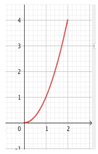
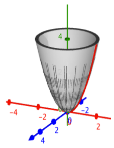
Superficies con GeoGebra 3D.

1. Superficies de revolución.

GeoGebra permite construir superficies de revolución de diferentes formas, veamos alguna:

- ### Superficie(función, ángulo, Eje)

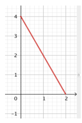
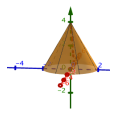
Función(x^2,0,2) construye la parábola $f(x)=x^2$ en el intervalo (0,2)
También puede escribirse : **Si(0<x<2,x^2)**

Superficie(f,360º,EjeY) crea el paraboloide de revolución.

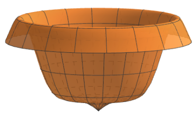
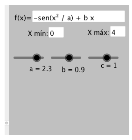
Si se desea ver en la posición habitual basta poner el **Eje Y vertical**. Botón derecho en graficas 3d, vista grafica, Eje Y vertical.

Si se desea construir un cono recto de base 2 y altura 4,
Basta utilizar **Función(-2x+4,0,2)**
De forma análoga, tronco de cono.

Resulta muy sencillo una construcción que genere superficies de revolución de funciones: Casilla de entrada para definir funciones, parámetros e intervalo.

Esta construcción se ha realizado definiendo la superficie de revolución de la forma más habitual:

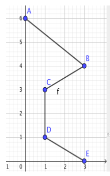
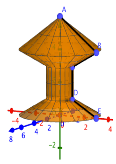



Superficie(u cos(v), u sen(v), f(u), u, x_m, x_M, v, 0, α)

- ### Superficie(poligonal, ángulo, Eje)

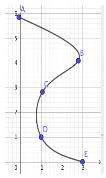
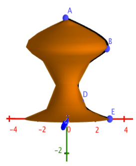
Crea varios puntos A,B,C,D,E en la vista 2D
Poligonal(A,B,C,D,E) sea f su nombre

Superficie(f,360º,EjeY)

- ### Utilizando el **comando Spline**

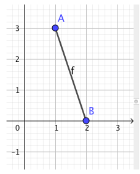
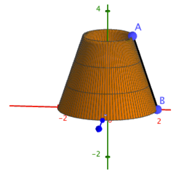
Partiendo de la construcción anterior sobre la poligonal
Spline({A,B,C,D,E},3)
En general **Spline(<Lista de puntos>, <Grado ≥ 3>)**
El comando Spline redondea o alisa la poligonal.
Superficie(g,360º,EjeY) siendo g la función definida mediante el Spline.

Mediante esta técnica (Spline) es fácil reproducir objetos con forma de superficies de revolución .

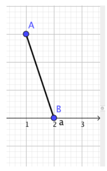
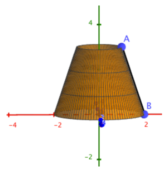
No es posible, de momento, **Superficie(segmento, ángulo, eje)** con segmento definido mediante Segmento(A,B) o la herramienta equivalente. Dos formas de hacerlo:

Poligonal(A,B) para definir el segmento(A,B) GeoGebra admite construir superficies desde el segmento.
Cono y tronco de cono son ahora más sencillos de construir.

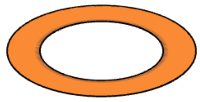



Curva(k A+ (1-K)B,k,0,1)
Esto es definir el segmento en forma paramétrica.

Esta forma de definir el segmento, da mucho juego

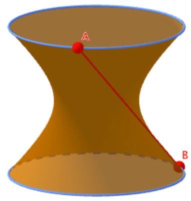



A modo de curiosidad , con esta técnica, segmento como poligonal, se construye y colorea con facilidad una corona circular, difícil de colorear de otra forma en GeoGebra.



Si se define el segmento en 3D, por este procedimiento se construye el hiperboloide de una hoja.

Basta definir un segmento entre dos circunferencias como poligonal o parametrizado.

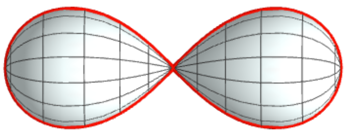


Los ejemplos anteriores, generados por giro de un segmento, son también superficies regladas. Más adelante se muestran otros procedimientos para construir superficies regladas.

