend schooljaar meer informatie over en een aantal mogelijke voorbeelden van hoe je via specifieke inhouden van dit leerplan met je leerlingen kan werken aan de onderzoekscompetentie.

4 Leerplandoelen

4.1 Problemen oplossen en wiskundig redeneren

Minimumdoelen, specifieke minimumdoelen of doelen die leiden naar BK

MD 06.18 De leerlingen beargumenteren wiskundige redeneringen. (LPD 4)
(Rekening houdend met concepten van de derde graad.)

MD 06.19 De leerlingen beschrijven fenomenen uit de realiteit aan de hand van wiskundige concepten uit de derde graad. (LPD 1)

MD 06.20 De leerlingen lossen vraagstukken en problemen op door te mathematiseren en demathematiseren en door gebruik te maken van heuristieken. (LPD 2)
(Rekening houdend met concepten van de derde graad.)

MD 06.21 De leerlingen gebruiken ICT om berekeningen uit te voeren en grafische voorstellingen te maken. (LPD 3)
(Rekening houdend met concepten van de derde graad.)

SMD 06.08.39 De leerlingen beargumenteren wiskundige redeneringen en bewijzen wiskundige uitspraken. (LPD 4)

- Bewijstechnieken: rechtstreeks bewijs, bewijs uit het ongerijmde, bewijs door volledige inductie, ontkrachting door tegenvoorbeeld
- Kwantoren

LPD 1 De leerlingen beschrijven fenomenen uit de realiteit aan de hand van wiskundige concepten uit de derde graad.

Wenk: Je kan aan dit doel werken door voldoende contexten bij de inhoudelijke doelen aan bod te laten komen. Telkens wanneer er met een context wordt gewerkt, zal een wiskundig concept worden gebruikt om iets uit de realiteit te beschrijven. Je kan zowel werken met richtingspecifieke als actuele contexten.

Wenk: Je kan via dit doel ook werken aan het STEM-doel over de wisselwerking tussen wetenschappen, technologie, wiskunde en de maatschappij.

LPD 2 De leerlingen lossen vraagstukken en problemen op door te mathematiseren en demathematiseren en door gebruik te maken van heuristieken.

Duiding: Bij vraagstukken is de oplossingsmethode vaak aansluitend bij de pas geziene leerstof, terwijl bij problemen oplossen heuristieken en een oplossingsmethode moeten worden gekozen.

Wenk: Je kan het problemen oplossen best integreren in het normale lesgebeuren en regelmatig doorheen het schooljaar aan bod laten komen. De leerlingen zullen die vaardigheid maar verwerven doorheen een actief leerproces. Je kan bijvoorbeeld na een aantal leerinhouden of hoofdstukken problemen laten oplossen waarbij leerlingen zelf de correcte leerinhoud moeten selecteren. Je kan ook problemen aan bod laten komen die los staan van de geziene leerinhouden.

Wenk: Je kan leerlingen zelfstandig geschikte heuristieken laten kiezen en expliciteren. Voorbeelden van heuristieken die aan bod kunnen komen: het gegeven en gevraagde expliciteren, het probleem herformuleren of opdelen in deelproblemen, een schets of tekening maken, bijzondere gevallen onderzoeken, tijdelijk één van de voorwaarden laten vallen, van achter naar voor werken, alle mogelijkheden opschrijven en dan elimineren.

Wenk: Het demathematiseren kan gebeuren via een antwoordzin. Controleren of een antwoord realistisch kan zijn, hoort ook bij deze stap van het oplossingsproces.

LPD 3 De leerlingen gebruiken ICT om berekeningen uit te voeren en grafische voorstellingen te maken.

Wenk: Je kan ICT breed en strategisch (laten) inzetten en combineren met de inhoudelijke doelen.

Wenk: Voorbeelden van grafische voorstellingen: grafieken van functies of van de normale verdeling.

Wenk: Je kan aandacht schenken aan het zinvol gebruik van ICT, bv. bij berekeningen.

LPD 4 De leerlingen beargumenteren wiskundige redeneringen en bewijzen wiskundige uitspraken.

- ★ **Bewijstechnieken: rechtstreeks bewijs, bewijs uit het ongerijmde, bewijs door volledige inductie, ontkrachting door tegenvoorbeeld**
Kwantoren

Wenk: Je kan dit doel breed inzetten en combineren met de inhoudelijke doelen. Wiskundige redeneringen of argumentaties komen bv. ook aan bod in oefeningen waarbij wiskundige eigenschappen worden toegepast.

Wenk: Je kan aandacht schenken aan het gestructureerd verwoorden en noteren van de gedachtegang bij een redenering met correct gebruik van vakterminologie. Je kan tijdens de les de leerlingen hun redenering mondeling laten uitleggen en de leerlingen evalueren door mogelijke fouten aan te wijzen en te laten verbeteren.

Wenk: De focus ligt bij behandelde bewijzen meer op het beargumenteren dan het zuiver reproduceren. Zo kan je bij een behandeld bewijs de redeneerstappen laten beargumenteren of werken in een gewijzigde situatie (zoals in een specifieke situatie of met andere symbolen). Voorbeelden: rekenregels en eigenschappen van bewerkingen (bv. logaritmen, matrices), formules voor afgeleiden van basisfuncties, hoofdstelling van integraalrekening.

Wenk: Voorbeelden bij ontkrachting door tegenvoorbeeld: voorwaarden controleren in de formulering van eigenschappen, niet-commutativiteit van matrices.



Wenk: Voorbeelden bij de bewijstechniek volledige inductie: formules voor combinaties, binomium van Newton, formule van de Moivre, formule voor de som van eerste n termen bij rijen.

Wenk: Het typevoorbeeld van een bewijs uit het ongerijmde is het bewijs van de irrationaliteit van vierkantswortels zoals $\sqrt{2}$. Je kan de bewijstechniek toepassen of als concept herhalen.

Wenk: Kwantoren kunnen worden gebruikt in de formulering van een eigenschap of definitie (bv. limietbegrip). Je kan aandacht schenken aan de volgorde van kwantoren en de betekenis van de negatie van kwantoren.

4.2 Meetkunde: analytische ruimtemeetkunde

Minimumdoelen, specifieke minimumdoelen of doelen die leiden naar BK

SMD 06.08.29 De leerlingen rekenen met vectoren in het vlak en in de ruimte. (LPD 5)

- Bewerkingen: optelling en vermenigvuldiging met een getal en inproduct
- Norm van een vector en ontbinding van een vector in zijn componenten

SMD 06.08.30 De leerlingen stellen vectoriële, parametrische en cartesische vergelijkingen van rechten in het vlak en van rechten en vlakken in de ruimte op. (LPD 6)

SMD 06.08.31 De leerlingen bepalen de onderlinge ligging van twee rechten in het vlak met behulp van vergelijkingen. (LPD 7)

SMD 06.08.32 De leerlingen bepalen de onderlinge ligging van twee rechten, van een rechte en een vlak en van twee vlakken in de ruimte met behulp van vergelijkingen. (LPD 7)

SMD 06.08.33 De leerlingen berekenen afstanden en hoeken in het vlak en in de ruimte. (LPD 8)

LPD 5 De leerlingen rekenen met vectoren in de ruimte.

- ★ **Bewerkingen: optelling, scalaire vermenigvuldiging en inproduct**
Norm van een vector en ontbinding van een vector in zijn componenten

2de graad: Rekenen met vectoren in het vlak. Het inproduct in het vlak is opgenomen in de bijkomende laag van het leerplan van de tweede graad en geldt als beginsituatie voor dit leerplan.

Wenk: Bij het inproduct kan je gebruik maken van de twee formules, nl. in termen van norm van vectoren en ingesloten hoek (grafische betekenis) en met behulp van coördinaten.

LPD 6 De leerlingen stellen vectoriële, parametrische en cartesische vergelijkingen van rechten en vlakken in de ruimte op.

- ★ **Vergelijkingen van rechten in het vlak**

2de graad: Het opstellen van vergelijkingen van rechten in het vlak is opgenomen in de bijkomende laag van het leerplan van de tweede graad en geldt als beginsituatie voor dit leerplan.

Wenk: Indien het opstellen van vergelijkingen van rechten in het vlak al aan bod kwam in de tweede graad, volstaat het om na te gaan of leerlingen die inhoud nog

beheersen om de stap te kunnen zetten naar de situatie in de ruimte. De klemtoon ligt bij dit leerplandoel op vergelijkingen in de ruimte.

Wenk: Parametrische en vectoriële vergelijkingen zijn verwant en verschillen in feite enkel van elkaar in schrijfwijze. Je kan aangeven dat parametrische en vectoriële vergelijkingen niet uniek zijn.

Wenk: Je kan aangeven dat bij een cartesische vergelijking van een vlak in de ruimte de coëfficiënten bij de variabelen aanleiding geven tot een normaalvector van dat vlak.

Wenk: Je kan de cartesische vergelijking van een vlak via determinanten bepalen.

Extra: Je kan de loodlijn op twee kruisende rechten bepalen.

LPD 7 De leerlingen bepalen de onderlinge ligging van twee rechten, van een rechte en een vlak en van twee vlakken in de ruimte met behulp van vergelijkingen.

★ Onderlinge ligging van twee rechten in het vlak

2de graad: Onderlinge ligging in de ruimte (zonder vergelijkingen). De onderlinge ligging in het vlak met behulp van vergelijkingen is opgenomen in de bijkomende laag van het leerplan van de tweede graad en geldt als beginsituatie voor dit leerplan.

Wenk: Indien het bepalen van de onderlinge ligging van twee rechten in het vlak al aan bod kwam in de tweede graad, volstaat het om na te gaan of leerlingen die inhoud nog beheersen om de stap te kunnen zetten naar de situatie in de ruimte. De klemtoon ligt bij dit leerplandoel op de onderlinge ligging in de ruimte.

