CAPÍTULO I

Sistemas de Numeração

1.1 Introdução

O decimal é o mais importante dos sistemas numéricos. Ele está fundamentado em certas regras que são a base de formação para qualquer outro sistema.

Além do sistema **decimal**, que apresenta 10 algarismos distintos de 0 a 9, existe o **binário**, o **octal** e o **hexadecimal**. O sistema binário e o hexadecimal são muito importantes nas áreas de técnicas digitais e informática.

O sistema binário, por sua vez, apresenta somente 2 algarismos (0 e 1), com os quais é possível representar qualquer quantidade, até mesmo números fracionários. No sistema octal existem 8 algarismos que vão de 0 a 7. Para representar o sistema hexadecimal são utilizados 10 algarismos e as 6 primeiras letras do alfabeto e, desta forma, tem-se: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Observando a formação dos infinitos números do sistema decimal é possível aprender as regras de formação dos demais sistemas numéricos. Para conceber a formação do sistema decimal basta observar o hodômetro (marcador de quilômetro) de um automóvel. Quando a “rodinha” das unidades comuta de 9 para 0, um pino nessa rodinha força a rodinha das dezenas a avançar de 1. Assim ocorre sucessivamente formando todos os algarismos.

O mesmo se observa nos demais sistemas. No binário, por exemplo, quando a rodinha da unidade alcança 1 e posteriormente comuta para zero, a rodinha da dezena avança para 1. Pode-se notar que a quantidade de dígitos necessário para representar um número qualquer, no sistema binário, é muito maior quando comparado ao sistema decimal.

A tabela 1.1 mostra a formação dos algarismos dentro de cada sistema numérico.

Tabela 1.1 – Diferentes sistemas de numeração.

Decimal	Binário	Octal	Hexadecimal
000	00000	000	000
001	00001	001	001
002	00010	002	002
003	00011	003	003
004	00100	004	004
005	00101	005	005
006	00110	006	006
007	00111	007	007
008	01000	010	008
009	01001	011	009
010	01010	012	00A
011	01011	013	00B
012	01100	014	00C
013	01101	015	00D
014	01110	016	00E
015	01111	017	00F
016	10000	020	010
017	10001	021	011
018	10010	022	012
019	10011	023	013
020	10100	024	014

Por outro lado, o número decimal 975 pode ser representado da seguinte forma:

$$975 = 900 + 70 + 5 = 9 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

Neste exemplo, nota-se que o algarismo menos significativo (5) multiplica a unidade (1 ou 10^0), o segundo algarismo (7) multiplica a dezena (10 ou 10^1) e o mais significativo (9) multiplica a centena (100 ou 10^2). A soma dos resultados irá representar o número.

Pode-se afirmar que, de maneira geral, a regra básica de formação de um número consiste no somatório de cada algarismo correspondente multiplicado pela base (no exemplo o número 10) elevada por um índice conforme o posicionamento do algarismo no número.

Assim, um sistema de numeração genérico pode ser expresso da seguinte forma:

$$N = d_n \times B^n + \ldots + d_3 \times B^3 + d_2 \times B^2 + d_1 \times B^1 + d_0 \times B^0$$

Onde:
N é a representação do número na base B;
$\mathbf{d_n}$ é o dígito na posição n;
B é a base do sistema utilizado e
n é o peso posicional do dígito.

1.2 O Sistema de Numeração Binário

Como visto anteriormente, o sistema binário utiliza dois dígitos, ou seja, possui base 2. De acordo com a definição de um sistema de numeração genérico, o número binário 1101 pode ser representado da seguinte forma:

$1101_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
$1101_2 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13_{10}$ (conversão binária => decimal)

Nota-se que o número 1101 na base 2 é equivalente ao número 13 na base 10, ou seja, $1101_2 = 13_{10}$. Esta regra possibilita a conversão do sistema binário em decimal.

A vantagem do sistema binário reside no fato de que, possuindo apenas dois dígitos, estes são facilmente representados por uma chave aberta e uma chave fechada ou, um relé ativado e um relé desativado, ou, um transistor saturado e um transistor cortado; o que torna simples a implementação de sistemas digitais mecânicos, eletromecânicos ou eletrônicos.