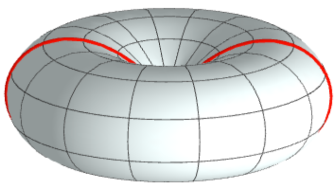
- ## Superficie(curva, ángulo, Eje)

Lemniscata de Bernoulli: **Curva(r sen(t) / (1 + cos(t)²), r sen(t) cos(t) / (1 + cos(t)²), t, 0, 2π)**

Lemniscata



Superficie revolución Eje X



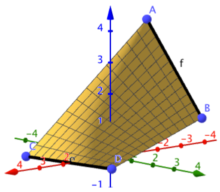
Superficie revolución Eje Y

En los siguientes apartados de esta sección pueden verse algunas de estas construcciones.

2 Superficies regladas.

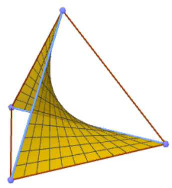
• Superficie reglada entre dos segmentos

Definimos dos segmentos en el espacio en forma paramétrica o como poligonal, sean f y g.

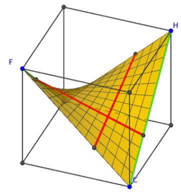


Superficie(k f(t)+(1-k) g(t), k,0,1,t,0,1)

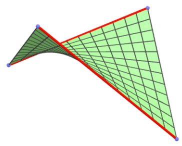
Se obtiene la superficie reglada entre los segmentos.



La superficie reglada construida sobre diagonales de caras opuestas de un cubo o un tetraedro es un paraboloide hiperbólico.

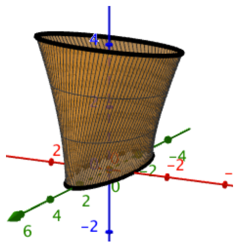


Si se construyen A,B,C,D de forma que puedan animarse se consiguen superficies muy vistosas.
Extremos de los segmentos sobre aristas de un cubo.



• Superficie reglada entre dos curvas paramétricas:

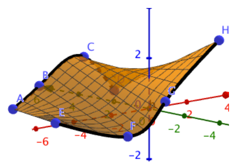
Sean dos elipses c y d definidas en forma paramétrica
c = Curva (a cos(t), b sen(t),-h,t,0, 2 pi)
d= Curva (b cos(t), a sen(t), h, t,0, 2 pi)
La superficie que se representa se construye mediante la expresión:
Superficie(k c(t)+ (1-k) d(t), k,0,1,t,0,1)
Si uno de los semiejes **a** o **b** es 0, se obtiene el "tetrabrik"



No es posible actualmente construir superficies con elipses o circunferencias no definidas en forma paramétrica.

• Superficie reglada entre dos curvas definidas mediante splines

De igual forma puede construirse superficie entre dos curvas definidas mediante poligonales o splines.

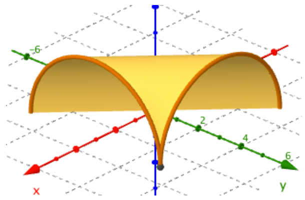


Spline({A,B,C,D},3) . Análogo para E,F,G,H
Superficie(k a(t) +(1-k) b(t), k,0,1,t,0,1) con a y b los splines.

• Superficies regladas entre arcos de circunferencia

No es posible construir superficies regladas utilizando arcos definidos en forma geométrica. Es necesario expresarlos en forma paramétrica.

En la imagen de la derecha se muestran dos arcos de 180º perpendiculares, sus expresiones son:



b=Curva(a, a cos(t), a sen(t), t, 0, pi)
y **b’=Curva(a cos(t), t, a sen(t), t, 0, pi)**
La superficie reglada como en casos anteriores viene dada por :

Superficie(k b(t)+(1-k) b’(t), k,0,1,t,0,pi)

Como puede observarse, la definición de arcos en el espacio en forma paramétrica no es inmediata, y por otra parte para construir la superficie entre ellos, los arcos han de tener igual ángulo, cosa que no siempre ocurre.