Wenk: Je kan de loodrechte stand van vlakken analyseren door het inproduct van normaalvectoren te bepalen.

Wenk: Je kan aandacht schenken aan het kiezen van een efficiënte manier om de onderlinge ligging te bepalen. Afhankelijk van de soort vergelijkingen van de objecten kan er bijvoorbeeld gewerkt worden met stelsels van vergelijkingen of met vectoren.

LPD 8 De leerlingen berekenen afstanden en hoeken in de ruimte.

★ Afstanden en hoeken in het vlak

2de graad: Het berekenen van afstanden en hoeken in het vlak is opgenomen in de bijkomende laag van het leerplan van de tweede graad en geldt als beginsituatie voor dit leerplan.

Wenk: Indien het berekenen van afstanden en hoeken in het vlak al aan bod kwam in de tweede graad, volstaat het om na te gaan of leerlingen die inhoud nog beheersen om de stap te kunnen zetten naar de situatie in de ruimte. De klemtoon ligt bij dit leerplandoel op afstanden en hoeken in de ruimte.

Wenk: Je kan afstanden tussen punten, rechten en vlakken bepalen. Het is niet nodig om alle mogelijkheden te behandelen.

Wenk: Je kan hoeken bepalen tussen twee rechten, tussen een rechte en een vlak en tussen twee vlakken.



4.3 Analyse

4.3.1 Grafisch onderzoek

Minimumdoelen, specifieke minimumdoelen of doelen die leiden naar BK

MD 06.02 De leerlingen brengen met behulp van de grafiek, kenmerken van een functie in verband met de betekenisvolle situatie die door de functie beschreven wordt. (LPD 9)

MD 06.11 De leerlingen lossen vergelijkingen grafisch op met behulp van ICT. (LPD 10)

SMD 06.08.08 De leerlingen leggen grafisch het verband tussen inverteerbare functies en hun inverse. (LPD 11)

SMD 06.08.09 De leerlingen lossen vergelijkingen en ongelijkheden grafisch op. (LPD 10)

LPD 9 De leerlingen brengen met behulp van de grafiek, kenmerken van een functie in verband met de betekenisvolle situatie die door de functie wordt beschreven.

2de graad: Functiebegrip en representaties van een functie

Wenk: Je kan allerlei contexten aan bod laten komen. In de praktijk worden betekenisvolle situaties vaak voorgesteld door de grafiek van een functie zonder expliciet voorschrift. Voorbeelden: hartslag, besmettingscijfers, kostprijsevolutie.

Wenk: Voorbeelden van functiekenmerken: praktisch domein, praktisch bereik, nulwaarden, tekenverloop, stijgen/dalen/constant, extrema (minima/maxima), constante/toenemende/afnemende stijging/daling, symmetrie, periode, gedrag op oneindig en snijpunt met verticale as.

Wenk: Je kan een gegeven situatie laten verbinden met de juiste grafiek of een grafiek laten schetsen bij een gegeven situatie.

LPD 10 De leerlingen lossen vergelijkingen en ongelijkheden grafisch op.

2de graad: Eerstegraadsvergelijkingen en -ongelijkheden grafisch oplossen

Wenk: In contexten kan een vraagstelling leiden tot het oplossen van een vergelijking of ongelijkheid; vaak is dan ICT aangewezen om de bijhorende grafiek te tekenen en de vergelijking of ongelijkheid grafisch op te lossen. Via ICT is dit ook mogelijk voor functietypes die hieronder niet worden bestudeerd.

Wenk: In veel toepassingen zijn vergelijkingen van de vorm $f(x)=g(x)$, waarbij de functies f en g op zich een duidelijke betekenis hebben. Omdat de verschilfunctie $f-g$ vaak niet zo'n duidelijke betekenis heeft, is het aangewezen om de grafieken van beide functies te tekenen en de vergelijking op te lossen door de snijpunten te zoeken.

Wenk: Je kan dit doel betrekken op de hieronder bestudeerde functietypes en realiseren tijdens de studie van die types. Bij het algebraïsch oplossen van vergelijkingen kunnen oplossingen grafisch worden gecontroleerd.

LPD 11 De leerlingen leggen grafisch het verband tussen inverteerbare functies en hun inverse.

Wenk: Je kan aangeven dat de grafieken van de originele functie en de inverse functie

elkaars spiegelbeeld zijn t.o.v. de eerste bissectrice.

Wenk: Je kan aangeven dat niet elke functie inverteerbaar is. In sommige gevallen moet bijvoorbeeld het domein van de originele functie worden beperkt.

Wenk: Je kan werken met functies met een expliciet functievoorschrift. Voorbeelden: machtswortelfunctie als inverse van machtsfunctie en logaritmische functie als inverse van exponentiële functie.

Extra: Je kan de cyclometrische functies invoeren als inverse functies van goniometrische functies.

4.3.2 Exponentiële en logaritmische functies

Minimumdoelen, specifieke minimumdoelen of doelen die leiden naar BK

MD 06.01 De leerlingen rekenen met reële getallen. (LPD 12)

– Machten met rationale exponent, n-de machtswortels en logaritmen met willekeurig grondtal met inbegrip van rekenregels en eigenschappen met symbolen

MD 06.05 De leerlingen analyseren kenmerken van de functie $f(x)=a^x$: domein, bereik, stijgen/dalen, toenemende stijging/afnemende daling, horizontale asymptoot en gedrag op oneindig. (LPD 13)

MD 06.06 De leerlingen gebruiken modellen voor exponentiële groei. (LPD 15)

– Beginwaarde, groeifactor

MD 06.07 De leerlingen gebruiken transformaties van de vorm $f(x) + k$ en $k \cdot f(x)$ om de grafiek van een algemene exponentiële functie $f(x)=b \cdot a^x + c$ op te bouwen vanuit de grafiek van $f(x)=a^x$. (LPD 14)

SMD 06.08.07 De leerlingen leggen het verband tussen de grafiek van een functie en haar kenmerken. (LPD 16,21,24)

– Veeltermfuncties, rationale functies, elementaire irrationale functies, logaritmische functies $f(x)=\log_a(x)$, goniometrische functies $f(x)=\cos x$ en $f(x)=\tan x$
– Domein, bereik, nulwaarden, tekenverloop, stijgen/dalen/constant, extrema, constante/toenemende/afnemende stijging/daling, symmetrie, periode, amplitude, asymptotisch gedrag, gedrag op oneindig

SMD 06.08.13 De leerlingen lossen eenvoudige veeltermvergelijkingen, rationale vergelijkingen, irrationale vergelijkingen, exponentiële vergelijkingen, logaritmische vergelijkingen en goniometrische vergelijkingen algebraïsch op. (LPD 17,23,25)

LPD 12 De leerlingen rekenen met reële getallen.

- ★ Machten met rationale exponent, n-de machtswortels en logaritmen met willekeurig grondtal met inbegrip van rekenregels en eigenschappen met symbolen

2de graad: Hoofdbewerkingen, machten met gehele exponenten en vierkantswortels van reële getallen

Wenk: Vanuit machten kunnen zowel n-de machtswortels als logaritmen worden ingevoerd als inverse operatoren.

Wenk: Berekeningen zonder ICT zijn beperkt in complexiteit en zijn nuttig om inzicht in de concepten te verwerven. Je kan ICT laten inzetten bij minder eenvoudige berekeningen.

Wenk: Bij machten kan je de rekenregels en eigenschappen veralgemenen van gehele exponenten (voorkennis 2de graad) naar rationale exponenten.



Voorbeelden van rekenregels en eigenschappen bij logaritmen: logaritme van een product, quotiënt en macht en veranderen van grondtal.

Extra: Je kan berekeningen met letters laten uitvoeren.

Extra: Je kan leerlingen een logaritmische schaal laten interpreteren. Zo'n schaal wordt gebruikt om numerieke gegevens met grote onderlinge verschillen op een compacte manier voor te stellen. Een stap op de schaal komt overeen met de vermenigvuldiging van de bijhorende grootte met een vaste waarde (link met rekenregel logaritme van product). Voorbeelden van contexten: geluid (decibel), zuurtegraad (pH), sterkte aardbeving (Richter), afstanden tussen sterren in het heelal.

LPD 13 De leerlingen analyseren kenmerken van de functie $f(x)=a^x$: domein, bereik, stijgen/dalen, toenemende stijging/afnemende daling, horizontale asymptoot en gedrag op oneindig.

Wenk: Voor dit leerplandoel is in principe het concept van macht met reële exponent (i.p.v. rationale exponent) nodig. Het is niet nodig om daaraan aandacht te schenken. Je kan de grafiek van een exponentiële functie bekijken als een vloeiende lijn zonder onderbrekingen.

Wenk: Je kan de grafiek laten schetsen zonder ICT of tekenen met ICT.

Wenk: Je kan de invloed van de parameter a in het voorschrift op de functiekenmerken laten ontdekken, al dan niet met ICT.

Wenk: Je kan de kenmerken (gebrek aan) nulwaarden, tekenverloop en snijpunt met verticale as aan bod laten komen.

LPD 14 De leerlingen gebruiken transformaties van de vorm $f(x) + k$ en $k \cdot f(x)$ om de grafiek van een algemene exponentiële functie $f(x)=b \cdot a^x + c$ op te bouwen vanuit de grafiek van $f(x)=a^x$.

Wenk: Het is mogelijk de eerste keer dat leerlingen expliciet in aanraking komen met transformaties van functies. Belangrijk hierbij is de grafische betekenis van de transformaties: verticale verschuiving, verticale uitrekking/inkrimping en eventueel horizontale spiegeling (voor geval $b < 0$). Je kan aangeven dat de transformaties ook bij eerstegraadsfuncties $f(x)=ax+b$ en tweedegraadsfuncties $f(x)=a(x-p)^2+q$ kunnen worden gebruikt om de invloed van de parameters op de grafiek uit te leggen.