Em sistemas eletrônicos, o dígito binário (0 ou 1) é chamado de **BIT**, enquanto que um conjunto de 4 bits é denominado **NIBBLE**. O **BYTE**, termo bastante utilizado principalmente na área de informática, é constituído de 8 bits.

1.2.1 <u>Conversão do Sistema Decimal para o Sistema Binário</u>

Para se converter um número decimal em binário, aplica-se o método das divisões sucessivas. Este método consiste em efetuar sucessivas divisões pela base a ser convertida até o último quociente possível. O número transformado será composto por este último quociente (algarismo mais significativo) e, todos os restos na ordem inversa às divisões.

Neste caso, será efetuado sucessivas divisões pelo algarismo 2, base do sistema binário, como mostra o exemplo a seguir para o número decimal 47.

47 |2
1º resto — 1 23 |2
2º resto —— 1 11 |2
3º resto ——— 1 5 |2
4º resto ———— 1 2 |2
5º resto ————— 0 1 — Último quociente

O último quociente será o algarismo mais significativo e ficará colocado à esquerda. Os outros algarismos seguem-se na ordem até o 1º resto:

1	0	1	1	1	1
↑	↑	↑	↑	↑	↑
Último Quociente	5º resto	4º resto	3º resto	2º resto	1º resto

Como mostra o exemplo, $47_{10} = 101111_2$.

Na prática, o bit menos significativo de um número binário recebe a notação de **LSB** ("Least Significant Bit) e o mais significativo de **MSB** ("Most Significant Bit").

1.3 O Sistema de Numeração Octal

O sistema octal de numeração é um sistema de base 8. Este sistema é pouco utilizado no campo da Eletrônica Digital, tratando-se apenas de um sistema numérico intermediário dos sistemas binário e hexadecimal.

Da mesma forma, seguindo a definição de um sistema de numeração genérico, o número octal 22 pode ser representado da seguinte forma:

$22_8 = 2 \times 8^1 + 2 \times 8^0$

$22_8 = 16 + 2 = 18_{10}$ (conversão octal => decimal)

Observa-se que o número 22 na base 8 equivale ao número 18 no sistema decimal, ou seja, $22_8 = 18_{10}$. Esta regra possibilita a conversão octal em decimal.

1.3.1 Conversão do Sistema Decimal para o Sistema Octal

Utiliza-se, neste caso, o método das divisões sucessivas, lembrando que agora é realizada a divisão por 8, pois 8 é a base do sistema octal.

Para exemplificar, será realizada a conversão do número 92_{10} para o sistema octal:

92 | 8
1º resto — 4 11 | 8
2º resto —— 3 1 — Último quociente

Assim, seguindo a mesma regra de formação, $92_{10} = 134_8$.

1.3.2 Conversão do Sistema Octal para o Sistema Binário

Existe uma regra prática extremamente simples, que consiste em transformar cada algarismo diretamente no seu correspondente em binário, respeitando-se o número de bits do sistema, sendo para o octal igual a três ($2^3 = 8$ = base do sistema octal).

Para ilustrar, será realizada a conversão do número octal 531 em binário.

5	3	1
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
101	011	001

Assim, pode-se afirmar que o número 534_8 é equivalente a 101011001_2.

1.3.3 Conversão do Sistema Binário para o Sistema Octal

Para realizar esta conversão, basta aplicar o processo inverso ao utilizado na conversão de octal para binário. Para exemplificar, tem-se: 100100110111101_2.

Primeiramente, deve-se separar o número em agrupamentos de 3 bits ($2^3 = 8$ = base do sistema octal) e assim, pode-se realizar a conversão de cada grupo de bits diretamente para o sistema octal.

100	100	110	111	101
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
4	4	6	7	5

Desta forma, o número $100100110111101_2 = 44675_8$.

1.4 O Sistema de Numeração Hexadecimal

O sistema hexadecimal, ou sistema de base 16, é largamente utilizado na área dos microprocessadores e também no mapeamento de memórias em sistemas digitais. Trata-se de um sistema numérico muito importante, aplicado em projetos de software e hardware.