En muchas situaciones es más cómodo definir los arcos geométricamente, y utilizar splines.

• Cúpulas y bóvedas

La curva se ha construido como Spline({A,B,C,D},3)

Mediante rotación y secuencias se completa la construcción.

La superficie entre las curvas es reglada.

Bóveda de crucería

Superficies regladas definidas entre arcos de circunferencia y segmentos, la técnica general es la misma.

La utilización del comando Spline facilita la construcción.

Bóveda de arista

Mediante esta técnica u otras similares se abre la puerta a la construcción con GeoGebra de algunos elementos arquitectónicos en el espacio.

También es posible definir superficies regladas entre un punto y una curva o entre segmento y curva. Veamos un ejemplo de cada caso.

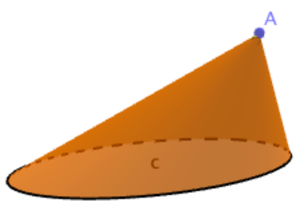
Superficie entre un punto y una curva.

Dados un punto A y una curva c(t), la superficie reglada entre ambos es

Superficie(A k+ c(t)(1-k),k,0,1, t, 0, 2 pi)

Un ejemplo, Cono elíptico inclinado.

Construimos elipse sobre plano z=0, de la forma



curva(a cos(t), b sen(t), 0, t, 0, 2pi) y situamos el punto A en la posición deseada en el espacio.

Superficie(A k+ c(t)(1-k), k,0,1, t, 0, 2 pi) es el cono con base la elipse y vértice en A.

Para construir la superficie entre un segmento y un arco hay que hacer un pequeño ajuste previo.

Dados los puntos A y B, el segmento AB se define como **Curva(A t+ B(1-t), t,0,1)** sea a(t) el segmento.

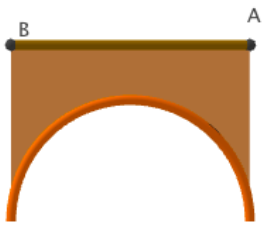
Como curva tomamos un semicírculo que en paramétricas puede escribirse como

Curva(r cos(t), 0, r sen(t), t, 0, 2 pi), escrito de esta forma no es posible hacer la superficie reglada entre segmento y semicírculo debido a que el segmento varia en [0,1] y el semicírculo en [0, pi]

Una forma de solucionar este inconveniente es **"normalizando a [0,1] "** las dos curvas, esto es escribiendo el semicírculo en la forma:

Curva(r cos(t π), 0, r sen(t π), t, 0, 1) de esta forma ambos tienen limites 0 y 1

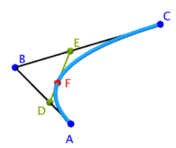
La superficie reglada entre ellos es **Superficie(a(t) k + c(t) (1 - k), k, 0, 1, t, 0, 1)**



No hay inconveniente en que el segmento esté en distinto plano al arco ni en que su longitud sea diferente a la que se muestra.

3 Curvas y superficies de Bézier.

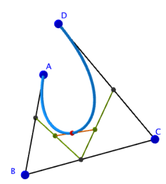
- ### Curvas de Bézier



De forma geométrica se construyen de forma idéntica a como se hace en el plano.

La expresión algebraica de la curva Bézier de grado 2 es:

b(t) = Curva(A t^2+2B t(1-t) +C $(1-t)^2$,t,0,1)



La expresión de curva de Bézier cúbica es:

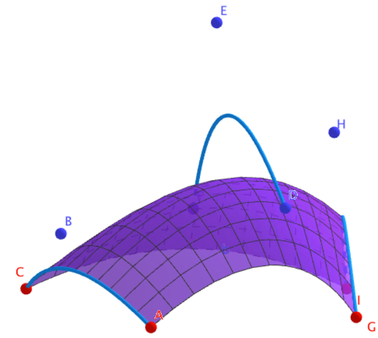
b(t) = Curva(A t^3+ 3 B t^2 (1-t) + 3 C t $(1-t)^2$ + D $(1-t)^3$,t,0,1)

La generalización a grado superior es evidente.