Wenk: Je kan via ICT de invloed van de transformaties op de grafiek zichtbaar maken of laten ontdekken. Je kan leerlingen er attent op maken dat de volgorde waarin de transformaties worden toegepast van belang is. Je kan bij exponentiële functies aangeven dat een verticale uitrekking ook kan worden gezien als een horizontale verschuiving.

Wenk: Je kan de invloed van de parameters op de functiekenmerken laten analyseren.

Wenk: Je kan het voorschrift van een algemene exponentiële functie laten opstellen vanuit de grafiek.

LPD 15 De leerlingen gebruiken exponentiële functies als model voor exponentiële groei.

★ Beginwaarde, groeifactor

Duiding: Dit doel omvat enerzijds het modelleren (opstellen van het voorschrift vanuit een verwoording) en anderzijds het oplossen van vragen aan de hand van het model, bv. de waarde bepalen bij een gegeven tijdstip of het tijdstip bij een gegeven waarde bepalen. Alhoewel 'exponentiële groei' een toename suggereert, kan je ook dalende processen beschrijven.

Wenk: Je kan aandacht schenken aan het verschil tussen lineaire versus exponentiële groei (bv. enkelvoudige versus samengestelde intrest).

Wenk: Je kan aandacht schenken aan een correct gebruik van het model. Niet elk proces dat bijvoorbeeld toenemend stijgend is, wordt beschreven door een exponentiële functie. Anderzijds is de groei bij een toenemend stijgende exponentiële functie niet op elk moment sterk. Dat hoort ook bij het kritisch omgaan met informatie.

Wenk: Je kan naast groeifactor ook met het begrip groeipercentage werken. Beide hangen af van het gebruikte tijdsinterval. Je kan ook begrippen zoals verdubbelingstijd en halveringstijd in contexten aanbrengen. Voorbeelden van contexten: radioactiviteit, groei populatie, samengestelde intrest.

Wenk: Je kan de link maken met meetkundige rijen, die als discreet model voor exponentiële groei kunnen worden gebruikt.

LPD 16 De leerlingen leggen het verband tussen de grafiek en kenmerken van de logaritmische functie $f(x)=\log_a(x)$: domein, bereik, nulwaarden, tekenverloop, stijgen/dalen, afnemende stijging/daling, asymptotisch gedrag en gedrag op oneindig.

LPD 17 De leerlingen lossen eenvoudige exponentiële en logaritmische vergelijkingen algebraïsch op.

Wenk: Je kan de nulwaarden van exponentiële en logaritmische functies algebraïsch bepalen.

Extra: Je kan eenvoudige exponentiële en logaritmische ongelijkheden oplossen door eerst de bijhorende vergelijking algebraïsch op te lossen en nadien de ongelijkheid op te lossen via een schets of mentale voorstelling van de grafiek van de bijhorende functie.

4.3.3 Goniometrische functies

Minimumdoelen, specifieke minimumdoelen of doelen die leiden naar BK

MD 06.08 De leerlingen tekenen de grafiek van de functie $f(x)=\sin x$ vanuit de goniometrische cirkel. (LPD 18)

MD 06.09 De leerlingen gebruiken transformaties van de vorm $f(x)+k$, $f(x-k)$, $f(x/k)$ en $k \cdot f(x)$ om de grafiek van een algemene sinusfunctie $f(x)=a \cdot \sin[b(x-c)]+d$ op te bouwen vanuit de grafiek van $f(x)=\sin x$. (LPD 19)



MD 06.10 De leerlingen analyseren kenmerken van een algemene sinusfunctie aan de hand van de grafiek: domein, bereik, nulwaarden, tekenverloop, stijgen/dalen, extrema, periodiciteit en amplitude. (LPD 20)

SMD 06.08.07 De leerlingen leggen het verband tussen de grafiek van een functie en haar kenmerken. (LPD 16,21,24)

- Veeltermfuncties, rationale functies, elementaire irrationale functies, logaritmische functies $f(x)=\log_a(x)$, goniometrische functies $f(x)=\cos x$ en $f(x)=\tan x$
- Domein, bereik, nulwaarden, tekenverloop, stijgen/dalen/constant, extrema, constante/toenemende/afnemende stijging/daling, symmetrie, periode, amplitude, asymptotisch gedrag, gedrag op oneindig

SMD 06.08.13 De leerlingen lossen eenvoudige veeltermvergelijkingen, rationale vergelijkingen, irrationale vergelijkingen, exponentiële vergelijkingen, logaritmische vergelijkingen en goniometrische vergelijkingen algebraïsch op. (LPD 17,23,25)

SMD 06.08.23 De leerlingen gebruiken goniometrische formules om uitdrukkingen te vereenvoudigen. (LPD 22)

- Georiënteerde hoeken
- Formules: verbanden tussen goniometrische getallen van verwante hoeken, som- en verschilformules, verdubbelingsformules

LPD 18 De leerlingen tekenen de grafiek van de functie $f(x)=\sin x$ vanuit de goniometrische cirkel.

2de graad: Sinus van een scherpe hoek in graden, de sinus van een georiënteerde hoek en de goniometrische cirkel. Het verband tussen zestigdelige graden en hoeken in radialen komt niet aan bod.

Wenk: Je kan de goniometrische cirkel gebruiken bij de opbouw van de grafiek. Nadien kan je de stap zetten naar het tekenen van de grafiek zonder goniometrische cirkel.

Wenk: Je kan de grafiek laten schetsen zonder ICT of tekenen met ICT.

LPD 19 De leerlingen gebruiken transformaties van de vorm $f(x)+k$, $f(x-k)$, $f(x/k)$ en $k \cdot f(x)$ om de grafiek van een algemene sinusfunctie $f(x)=a \cdot \sin[b(x-c)]+d$ op te bouwen vanuit de grafiek van $f(x)=\sin x$.

Wenk: Je kan je beperken tot voorschriften waarbij de parameters a en b positief zijn.

Wenk: Je kan via ICT de invloed van de transformaties op de grafiek zichtbaar maken of laten ontdekken. Je kan leerlingen er attent op maken dat de volgorde waarin de transformaties worden toegepast van belang is. Je kan via de transformaties de grafische betekenis van de parameters a , b , c en d in het voorschrift duiden.

Wenk: Je kan aandacht schenken aan het correct uitdrukken van de grafische betekenis van de transformaties. Bij uitrekkingen en inkrimpingen is de combinatie met de correcte factor van belang.

Je kan i.p.v. de transformatie $f(x/k)$ ook werken met de transformatie $f(k \cdot x)$. Het voordeel is dat de relatie met de parameter b directer is; het nadeel is dat de transformatie $f(k \cdot x)$ nu een horizontale inkrimping met factor k is i.p.v. een uitrekking met factor k .

Wenk: Je kan leerlingen confronteren met situaties waarin het voorschrift niet in de gegeven vorm is, bv. $f(x)=a \cdot \sin(bx+c)$. Ook in bepaalde contexten is dat het geval.

Wenk: Je kan het voorschrift van een algemene sinusfunctie laten opstellen vanuit de grafiek.

LPD 20 De leerlingen analyseren kenmerken van een algemene sinusfunctie aan de hand van de grafiek: domein, bereik, nulwaarden, tekenverloop, stijgen/dalen, extrema, periode en amplitude.

Wenk: Naast periode en amplitude kunnen (bv. afhankelijk van de context) ook de begrippen frequentie, evenwichtslijn/evenwichtspositie en faseverschuiving worden gebruikt om de parameters in het voorschrift te beschrijven.

Wenk: Je kan de grafiek laten schetsen zonder ICT of tekenen met ICT.

Wenk: Je kan contexten gebruiken zoals getijden, temperatuur, cirkelvormige bewegingen, harmonische trillingen (bv. geluidsgolven) en ademhaling. Je kan dan ook vraagstukken of problemen laten oplossen. Als een vraag aanleiding geeft tot een goniometrische vergelijking, dan kan deze grafisch worden opgelost met behulp van ICT.

LPD 21 De leerlingen leggen het verband tussen de grafiek en kenmerken van de goniometrische functies $f(x)=\cos x$ en $f(x)=\tan x$: domein, bereik, nulwaarden, tekenverloop, stijgen/dalen, extrema, periode, amplitude en asymptotisch gedrag.

Wenk: Je kan de grafiek van de cosinusfunctie laten tekenen (vanuit de goniometrische cirkel). Je kan ook de grafiek met behulp van een horizontale verschuiving verkrijgen vanuit de grafiek van de sinusfunctie.

LPD 22 De leerlingen gebruiken som- en verschilformules en formules voor dubbele hoek om goniometrische uitdrukkingen te vereenvoudigen.

2de graad: Goniometrische getallen van verwante hoeken

Wenk: Je kan de complexiteit van de goniometrische uitdrukkingen beperken. De nadruk ligt op het inzicht in de gebruikte formules.

Wenk: Je kan de leerlingen laten gebruik maken van een formularium. Je kan aanvankelijk wel de formules laten instuderen. Dit helpt leerlingen om nadien de formules te herkennen en te gebruiken.

Extra: Je kan de formules van Simpson gebruiken om goniometrische uitdrukkingen te vereenvoudigen.

LPD 23 De leerlingen lossen eenvoudige goniometrische vergelijkingen algebraïsch op.

Wenk: Je kan de nulwaarden van goniometrische functies algebraïsch bepalen.

Extra: Je kan goniometrische ongelijkheden oplossen door eerst de bijhorende vergelijking algebraïsch op te lossen en nadien de ongelijkheid op te lossen (bv. door gebruik te maken van de goniometrische cirkel of via mentale voorstelling van grafiek).