Os algarismos deste sistema são enumerados da seguinte forma: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F**. Nota-se que a letra A representa o algarismo **A**, que por sua vez representa a quantidade dez. O mesmo ocorre para a letra B, que representa o algarismo **B** e a quantidade onze, sucedendo assim até o algarismo **F**, que representa a quantidade quinze.

A conversão do sistema hexadecimal para o sistema decimal pode ser realizada aplicando a definição do sistema de numeração genérico na base 16. Assim, tem-se:

$$N = d_n \times 16^n + \ldots + d_2 \times 16^2 + d_1 \times 16^1 + d_0 \times 16^0$$

Para ilustrar, observa-se o exemplo para o número hexadecimal 13.

$13_{16} = 1 \times 16^1 + 3 \times 16^0$

$13_{16} = 16 + 3 = 19_{10}$ (conversão hexadecimal => decimal)

Ou seja, 13 na base 16 é equivalente a 19 na base 10. $13_{16} = 19_{10}$.

1.4.1 Conversão do Sistema Decimal para o Sistema Hexadecimal

Novamente a conversão se faz através de divisões sucessivas pela base do sistema a ser convertido, que no caso é igual a 16. Para exemplificar, o número 1101 na base 10 será convertido para o sistema hexadecimal.

```
          1101 |_16_
1º resto —— 13    68 |_16_
2º resto ———————   4    4 — Último quociente
```

Sendo $13_{10} = D_{16}$, tem-se que $1101_{10} = 44D_{16}$.

1.4.2 Conversão do Sistema Hexadecimal para o Sistema Binário

É análoga à conversão do sistema octal para binário, somente que, neste caso, necessita-se de 4 bits para representar cada algarismo hexadecimal ($2^4 = 16$). Como exemplo, pode-se converter o número $C13_{16}$ para o sistema binário.

$C_{16} = 12_{10} = 1100_2$

$1_{16} = 1_{10} = 1_2$ - como existe a necessidade de representá-lo com 4 bits = 0001

$3_{16} = 3_{10} = 11_2 = 0011_2$

Desta forma, tem-se: $C13_{16} = 110000010011_2$.

C	1	3
↓	↓	↓
1100	0001	0011

1.4.3 Conversão do Sistema Binário para o Sistema Hexadecimal

É análoga a conversão do sistema binário para o octal, somente que neste caso são agrupados de 4 em 4 bits da direita para a esquerda. A título de exemplo, será feita a conversão do número binário 100110111110011_2 para hexadecimal.

0100	1101	1111	0011
↓	↓	↓	↓
4	D	F	3

Desta forma, pode-se afirmar que $100110111110011_2 = 4DF3_{16}$.

1.5 Números Fracionários

Discutiram-se, até o momento, as diversas formas de conversão de números **inteiros**, pertencentes a um dado sistema, em outro. Neste tópico, serão mostrados os procedimentos para converter números fracionários.

1.5.1 Conversão de Números Binários Fracionários em Decimais

O método de conversão é obtido observando-se a regra básica de formação de um número fracionário no sistema decimal. Para exemplificar, tem-se o número $10{,}5_{10}$.

$$10{,}5_{10} = 1 \text{ x } 10^{1} + 0 \text{ x } 10^{0} + 5 \text{ x } 10^{-1}$$

Desta forma, para converter o número binário fracionário 101,101 para o sistema decimal, adota-se o mesmo procedimento.

$$101{,}101_2 = 1 \text{ x } 2^{2} + 0 \text{ x } 2^{1} + 1 \text{ x } 2^{0} + 1 \text{ x } 2^{-1} + 0 \text{ x } 2^{-2} + 1 \text{ x } 2^{-3}$$

$$101{,}101_2 = 1\text{x}4 + 0\text{x}2 + 1\text{x}1 + 1\text{x}\frac{1}{2} + 0\text{x}\frac{1}{4} + 1\text{x}\frac{1}{8}$$

$$101{,}101_2 = 4 + 1 + 0{,}5 + 0{,}125 = 5{,}625_{10}$$

1.5.2 Conversão de Números Decimais Fracionários em Binários

O processo consiste em separar o número decimal na parte inteira e na fracionária. O método das divisões sucessivas é aplicado a parte inteira, conforme estudado anteriormente. Para a parte fracionária aplica-se o método das multiplicações sucessivas até que se atinja zero.