- ### Superficies de Bézier

Se muestra una construcción alternativa a la que aparece en los libros más sencilla de realizar con GeoGebra.

Sea **a=Curva(A t^2+ 2B t (1-t) +C $(1-t)^2$,t,0,1)**



De forma análoga

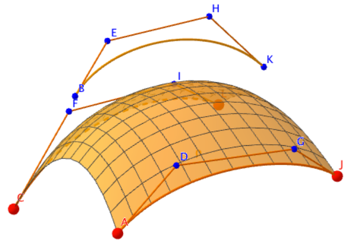
b = Curva(D t^2+ 2E t (1-t) +F $(1-t)^2$,t,0,1) ;

c = Curva(G t^2+ 2H t (1-t) +I $(1-t)^2$,t,0,1)

Superficie(a(t) k^2+ 2 b(t) k (1-k) +c(t) $(1-k)^2$,k,0,1,t,0,1)

es la superficie de Bézier con puntos de anclaje A,C,G,I y puntos de control B,D,E,F,H

Superficie de Bézier con 12 puntos.



Se obtiene la misma superficie mediante 3 curvas de 4 puntos cada una que mediante 4 curvas de 3 puntos cada una de ellas.
La superficie tiene 4 puntos de anclaje y 8 puntos de control.

La generalización a superficies de grado mayor mediante este procedimiento es inmediata.

- ## Superficies Splines. Interpolación bicúbica Spline

A diferencia de las superficies de Bézier, éstas pasan por todos los puntos de control.

Son muy utilizadas para interpolar superficies entre puntos dados.

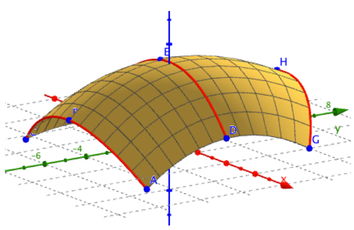
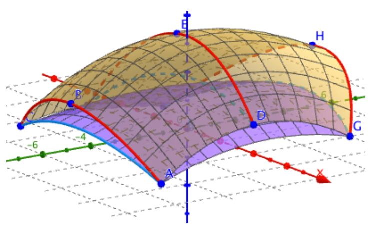
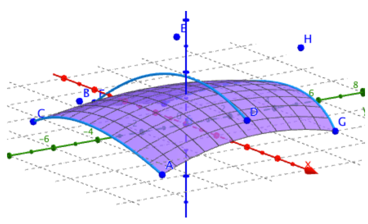
Dados tres puntos A, B, C, la curva que pasa por ellos es:

a(t)=Curva(A t^2 + 2t (1 - t) (2B - A / 2 - C / 2) + C $(1 - t)^2$, t, 0, 1)

Dadas tres curvas a(t), b(t), c(t), la superficie es:

s(t,k)=Superficie(a(t) k^2+2k(1 - k) (2b(t) - a(t)/2 - c(t)/2) + c(t) $(1-k)^2$, k, 0, 1, t, 0, 1)

La diferencia es cambiar polinomios de Bernstein por polinomios Spline

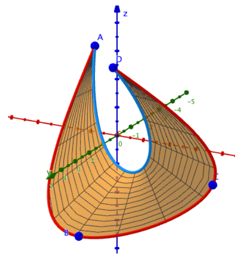




Superficie Spline Sup. Spline – Sup Bézier Superficie de Bézier

La construcción de la superficie Spline ha sido tomada de https://www.geogebra.org/m/dAVtJpCa de Zbynek Konecny, desarrollador de GeoGebra.

- **Superficie reglada entre curva Spline y curva Bézier**

Dados cuatro puntos A, B, C, D en el espacio podemos construir la curva Spline de grado 3 (roja) y la curva de Bézier (azul) cúbica entre ellos. De forma análoga alas situaciones anteriores se construye la superficie reglada entre ambas curvas.