4.3.4 Veelterm-, rationale en irrationale functies

Minimumdoelen, specifieke minimumdoelen of doelen die leiden naar BK

SMD 06.08.07 De leerlingen leggen het verband tussen de grafiek van een functie en haar kenmerken. (LPD 16,21,24)

- Veeltermfuncties, rationale functies, (elementaire) irrationale functies, logaritmische functies $f(x)=\log_a(x)$, goniometrische functies $f(x)=\cos x$ en $f(x)=\tan x$
- Domein, bereik, nulwaarden, tekenverloop, stijgen/dalen/constant, extrema, constante/toenemende/afnemende stijging/daling, symmetrie, periode, amplitude, asymptotisch gedrag, gedrag op oneindig

SMD 06.08.12 De leerlingen analyseren deelbaarheid bij veeltermen in één onbekende over de reële getallen. (LPD 25)

- Euclidische deling, reststelling

SMD 06.08.13 De leerlingen lossen eenvoudige veeltermvergelijkingen, rationale vergelijkingen, irrationale vergelijkingen, exponentiële vergelijkingen, logaritmische vergelijkingen en goniometrische vergelijkingen algebraïsch op. (LPD 17,23,25)

LPD 24 De leerlingen leggen het verband tussen de grafiek en kenmerken van veeltermfuncties, rationale functies en (elementaire) irrationale functies: domein, bereik, nulwaarden, tekenverloop, stijgen/dalen/constant, extrema, constante/toenemende/afnemende stijging/daling, symmetrie, asymptotisch gedrag en gedrag op oneindig.

Wenk: Je kan bij rationale functies aandacht schenken aan homografische functies en transformaties gebruiken bij de opbouw van de grafieken.

Wenk: Je kan je bij irrationale functies beperken tot eenvoudige functievoorschriften.

Wenk: Je kan ook het verband leggen tussen het voorschrift en de kenmerken (bv. multipliciteit van nulwaarden bij veeltermfuncties, asymptoten en perforaties bij rationale functies). Je kiest hierbij best doelgerichte voorbeelden zodat rekenwerk wordt beperkt.

Wenk: Je kan het asymptotisch gedrag hier beperken tot verticale en horizontale asymptoten. Via limieten van functies kunnen ook schuine asymptoten worden bepaald.

Wenk: Het functiekenmerk constante/toenemende/afnemende stijging/daling kan ook pas aan bod komen bij de analyse van het verloop van functies met behulp van afgeleiden.

LPD 25 De leerlingen lossen eenvoudige veeltermvergelijkingen, rationale vergelijkingen en irrationale vergelijkingen algebraïsch op.

★ Euclidische deling van veeltermen, reststelling

2de graad: Het analyseren van deelbaarheid bij veeltermen in één onbekende is opgenomen in de bijkomende laag van het leerplan van de tweede graad en geldt als beginsituatie voor dit leerplan.

Wenk: Indien de Euclidische deling van veeltermen en de reststelling al aan bod kwamen in de tweede graad, volstaat het om na te gaan of leerlingen die inhoud nog

beheersen om de stap te kunnen zetten naar het oplossen van veeltermvergelijkingen.

Wenk: Je kan de complexiteit van de vergelijkingen beperken.

Wenk: Je kan de nulwaarden van veeltermfuncties, rationale functies en irrationale functies algebraïsch bepalen.

Extra: Je kan veelterm- en rationale ongelijkheden oplossen door eerst de bijhorende vergelijking algebraïsch op te lossen en nadien de ongelijkheid op te lossen (bv. via mentale voorstelling van grafiek of door gebruik te maken van het begrip multipliciteit).

4.3.5 Afgeleiden

Minimumdoelen, specifieke minimumdoelen of doelen die leiden naar BK

MD 06.03 De leerlingen interpreteren de afgeleide als limiet van een differentiequotiënt en als richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek. (LPD 27)

MD 06.04 De leerlingen leggen grafisch het verband tussen een functie en haar afgeleide functie. (LPD 28)

SMD 06.08.16 De leerlingen bepalen grafisch en algebraïsch limieten van functies en analyseren het asymptotisch gedrag. (LPD 26)

– Continuïteit

SMD 06.08.17 De leerlingen berekenen de afgeleide functie van functies die zijn opgebouwd uit veeltermfuncties, rationale functies, irrationale functies, exponentiële functies, logaritmische functies en goniometrische functies. (LPD 29)

– Afleidbaarheid

– Rekenregels: afgeleide van een som, product, quotiënt van functies en afgeleide van een samengestelde functie (kettingregel)

SMD 06.08.18 De leerlingen analyseren het verloop van functies met behulp van de eerste en tweede afgeleide functie en lossen extremumproblemen op. (LPD 30)

– Stelling van Rolle, middelwaardestelling van Lagrange

LPD 26 De leerlingen bepalen grafisch en algebraïsch limieten van functies en analyseren het asymptotisch gedrag.

★ Continuïteit

Wenk: Je kan het limietbegrip voor functies formeel invoeren en zo LPD 45 realiseren.

Wenk: Je kan de Euclidische deling van veeltermen gebruiken om horizontale of schuine asymptoten te bepalen bij rationale functies.

Extra: Je kan de regel van de l'Hôpital gebruiken bij het bepalen van limieten van functies.

LPD 27 De leerlingen interpreteren de afgeleide als limiet van een differentiequotiënt en als richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek.

2de graad: Richtingscoëfficiënt van een eerstegraadsfunctie

Wenk: Je kan aandacht schenken aan het verschil tussen gemiddelde verandering versus



ogenblikkelijke verandering (bv. trajectcontrole versus flitspaal). Dat verschil kan ook grafisch worden geïllustreerd.

Wenk: Voorbeelden van contexten: snelheid, versnelling, marginale grootheden in de economie, debiet, helling van een berg, elasticiteit in de economie.

Wenk: Je kan de vergelijking van de raaklijn aan een grafiek in een punt opstellen a.d.h.v. de afgeleide in een punt.

LPD 28 De leerlingen leggen grafisch het verband tussen een functie en haar afgeleide functie.

Wenk: In dit doel wordt de overgang gemaakt van afgeleide in een punt naar afgeleide functie. Die overgang kan bijvoorbeeld worden ingeleid via toenamedigrammen. Je kan ook met behulp van ICT de raaklijn aan de grafiek laten variëren en tegelijkertijd de hellingsgrafiek tekenen.

Wenk: Omdat het verband grafisch moet worden gelegd, kan je werken met willekeurige functies zonder expliciet functievoorschrift. Je kan de grafiek van een functie met de grafiek van haar afgeleide functie laten verbinden of omgekeerd, de grafiek van een afgeleide functie laten verbinden met de grafiek van de originele functie. Je kan ook de grafieken laten schetsen. Als tussenstap kan het aangewezen zijn om de tekentabel van de afgeleide functie te laten opstellen. Je kan zo ook de link leggen met maxima of minima van functies.

LPD 29 De leerlingen berekenen de afgeleide functie van functies die zijn opgebouwd uit veeltermfuncties, rationale functies, irrationale functies, exponentiële functies, logaritmische functies en goniometrische functies.

★ Afleidbaarheid

Rekenregels: afgeleide van een som, product, quotiënt van functies en afgeleide van een samengestelde functie (kettingregel)

Extra: Je kan de afgeleide functie van een inverse functie bepalen via impliciet afleiden.

LPD 30 De leerlingen analyseren het verloop van functies met behulp van de eerste en tweede afgeleide functie en lossen extremumproblemen op.

★ Stelling van Rolle, middelwaardstelling van Lagrange

Wenk: Je kan de functiekenmerken extrema, constant/stijgend/dalend, buigpunten, hol/bol en constante/toenemende/afnemende stijging/daling bepalen.

Wenk: Je kan bij extremumproblemen aandacht schenken voor het opstellen van het functievoorschrift, het praktisch domein van de functie en een evaluatie van de berekende oplossing.

4.3.6 Integralen

Minimumdoelen, specifieke minimumdoelen of doelen die leiden naar BK

SMD 06.08.19 De leerlingen interpreteren een bepaalde integraal als de limiet van een som en als een georiënteerde oppervlakte. (LPD 31)

- Booglengte van een kromme
- Volume van een omwentelingslichaam

SMD 06.08.20 De leerlingen leggen het verband tussen bepaalde integralen en primitieve functies door middel van de hoofdstelling van de integraalrekening. (LPD 32)

SMD 06.08.21 De leerlingen berekenen bepaalde en onbepaalde integralen van functies. (LPD 33)

- Integratiemethoden: onmiddellijke integratie, integratie door splitsing, integratie door eenvoudige substitutie, partiële integratie

LPD 31 De leerlingen interpreteren een bepaalde integraal als de limiet van een som en als een georiënteerde oppervlakte.

- ★ Booglengte van een kromme
Volume van een omwentelingslichaam

Wenk: De oppervlakte onder een grafiek van een functie kan worden benaderd door de som van oppervlaktes van een aantal rechthoeken (Riemannsom, bv. onder- en bovensommen). Door dit aantal te laten toenemen en de limiet te nemen, wordt de echte oppervlakte verkregen.

Wenk: Voorbeelden van contexten: afstand uit snelheid, snelheid uit versnelling, arbeid uit kracht, energie uit vermogen, inkomensongelijkheid met Gini-coëfficiënt en Lorenzcurve.

Wenk: Je kan aangeven hoe integralen kunnen worden gebruikt om het volume van een omwentelingslichaam en de booglengte van een kromme te bepalen (eventuele berekeningen via ICT).

LPD 32 De leerlingen leggen het verband tussen bepaalde integralen en primitieve functies door middel van de hoofdstelling van de integraalrekening.