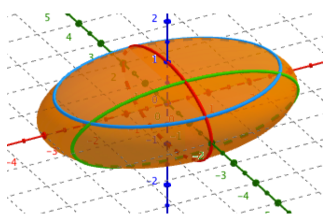


Superficie reglada entre curva de Bézier a(t) y Spline b(t) por 4 puntos es **Superficie(k a(t) +(1-k) b(t), k,0,1,t,0,1)**

4 Superficies en forma implícita y explícita

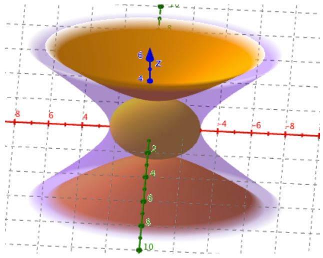
- ## Superficies en forma implícita

GeoGebra permite construir funciones definidas en forma implícita si éstas son de grado <=2, cuádricas.



La expresión x^2/a^2 +y^2/b^2+z^2/c^2 =1 construye el elipsoide de semiejes a, b, c.

La imagen de la derecha muestra elipsoide y paraboloides de una y dos hojas construidos con los mismos parámetros a,b, c.



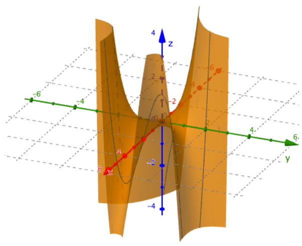
- **Superficies en forma explícita**

En forma explicita, con z despejada, se representa en principio cualquier superficie.

La imagen de la derecha muestra la función multivariable:

z= x^2y-xy^3 una variante de la superficie conocida como silla de mono.

La función que se ha representado es Si($x^2 + y^2 < 16$, $x^2 y - x y^3$) para evitar que la superficie ocupe toda la vista.

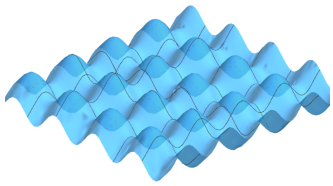


Superficie conocida como "Caja de huevos" debido a su forma.

Su ecuación es : **f(x,y)= m (sen(x / n) + sen(y / n))**

Se ha limitado a valores de x e y en el intervalo (-15,15)

Si($-15 < x < 15 \wedge -15 < y < 15$, m (sen(x / n) + sen(y / n)))



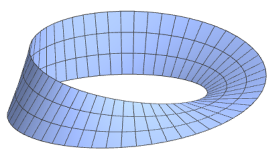
5 Superficies definidas mediante ecuaciones paramétricas.

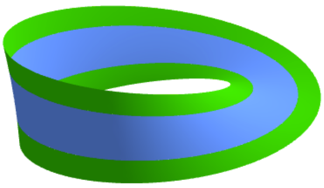
La instrucción es genérica es:

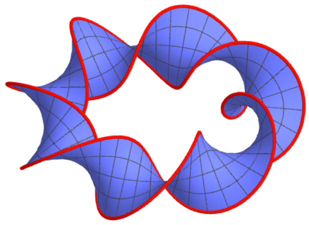
Superficie(<Expresión>,<Expresión>, <Expresión>,<Parámetro 1>,<Valor inicial 1>,<Valor final 1>, <Parámetro 2>, <Valor inicial 2>, <Valor final 2>)

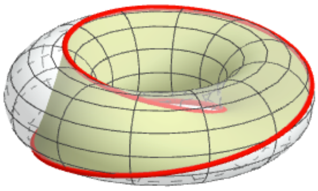
- **Banda de Moebius**

Superficie(r (1 + v / 2 cos(u / 2)) cos(u), r (1 + v / 2 cos(u / 2)) sen(u), b v / 2 sen(u /2), u, 0, 2pi, v, -c, c) define la banda de Moebius de radio r y anchura 2c.