LPD 33 De leerlingen berekenen bepaalde en onbepaalde integralen van functies.

- ★ Integratiemethoden: onmiddellijke integratie, integratie door splitsing, integratie door eenvoudige substitutie, partiële integratie

Wenk: Je kan bepaalde integralen gebruiken om georiënteerde en werkelijke oppervlaktes te berekenen.

Wenk: Je kan ICT gebruiken om integralen te bepalen. Je kan ook aangeven dat veel integralen niet te berekenen zijn met behulp van een primitieve functie.

Extra: Je kan oneigenlijke integralen introduceren en bepalen met behulp van limieten.

4.4 Algebra

4.4.1 Matrices

Minimumdoelen, specifieke minimumdoelen of doelen die leiden naar BK



SMD 06.08.01 De leerlingen voeren bewerkingen uit met matrices: optelling, scalaire vermenigvuldiging, matrixvermenigvuldiging, machtsverheffing en transpositie. (LPD 34)

SMD 06.08.02 De leerlingen gebruiken matrixmodellen om evoluties te beschrijven. (LPD 35)

– Matrixvoorstelling van een graaf

SMD 06.08.03 De leerlingen berekenen de rang van matrices, de inverse matrix van inverteerbare matrices en de determinant van vierkante matrices. (LPD 36)

SMD 06.08.04 De leerlingen lossen stelsels van eerstegraadsvergelijkingen op met behulp van de methode van Gauss-Jordan. (LPD 37)

LPD 34 De leerlingen voeren bewerkingen uit met matrices: optelling, scalaire vermenigvuldiging, matrixvermenigvuldiging, machtsverheffing en transpositie.

Wenk: Matrices en bewerkingen met matrices kunnen worden ingevoerd vanuit toepassingen, waar matrices worden gebruikt als handige opslagplaats voor gegevens.

Wenk: Je kan aandacht schenken aan eigenschappen en rekenregels van bewerkingen zoals commutativiteit en associativiteit van matrixoptelling, associativiteit van matrixvermenigvuldiging, distributiviteit, neutrale elementen voor optelling en vermenigvuldiging.

Wenk: Niet alle eigenschappen voor het rekenen met getallen zijn ook geldig voor het rekenen met matrices. Voorbeelden: bestaan van nuldelers en niet-commutativiteit bij matrixvermenigvuldiging.

LPD 35 De leerlingen gebruiken matrixmodellen om evoluties te beschrijven.

★ Matrixvoorstelling van een graaf

Wenk: Voorbeelden van contexten: evolutie van populaties (Lesliematrices), migratiepatronen (migratiematrices), het aantal wegen tussen knooppunten in netwerk (verbindingsmatrices), het koopgedrag bij een groep consumenten (Markovketens).

Wenk: Je kan ICT gebruiken bij het berekenen van machten van matrices.

Wenk: Je kan de evolutie op de lange termijn bekijken. Zo kan je onderzoeken of er bv. stabilisatie optreedt.

Wenk: Je kan aandacht schenken aan het modelleren, namelijk een concrete situatie in een realistische context beschrijven door een matrixmodel (bv. vanuit dataset).

LPD 36 De leerlingen berekenen de rang van matrices, de inverse matrix van inverteerbare matrices en de determinant van vierkante matrices.

Wenk: Je kan bij vierkante matrices het verband leggen tussen de rang, inverteerbaarheid, de determinant en oplosbaarheid van stelsels.

Wenk: Je kan de inverse matrix van een inverteerbare matrix M bepalen door de matrix $[M | I]$ te rijherleiden naar de matrix $[I | M^{-1}]$.

Wenk: Je kan het concept determinant inleiden door voor 2×2 -matrices een inverse

matrix te zoeken. Je kan determinanten bepalen door te ontwikkelen naar een rij of kolom. Voor 3x3-matrices kan je ook gebruik maken van de regel van Sarrus.

Wenk: Berekeningen zonder ICT zijn beperkt in complexiteit en zijn nuttig om inzicht in de concepten te verwerven. Je kan ICT inzetten bij minder eenvoudige berekeningen.

LPD 37 De leerlingen lossen stelsels van eerstegraadsvergelijkingen op met behulp van de methode van Gauss-Jordan.

Wenk: Minstens een stelsel met drie onbekenden komt aan bod. Je hebt aandacht voor bepaalde, onbepaalde en strijdige stelsels.

Wenk: Berekeningen zonder ICT zijn beperkt in complexiteit en zijn nuttig om inzicht in de methode te verwerven. Je kan ICT laten inzetten bij minder eenvoudige stelsels.

Extra: Je kan stelsels met één parameter bespreken.

4.4.2 Complexe getallen

Minimumdoelen, specifieke minimumdoelen of doelen die leiden naar BK

SMD 06.08.24 De leerlingen stellen complexe getallen voor in het vlak. (LPD 38)

SMD 06.08.25 De leerlingen voeren bewerkingen uit met complexe getallen in cartesische vorm: optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deling. (LPD 39)

SMD 06.08.26 De leerlingen lossen tweedegraadsvergelijkingen met reële coëfficiënten in één onbekende op in de verzameling van de complexe getallen. (LPD 40)

SMD 06.08.27 De leerlingen zetten complexe getallen in cartesische vorm om naar goniometrische vorm en omgekeerd. (LPD 41)

SMD 06.08.28 De leerlingen voeren bewerkingen uit met complexe getallen in goniometrische vorm: vermenigvuldiging, deling, machtsverheffing en n-de machtsworteltrekking. (LPD 42)

– Formule van de Moivre

LPD 38 De leerlingen stellen complexe getallen voor in het vlak.

Wenk: Je kan de imaginaire eenheid i invoeren als een oplossing van de vergelijking $x^2 = -1$. De notatie van vierkantswortel mag bij een negatief reëel getal niet worden gebruikt. Door de reële getallen uit te breiden met het getal i en door met die getallen te rekenen zoals gewoonlijk, verkrijg je de verzameling van de complexe getallen.

Wenk: De complexe getallen worden grafisch voorgesteld in een vlak, dat het vlak van Gauss wordt genoemd. Een complex getal $a + bi$ komt hierbij overeen met een koppel (a, b) .

Wenk: Je kan zonder bewijs aangeven dat er op de complexe getallen geen totale orde is die zich goed gedraagt t.o.v. de optelling en de vermenigvuldiging. Daarom worden de symbolen $<$ en \leq niet gebruikt bij complexe getallen.



LPD 39 De leerlingen voeren bewerkingen uit met complexe getallen in cartesische vorm: optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deling.

Wenk: Je kan de link leggen met de optelling, aftrekking en scalaire vermenigvuldiging van vectoren en aandacht schenken aan de meetkundige betekenis.

Extra: Je kan de vierkantswortels van een complex getal in cartesische vorm bepalen.

LPD 40 De leerlingen lossen tweedegraadsvergelijkingen met reële coëfficiënten in één onbekende op in de verzameling van de complexe getallen.

2de graad: Tweedegraadsvergelijkingen algebraïsch oplossen in de reële getallen

LPD 41 De leerlingen zetten complexe getallen in cartesische vorm om naar goniometrische vorm en omgekeerd.

LPD 42 De leerlingen voeren bewerkingen uit met complexe getallen in goniometrische vorm: vermenigvuldiging, deling, machtsverheffing en n-de machtsworteltrekking.

★ Formule van de Moivre

Wenk: Je kan het verband leggen met de som- en verschilformules in de goniometrie.

Wenk: Je kan aandacht schenken voor de meetkundige interpretatie van de bewerkingen. Voorbeelden: de n-de machtswortels vormen een regelmatige n-hoek, opeenvolgende machten liggen op een spiraal.

4.4.3 Algebraïsche structuur

Minimumdoelen, specifieke minimumdoelen of doelen die leiden naar BK

SMD 06.08.38 De leerlingen analyseren verzamelingen voorzien van één of meerdere bewerkingen aan de hand van een algebraïsche structuur. (LPD 43)

LPD 43 De leerlingen analyseren verzamelingen voorzien van één of meerdere bewerkingen aan de hand van een algebraïsche structuur.

Wenk: Je kan kiezen welke algebraïsche structuur er wordt behandeld. Voorbeelden van structuren: groep (met één bewerking) en vectorruimte (met twee bewerkingen).

Wenk: Je kan de algebraïsche structuur definiëren als een niet-lege verzameling met één of meerdere bewerkingen die aan bepaalde voorwaarden voldoet (bv. vertrekkend vanuit de eigenschappen van bewerkingen bij concrete voorbeelden). Je kan laten nagaan of gegeven verzamelingen met bijhorende bewerking(en) voldoen aan de definitie.

Wenk: Voorbeelden van vectorruimten: \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , complexe getallen, veeltermen, matrices, rijen, functies.

Wenk: Je kan bij groepen zowel oneindige als eindige voorbeelden geven. Voorbeelden: getallenverzamelingen met optelling of vermenigvuldiging, vectoren met optelling, matrices met optelling, gehele getallen modulo n met optelling (bv. link

met klokrekenen voor $n=12$), symmetriegroepen van figuren met samenstelling (bv. gelijkzijdige driehoek), permutaties met samenstelling.

4.5 Discrete wiskunde

4.5.1 Rijen

Minimumdoelen, specifieke minimumdoelen of doelen die leiden naar BK

MD 06.12 De leerlingen gebruiken rekenkundige en meetkundige rijen om patronen te beschrijven. (LPD 44)

- Recursief voorschrift, formule voor de algemene term
- Formule voor de som van de eerste n termen

SMD 06.08.14 De leerlingen definiëren het limietbegrip op een formele manier. (LPD 45)

SMD 06.08.15 De leerlingen bepalen limieten van rijen. (LPD 46)

- Convergentie

LPD 44 De leerlingen gebruiken rekenkundige en meetkundige rijen om patronen te beschrijven.