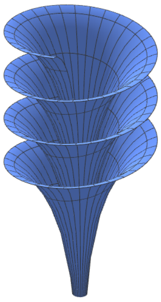




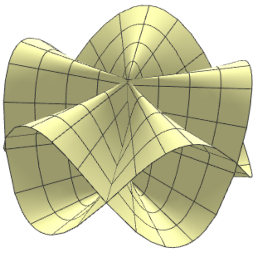




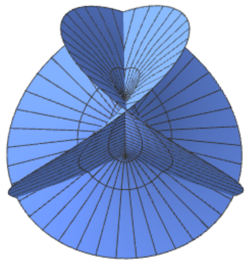
- **Ejemplos de otras superficies definidas en forma paramétrica.**



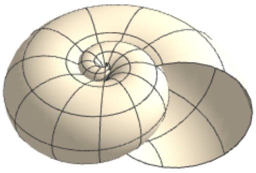
Superficie de Dini



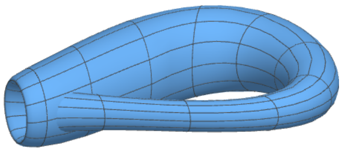
Conoide de Plüker



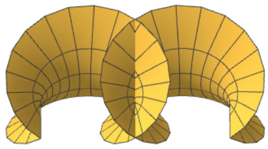
Superficie de Henneberg



Superficie Caracol



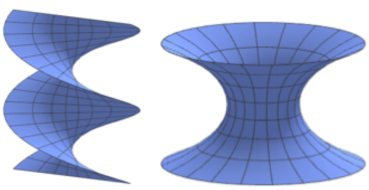
Botella **de Klein**



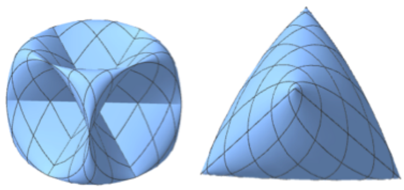
Superficie mínima de Catalan

En los recursos GeoGebra de Rafael Losada https://www.geogebra.org/u/rafael hay una excelente colección de superficies de conchas https://www.geogebra.org/m/twfwsxb9 .

- ## **Superficies homotópicas**



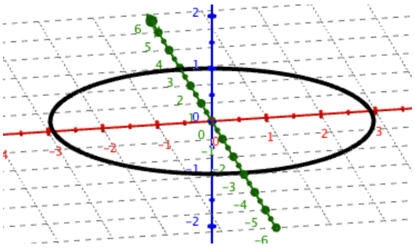
Catenoide –Helicoide



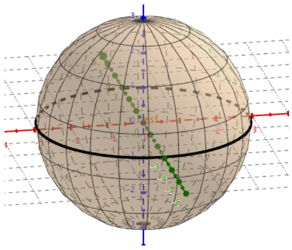
Superficies del seno y del coseno

- ## **Diseñar nuevas superficies.**

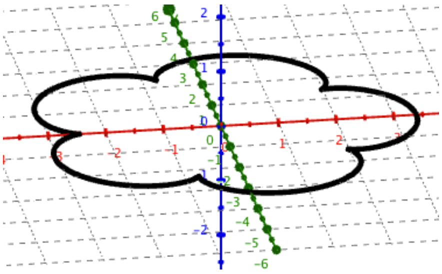
Circunferencia:
Curva(r cos(u), r sen(u), u, 0, 2 pi)



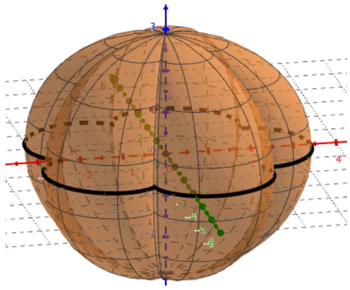
Esfera:
Superficie(r cos(u) sen(v), r sen(u) sen(v), r cos(v),u, 0, 2 pi, v, 0 , pi)



Curva :
Curva(r / n (n cos(u) + cos(n u)), r / n (n sen(u) + sen(n u)), u, 0, 2pi)



Superficie :
Superficie(r / n (n cos(u) + cos(n u)) sen(v), r / n (n sen(u) + sen(n u)) sen(v), r cos(v), u, 0, 2pi, v, 0, pi)



Estas y otras superficies pueden verse y descargarse desde https://www.geogebra.org/u/arranz en el libro Curvas y Superficies https://www.geogebra.org/m/MSNNQCmE .

En la realización de muchas de estas construcciones he contado con la inestimable ayuda de Bernat Ancochea. En su página de GeoGebra https://www.geogebra.org/u/bernat_geogebra hay excelentes construcciones sobre superficies y matemáticas en general.