- ★ Recursief en expliciet voorschrift
Formule voor de som van de eerste n termen

Wenk: Je kan enkelvoudige en samengestelde intrest gebruiken als context.

Wenk: Je kan rijen bekijken als discrete functies en zo de link maken tussen rekenkundige rijen en eerstegraadsfuncties en tussen meetkundige rijen en exponentiële functies. Je kan ook de grafiek van de discrete functie tekenen om de kenmerken van de rij zichtbaar te maken.

Extra: Je kan de convergentie van een meetkundige reeks (oneindige som) onderzoeken.

LPD 45 De leerlingen definiëren het limietbegrip op een formele manier.

Wenk: Je kan het limietbegrip formeel definiëren bij rijen (via de epsilon- N -definitie) of bij functies (met epsilon-delta-definitie). Je kan aandacht schenken aan afhankelijkheid van N of delta t.o.v. epsilon.

Wenk: Je kan kwantoren gebruiken bij de definitie.

Extra: Je kan de formele limietdefinitie toepassen op een concreet voorbeeld.

LPD 46 De leerlingen bepalen limieten van rijen.

- ★ Convergentie

Wenk: Je kan voorbeelden geven van divergente rijen (bv. alternerende rij $u_n = (-1)^n$ of rijen met limiet oneindig). Je kan de convergentie onderzoeken van rekenkundige en meetkundige rijen.

Wenk: Je kan limieten van rijen zowel algebraïsch als grafisch bepalen.



Wenk: Je kan enkele standaardlimieten van rijen aan bod laten komen. Voorbeelden:
 $u_n=1/n$, $u_n=1/n^2$, $u_n=\sqrt{n}$.

Wenk: Je kan rekenregels voor het berekenen van limieten aan bod laten komen.
Voorbeelden: limiet van som, verschil, product.

Extra: Je kan de insluitstelling gebruiken om limieten van rijen te bepalen.

4.5.2 Telproblemen

Minimumdoelen, specifieke minimumdoelen of doelen die leiden naar BK

SMD 06.08.34 De leerlingen lossen telproblemen op met en zonder herhaling en waarbij de volgorde al dan niet van belang is. (LPD 47)

- Binomium van Newton
- Driehoek van Pascal

LPD 47 De leerlingen lossen telproblemen op met en zonder herhaling en waarbij de volgorde al dan niet van belang is.

- ★ Binomium van Newton
- Driehoek van Pascal

2de graad: Telproblemen aan de hand van boomdiagrammen en venndiagrammen

Wenk: Je kan de formules bij combinaties, variaties en permutaties aan bod laten komen.

Wenk: Je kan het sommatieteken gebruiken bij het binomium van Newton.

4.6 Data en onzekerheid

4.6.1 Kansrekenen

Minimumdoelen, specifieke minimumdoelen of doelen die leiden naar BK

MD 06.13 De leerlingen bepalen kansen met behulp van kruistabellen, boomdiagrammen en de wet van Laplace. (LPD 48)

- Verband tussen relatieve frequentie en kans

SMD 06.08.35 De leerlingen berekenen en interpreteren kansen met behulp van de binomiale verdeling. (LPD 49)

- Verwachtingswaarde, standaardafwijking

LPD 48 De leerlingen bepalen kansen met behulp van kruistabellen, boomdiagrammen en de wet van Laplace.

- ★ Verband tussen relatieve frequentie en kans

2de graad: Telproblemen met behulp van boomdiagrammen en venndiagrammen

Wenk: Bij een groot aantal herhalingen van een kansexperiment zal de relatieve frequentie van een gebeurtenis naderen naar de kans (wet van de grote aantallen). Je kan dat fenomeen tonen, bv. via simulaties met behulp van ICT. In

situaties waarbij de exacte kans niet is gekend, kan je dat idee ook gebruiken om de kans te schatten (bv. gooien met oneerlijke dobbelsteen, kans op overlijden op bepaalde leeftijd).

Wenk: Je kan de terminologie van gebeurtenis, uitkomst en uitkomstenverzameling gebruiken.

Wenk: Via kruistabellen of boomdiagrammen kunnen voorwaardelijke of marginale kansen worden bepaald. Je kan ook kanswetten zoals de wet van de totale kans en de wet van Bayes gebruiken om dergelijke kansen te bepalen.

Extra: Je kan ook andere diagrammen gebruiken bij het bepalen van kansen zoals Venndiagrammen of roosterdiagrammen (bv. gooien met twee dobbelstenen).

LPD 49 De leerlingen berekenen en interpreteren kansen met behulp van de binomiale verdeling.

★ Verwachtingswaarde, standaardafwijking

Wenk: Je kan via voorbeelden het concept van kansverdeling van een toevalsvariabele aanbrengen en de begrippen verwachtingswaarde en standaardafwijking invoeren. Je kan het onderscheid maken tussen discrete en continue variabelen. Bij discrete toevalsvariabelen komt de kansverdeling overeen met een tabel van de kansen van alle mogelijke uitkomsten van het bijhorende kansexperiment. Dit kan grafisch worden weergegeven met behulp van een staafdiagram. Naar analogie met een tabel van relatieve frequenties kunnen we ook bij een discrete kansverdeling het gemiddelde (verwachtingswaarde) en de standaardafwijking berekenen.

Wenk: Bij het berekenen van kansen kan er worden gebruik gemaakt van ICT.

Extra: Je kan grafisch het verband leggen tussen een binomiale verdeling (discreet) en normale verdeling (continu) met hetzelfde gemiddelde en dezelfde standaardafwijking. Als de steekproefgrootte n voldoende groot is (zodat ook np en $n(1-p)$ voldoende groot zijn), zal de binomiale verdeling goed worden benaderd door de bijhorende normale verdeling.

Extra: Je kan bij kansverdelingen een cumulatieve verdelingsfunctie (grafisch) laten interpreteren.

4.6.2 Statistiek

Minimumdoelen, specifieke minimumdoelen of doelen die leiden naar BK

MD 06.14 De leerlingen verklaren het belang van randomisatie en representativiteit bij steekproeven voor het formuleren van statistische besluiten over een populatie. (LPD 50)

- Variabiliteit van steekproeven
- Aselecte steekproef

MD 06.15 De leerlingen leggen in concrete situaties het verschil uit tussen samenhang en causaliteit. (LPD 51)

MD 06.16 De leerlingen gebruiken de normale verdeling als continu model bij gegeven data. (LPD 52)

- Grafische beoordeling van de toepasbaarheid van het model



- Rekenkundig gemiddelde en de standaardafwijking van de gegeven data als schatting voor de parameters van het model
- Grafische betekenis van gemiddelde en standaardafwijking van een normaal verdeelde kansvariabele in termen van de Gausskromme

MD 06.17 De leerlingen berekenen kansen bij een normaal verdeelde kansvariabele. (LPD 53)

SMD 06.08.36 De leerlingen toetsen hypothesen. (LPD 54)

- Nulhypothese, alternatieve hypothese, p-waarde, significantieniveau, steekproevenverdeling

LPD 50 De leerlingen verklaren het belang van randomisatie en representativiteit bij steekproeven voor het formuleren van statistische besluiten over een populatie.

★ Variabiliteit van steekproeven Aselecte steekproef

Wenk: Je kan aangeven dat er in een populatie leden zitten met verschillende eigenschappen. Om conclusies te kunnen trekken uit onderzoek moet de steekproef een goede weerspiegeling zijn van de populatie (representatief). Randomisatie bij steekproefselectie wordt gebruikt als middel om representativiteit te bekomen. Bij een aselecte steekproef hebben alle leden uit de populatie een even grote kans om te worden gekozen.

Wenk: Je kan enkele redenen geven voor het werken met een steekproef in plaats van met de volledige populatie. Voorbeelden: onmogelijk om iedereen te bereiken, beperking in duurtijd onderzoek, beperking kostprijs.

Wenk: Je kan concrete voorbeelden geven van vertekende steekproeven (selectiebias).

Wenk: Je kan uitleggen hoe randomisatie in de praktijk kan worden verkregen (door bewust toeval in te schakelen). Voorbeelden: lukraak papiertjes trekken uit een hoed, alle leden van de populatie nummeren en dan randomgetallen genereren met ICT.

Wenk: Je kan steekproefvariabiliteit illustreren via simulaties met behulp van ICT.

Extra: Je kan aandacht schenken aan de steekproefgrootte. Het is een misconceptie dat grote steekproeven steeds representatief zijn. Bij random steekproeven worden best wel voldoende grote steekproeven gebruikt (om de foutenmarge voldoende klein te houden).

Extra: Je kan voorbeelden geven van andere selectiemethodes van steekproeven (dan een enkelvoudige random steekproef) zoals een getrapte steekproef of een gestratificeerde steekproef.

LPD 51 De leerlingen leggen in concrete situaties het verschil uit tussen samenhang en causaliteit.

2de graad: Spreidingsdiagrammen

Wenk: Samenhang of correlatie tussen twee variabelen wordt vaak onterecht geïnterpreteerd als een oorzaak-gevolg-relatie of causaliteit. Soms is er enkel sprake van samenhang omwille van de verstoring door een derde verborgen variabele (confounding); in andere gevallen worden bijvoorbeeld oorzaak en gevolg omgedraaid. In sommige gevallen is zelfs de samenhang eerder ontstaan

door toevalligheden. Je kan die situaties via concrete voorbeelden tonen.

Wenk: Je kan aandacht schenken aan misleidingen (bv. reclameboodschappen en nepnieuws), die te herleiden zijn tot dit leerplandoel.

Wenk: Je kan het verschil uitleggen tussen observationeel onderzoek (waarbij het moeilijk is om causaliteit aan te tonen omwille van mogelijke verborgen variabelen) en experimenteel onderzoek (dat zodanig ontworpen is om causaliteit aan te tonen). Experimenteel onderzoek wordt bijvoorbeeld gebruikt voor het testen van een geneesmiddel: er wordt dan gewerkt met een testgroep en controlegroep. Soms is experimenteel onderzoek niet aangewezen, bv. bij onderzoek naar de gevolgen van roken.

LPD 52 De leerlingen gebruiken de normale verdeling als continu model bij gegeven data.

- ★ Grafische beoordeling van de toepasbaarheid van het model
Rekenkundig gemiddelde en de standaardafwijking van de gegeven data als schatting voor de parameters van het model
Grafische betekenis van gemiddelde en standaardafwijking van een normaal verdeelde kansvariabele in termen van de Gausskromme

2de graad: Beschrijvende statistiek

Wenk: Je kan intuïtief de overgang verklaren van een histogram naar een dichtheidsfunctie door over te gaan op relatieve frequenties per eenheid (door te delen door de breedte van elk interval) en door een vloeiende kromme over het diagram te tekenen.

Wenk: Je kan het model grafisch beoordelen door te kijken of de gegevens aanleiding geven tot een klokvormig histogram of door over het histogram de dichtheidsfunctie van de normale verdeling met geschatte parameters te tekenen.

Wenk: Je kan via voorbeelden (bv. met niet-symmetrische verdeling) aangeven dat niet alle gegevens normaal verdeeld zijn. Concreet voorbeeld: loon van een populatie.

Wenk: ICT is aangewezen om het gemiddelde en de standaardafwijking van een steekproef te berekenen.

Wenk: Je kan aangeven dat het gemiddelde van een normaal verdeelde kansvariabele overeen komt met de x-coördinaat van de top van de Gausskromme en de standaardafwijking met de horizontale afstand van de top tot één van de twee buigpunten. Je kan ook het verband aangeven tussen de standaardafwijking en de hoogte van de Gausskromme.

Extra: Je kan Z-scores laten bepalen en interpreteren.

Extra: Je kan bij de beoordeling van het model ook de 68-95-99,7-regel of een QQ-plot gebruiken (met behulp van ICT).

LPD 53 De leerlingen berekenen kansen bij een normaal verdeelde kansvariabele.

Wenk: Je kan kansen interpreteren als de oppervlakte van een gepast gebied onder de Gausskromme.

Wenk: ICT kan worden ingeschakeld om kansen te bepalen, tenzij eventueel de



standaard vuistregels kunnen worden gebruikt, bv. interval $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$ met 68% kans en interval $[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$ met 95% kans.

LPD 54 De leerlingen toetsen hypothesen aan de hand van de begrippen nulhypothese, alternatieve hypothese, p-waarde en significantieniveau.

★ Steekproevenverdeling

Wenk: Je kan het begrip steekproevenverdeling illustreren via simulaties met behulp van ICT en de link leggen met variabiliteit van steekproeven.

Wenk: Je kan hypothesetoetsen opstellen voor populatieproporties of populatiegemiddeldes.

Wenk: Je kan aandacht schenken aan de betekenis van de gebruikte begrippen. Zo is de p-waarde de kans dat in de (steekproeven)verdeling bepaald door de nulhypothese, de waarde vanuit de steekproef wordt behaald of (eenzijdig of tweezijdig) wordt overschreden.

Wenk: Je kan ICT gebruiken voor het bepalen van de p-waarde.

Extra: Je kan de twee soorten fouten aan bod laten komen: type I-fout (onterecht verwerpen van de nulhypothese) of type II-fout (onterecht niet verwerpen). Je kan het onderscheidingsvermogen van de test laten bepalen.

Extra: Je kan voor voldoende grote steekproefgrootte een steekproevenverdeling benaderen door een normale verdeling door middel van de Centrale Limietstelling.

LPD K1 De leerlingen leggen in betekenisvolle situaties de betekenis uit van betrouwbaarheidsniveau, betrouwbaarheidsinterval en foutenmarge.

Wenk: Je kan aangeven dat zowel het betrouwbaarheidsniveau, de steekproefgrootte als de standaardafwijking een effect hebben op de grootte van de foutenmarge en bijgevolg het betrouwbaarheidsinterval.

Wenk: Betrouwbaarheidsintervallen kunnen worden gebruikt voor populatieproporties en populatiegemiddeldes.

Extra: Je kan betrouwbaarheidsintervallen bepalen met behulp van ICT.

4.7 Onderzoekscompetentie

Minimumdoelen, specifieke minimumdoelen of doelen die leiden naar BK

SMD 01.01.01 De leerlingen doorlopen een onderzoekscyclus in samenhang met inhouden van minstens 1 wetenschapsdomein verbonden aan de studierichting. (LPD 55)

LPD 55 # De leerlingen doorlopen een onderzoekscyclus in samenhang met specifieke inhouden van dit leerplan.

Duiding: Specifieke inhouden: analytische ruimtemeetkunde (inclusief vectoren), uitbreiding functietypes (logaritmische, cosinus-, tangens-, veelterm-, rationale en

irrationale functies), vergelijkingen algebraïsch en ongelijkheden grafisch oplossen, limieten, afgeleiden, integralen, matrices, complexe getallen, algebraïsche structuur, telproblemen, binomiale verdeling, hypothesetoetsen en uitspraken bewijzen (bewijstechnieken).

5 Suggesties voor complementair gedeelte

Hieronder zijn een aantal mogelijke leerinhouden opgesomd die kunnen worden aangeboden indien de school ervoor kiest om het aantal lessen wiskunde uit te breiden via het complementair gedeelte.

- Uitbreiding meetkunde:
 - Krommen in vlak en oppervlakken in ruimte: cartesische vergelijkingen en parametervergelijkingen. Bv. kegelsneden, meetkundige plaatsen, bol ...
 - Poolcoördinaten en -vergelijkingen
 - Euclidische, affiene en projectieve vlakke meetkunde
- Uitbreiding analyse:
 - Uitbreiding integralen: splitsen in partieelbreuken, substitutiemethodes ...
 - Differentiaalvergelijkingen
 - Convergentieonderzoek van reeksen en reeksontwikkeling van functies (Taylor en Maclaurin)
- Uitbreiding algebra:
 - Uitbreiding matrices: eigenwaarden en eigenvectoren
 - Uitbreiding algebraïsche structuren:
 - voor vectorruimten: lineair onafhankelijk en voortbrengend deel, basis, dimensie, lineaire deelruimten
 - voor groepen: deelgroepen
 - Getaltheorie: priemgetallen, link met cryptografie
 - Lineair programmeren
 - Financiële algebra
 - Fractalen
- Uitbreiding statistiek:
 - Kleinste kwadraten methode bij lineaire regressie
 - Uitbreiding kansverdelingen: bv. t-verdeling, Poissonverdeling ...
 - Inleiding multivariate statistiek: covariantiematrix
- Uitbreiding logica: predikatenlogica
- Eigen keuzeonderwerp

6 Basisuitrusting

Basisuitrusting verwijst naar de infrastructuur en het (didactisch) materiaal die beschikbaar moeten zijn voor de realisatie van de leerplandoelen.



6.1 Infrastructuur

Een leslokaal

- dat qua grootte, akoestiek en inrichting geschikt is om communicatieve werkvormen te organiseren;
- met een bord;
- met een (draagbare) computer waarop de nodige software en audiovisueel materiaal kwaliteitsvol werkt en die met internet verbonden is;
- met de mogelijkheid om (bewegend beeld) kwaliteitsvol te projecteren;
- met de mogelijkheid om geluid kwaliteitsvol weer te geven;
- met de mogelijkheid om draadloos internet te raadplegen met een aanvaardbare snelheid.

Toegang tot (mobile) devices voor leerlingen.

6.2 Materiaal en gereedschappen waarover elke leerling moet beschikken

Om de leerplandoelen te realiseren beschikt elke leerling minimaal over onderstaand materiaal. De school bespreekt in de schoolraad wie (de school of de leerling) voor dat materiaal zorgt. De school houdt daarbij uitdrukkelijk rekening met gelijke kansen voor alle leerlingen.

- Rekentoestel of elektronische variant
- Mogelijkheid om te werken met (mobile) devices om grafische voorstellingen te maken

7 Glossarium

In het glossarium vind je synoniemen voor en toelichting bij een aantal handelingswerkwoorden die je terugvindt in leerplandoelen en (specifieke) minimumdoelen van verschillende graden.

Handelingswerkwoord	Synoniem	Toelichting
Analyseren		Verbanden zoeken tussen gegeven data en een (eigen) besluit trekken
Argumenten geven voor	<i>Beargumenteren, onderbouwen, verklaren</i>	
Beargumenteren	<i>Verklaren, argumenten geven voor</i>	Motiveren, uitleggen waarom
Beoordelen	<i>Evalueren</i>	Een gemotiveerd waardeoordeel geven
Berekenen	<i>Berekeningen uitvoeren</i>	
Berekeningen uitvoeren	<i>Berekenen</i>	
Beschrijven	<i>Toelichten, uitleggen</i>	
Een onderzoek uitvoeren	<i>Onderzoeken, onderzoek voeren</i>	
Een (...)proces doorlopen		Via verschillende fasen tot een (deel)resultaat komen of een doel bereiken
Evalueren	<i>Beoordelen</i>	
Gebruiken	<i>Hanteren, inzetten, toepassen</i>	
Hanteren	<i>Gebruiken, inzetten, toepassen</i>	

Illustreren		Beschrijven (toelichten, uitleggen) aan de hand van voorbeelden
Interpreteren		Betekenis geven aan
Inzetten	<i>Gebruiken, hanteren, toepassen</i>	
Kritisch omgaan met	<i>Kritisch gebruiken</i>	
Kwantificeren	<i>Beredeneren door gebruik te maken van verbanden, formules, vergelijkingen ...</i>	
Onderscheiden		Het onderscheid aangeven tussen
Onderzoeken	<i>Onderzoek voeren, een onderzoek uitvoeren</i>	Verbanden zoeken tussen zelf verzamelde data en een (eigen) besluit trekken
Onderzoek voeren	<i>Onderzoeken, een onderzoek uitvoeren</i>	
Reflecteren over		Kritisch nadenken over en argumenten afwegen zoals in een dialoog, een gedachtewisseling, een paper
Toelichten	<i>Beschrijven, uitleggen</i>	
Testen	<i>Toetsen</i>	
Toepassen	<i>Gebruiken, hanteren, inzetten</i>	
Toetsen	<i>testen</i>	
Uitleggen	<i>Beschrijven, toelichten</i>	
Verklaren	<i>Argumenten geven voor, beargumenteren, onderbouwen</i>	

8 Concordantie

8.1 Concordantietabel

De concordantietabel geeft duidelijk aan welke leerplandoelen de minimumdoelen (MD) of de specifieke minimumdoelen (SMD) realiseren.

Leerplandoel	Minimumdoelen of specifieke minimumdoelen
1	MD 06.19
2	MD 06.20
3	MD 06.21
4	MD 06.18; SMD 06.08.39
5	SMD 06.08.29
6	SMD 06.08.30



7	SMD 06.08.31; SMD 06.08.32
8	SMD 06.08.33
9	MD 06.02
10	MD 06.11; SMD 06.08.09
11	SMD 06.08.08
12	MD 06.01
13	MD 06.05
14	MD 06.07
15	MD 06.06
16	SMD 06.08.07
17	SMD 06.08.13
18	MD 06.08
19	MD 06.09
20	MD 06.10
21	SMD 06.08.07
22	SMD 06.08.23
23	SMD 06.08.13
24	SMD 06.08.07
25	SMD 06.08.12; SMD 06.08.13
26	SMD 06.08.16
27	MD 06.03
28	MD 06.04
29	SMD 06.08.17
30	SMD 06.08.18
31	SMD 06.18.19
32	SMD 06.08.20

33	SMD 06.08.21
34	SMD 06.08.01
35	SMD 06.08.02
36	SMD 06.08.03
37	SMD 06.08.04
38	SMD 06.08.24
39	SMD 06.08.25
40	SMD 06.08.26
41	SMD 06.08.27
42	SMD 06.08.28
43	SMD 06.08.38
44	MD 06.12
45	SMD 06.08.14
46	SMD 06.08.15
47	SMD 06.08.34
48	MD 06.13
49	SMD 06.08.35
50	MD 06.14
51	MD 06.15
52	MD 06.16
53	MD 06.17
54	SMD 06.08.36
55	SMD 01.01.01

8.2 Minimumdoelen

Nummer	Minimumdoel
06.01	De leerlingen rekenen met reële getallen.



	<ul style="list-style-type: none"> - Machten met rationale exponent, n-de machtswortels en logaritmen met willekeurig grondtal met rekenregels en eigenschappen met symbolen
06.02	De leerlingen brengen met behulp van de grafiek, kenmerken van een functie in verband met de betekenisvolle situatie die door de functie beschreven wordt.
06.03	De leerlingen interpreteren de afgeleide als limiet van een differentiequotiënt en als richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek.
06.04	De leerlingen leggen grafisch het verband tussen een functie en haar afgeleide functie.
06.05	De leerlingen analyseren kenmerken van de functie $f(x)=a^x$: domein, bereik, stijgen/dalen, toenemende stijging/afnemende daling, horizontale asymptoot en gedrag op oneindig.
06.06	De leerlingen gebruiken modellen voor exponentiële groei. <ul style="list-style-type: none"> - Beginwaarde, groeifactor
06.07	De leerlingen gebruiken transformaties van de vorm $f(x) + k$ en $k \cdot f(x)$ om de grafiek van een algemene exponentiële functie $f(x)=b \cdot a^x + c$ op te bouwen vanuit de grafiek van $f(x)=a^x$.
06.08	De leerlingen tekenen de grafiek van de functie $f(x)=\sin x$ vanuit de goniometrische cirkel.
06.09	De leerlingen gebruiken transformaties van de vorm $f(x)+k$, $f(x-k)$, $f(x/k)$ en $k \cdot f(x)$ om de grafiek van een algemene sinusfunctie $f(x)=a \cdot \sin[b(x-c)]+d$ op te bouwen vanuit de grafiek van $f(x)=\sin x$.
06.10	De leerlingen analyseren kenmerken van een algemene sinusfunctie aan de hand van de grafiek: domein, bereik, nulwaarden, tekenverloop, stijgen/dalen, extrema, symmetrie, periodiciteit en amplitude.
06.11	De leerlingen lossen vergelijkingen grafisch op met behulp van ICT.
06.12	De leerlingen gebruiken rekenkundige en meetkundige rijen om patronen te beschrijven. <ul style="list-style-type: none"> - Recursief voorschrift, formule voor de algemene term - Formule voor de som van de eerste n termen
06.13	De leerlingen bepalen kansen met behulp van kruistabellen, boomdiagrammen en de wet van Laplace. <ul style="list-style-type: none"> - Verband tussen relatieve frequentie en kans
06.14	De leerlingen verklaren het belang van randomisatie en representativiteit bij steekproeven voor het formuleren van statistische besluiten over een populatie. <ul style="list-style-type: none"> - Variabiliteit van steekproeven - Aselecte steekproef
06.15	De leerlingen leggen in concrete situaties het verschil uit tussen samenhang en causaliteit.
06.16	De leerlingen gebruiken de normale verdeling als continu model bij gegeven data. <ul style="list-style-type: none"> - Grafische beoordeling van de toepasbaarheid van het model - Rekenkundig gemiddelde en de standaardafwijking van de gegeven data als schatting voor de parameters van het model - Grafische betekenis van gemiddelde en standaardafwijking van een normaal verdeelde kansvariabele in termen van de Gausskromme

06.17	De leerlingen berekenen kansen bij een normaal verdeelde kansvariabele.
06.18	De leerlingen beargumenteren wiskundige redeneringen. (Rekening houdend met concepten van de derde graad.)
06.19	De leerlingen beschrijven fenomenen uit de realiteit aan de hand van wiskundige concepten uit de derde graad.
06.20	De leerlingen lossen vraagstukken en problemen op door te mathematiseren en demathematiseren en door gebruik te maken van heuristieken. (Rekening houdend met concepten van de derde graad.)
06.21	De leerlingen gebruiken ICT om berekeningen uit te voeren en grafische voorstellingen te maken. (Rekening houdend met concepten van de derde graad.)

8.3 Specifieke minimumdoelen

[wordt aangevuld]

Nummer	Specifiek minimumdoel
01.01.01	
06.08.01	
06.08.02	
06.08.03	
06.08.04	
06.08.07	
06.08.08	
06.08.09	
06.08.12	
06.08.13	
06.08.14	
06.08.15	
06.08.16	
06.08.17	
06.08.18	



06.08.19	
06.08.20	
06.08.21	
06.08.23	
06.08.24	
06.08.25	
06.08.26	
06.08.27	
06.08.28	
06.08.29	
06.08.30	
06.08.31	
06.08.32	
06.08.33	
06.08.34	
06.08.35	
06.08.36	
06.08.38	
06.08.39	

Inhoud

1	Inleiding	3
1.1	Het leerplanconcept: vijf uitgangspunten.....	3
1.2	De vormingscirkel – de opdracht van secundair onderwijs	3
1.3	Ruimte voor leraren(teams) en scholen.....	4
1.4	Differentiatie	4
1.5	Opbouw van leerplannen	6
2	Situering	7
2.1	Samenhang in de derde graad.....	7
2.1.1	Samenhang met andere leerplannen Wiskunde binnen de finaliteit.....	7
2.2	Plaats in de lessentabel.....	7
3	Pedagogisch-didactische duiding	7
3.1	Wiskunde en het vormingsconcept	7
3.2	Krachtlijnen.....	7
3.3	Opbouw	8
3.4	Leerlijnen.....	9
3.4.1	Samenhang in de derde graad.....	9
3.5	Aandachtspunten.....	9
4	Leerplandoelen	10
4.1	Problemen oplossen en wiskundig redeneren	10
4.2	Meetkunde: analytische ruimtemeetkunde.....	12
4.3	Analyse	14
4.3.1	Grafisch onderzoek	14
4.3.2	Exponentiële en logaritmische functies	15
4.3.3	Goniometrische functies	17
4.3.4	Veelterm-, rationale en irrationale functies.....	20
4.3.5	Afgeleiden	21
4.3.6	Integralen	22
4.4	Algebra	23
4.4.1	Matrices.....	23
4.4.2	Complexe getallen	25
4.4.3	Algebraïsche structuur	26
4.5	Discrete wiskunde.....	27
4.5.1	Rijen	27

4.5.2	Telproblemen	28
4.6	Data en onzekerheid	28
4.6.1	Kansrekenen	28
4.6.2	Statistiek.....	29
4.7	Onderzoekscompetentie	32
5	Suggesties voor complementair gedeelte.....	33
6	Basisuitrusting	33
6.1	Infrastructuur	34
6.2	Materiaal en gereedschappen waarover elke leerling moet beschikken	34
7	Glossarium.....	34
8	Concordantie	35
8.1	Concordantietabel	35
8.2	Minimumdoelen	37
8.3	Specifieke minimumdoelen.....	39

ONTWERP