Para exemplificar, será convertido o número decimal 88,375 em binário.

$$88{,}375 = 8 + 0{,}375$$

- Parte inteira:

```
            8 |2
LSB — ⓪   4 |2
           ⓪  2 |2
              ⓪  ① — MSB
```

$$8_{10} = 1000_2$$

- Parte Fracionária:

```
Parte fracionária —— 0,375        → 0,750        → 0,500
Base do sistema  ——    x 2            x 2            x 2
                    [0],750 ——┘    [1],500 ——┘    [1],000 ——→ O processo para, pois a
                     |              |              |          parte fracionária é nula
                1º algarismo   2º algarismo   3º algarismo
```

Pode-se observar que é utilizado somente a parte fracionária dos números em todas as multiplicações. Os algarismos inteiros, resultantes das multiplicações, irão compor o número binário. Estes números são tomados na ordem da multiplicação. Assim:

$$0{,}375_{10} = 0{,}011_2$$

Para completar a conversão basta efetuar a composição da parte interia com a fracionária:

$$8{,}375_{10} = 1000{,}011_2$$

Observação Importante: existem casos em que o método das multiplicações sucessivas encontra novamente os números já multiplicados e o processo entra em um "loop" infinito. Isto equivale a uma dízima periódica. Como exemplo, tem-se:

$$0{,}8_{10} = (0{,}1100\ 1100\ 1100....)_2$$

1.6 Operações Aritméticas no Sistema Binário

Nas áreas de Eletrônica Digital e dos Microprocessadores, o estudo das operações aritméticas no sistema binário é muito importante, pois estas serão utilizadas em circuitos aritméticos, que serão estudados posteriormente.

1.6.1 Adição no Sistema Binário

A adição no sistema binário é efetuada de maneira idêntica ao sistema decimal. Desta forma, tem-se:

$$\begin{array}{r} 0 \\ +0 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ +1 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ +0 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ +1 \\ \hline 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ +1 \\ \hline 11 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ +1 \\ \hline 100 \end{array}$$

Observa-se, entretanto, a existência de uma pequena regra: 1+1=0 e transporta 1 para a próxima coluna.

Para exemplificar serão realizadas as seguintes adições:

```
 1◂                  ▸11◂
  11                  110
+10                 +111
 101  Transporte     1101  Transporte
```

Nota-se, então que a adição é realizada coluna a coluna, considerando sempre o transporte proveniente da coluna anterior.

Para verificar a soma basta converter os números para o sistema decimal.

$$11_2+10_2 = 101_2 \quad \text{equivalente a} \quad 3_{10}+2_{10} = 5_{10}$$

$$110_2+111_2 = 1101_2 \quad \text{equivalente a} \quad 6_{10}+7_{10} = 13_{10}$$

1.6.2 Subtração no Sistema Binário

O método de subtração é análogo a uma subtração no sistema decimal. Assim, tem-se:

```
  0      0      1      1
- 0    - 1    - 0    - 1
  0      1      1      0
```

Para o caso 0-1, o resultado será igual a 1, porém haverá um transporte para a coluna seguinte que deve ser acumulado no subtraendo e, obviamente, subtraído do minuendo. Para exemplificar, tem-se:

```
  111          1011
                1◂
- 100        -  101
  011          0110  Transporte
```

1.6.3 Multiplicação no Sistema Binário

Ocorre exatamente como uma multiplicação no sistema decimal. Assim sendo, tem-se:

0 x 0 = 0
0 x 1 = 0
1 x 0 = 0
1 x 1 = 1

Para exemplificar, efetua-se a multiplicação entre os números 11010_2 e 101_2.

$$
\begin{array}{r}
11010 \\
\underline{\times\ 101} \\
11010 \\
00000+ \\
\underline{11010{+}{+}} \\
10000010
\end{array}
$$

1.7 Exercícios do capítulo I

Os exercícios propostos visam treinar o estudante de Eletrônica Digital de forma bastante completa. É interessante que estes exercícios sejam feitos após uma leitura do capítulo I.

Será observado que todos os exercícios possuem respostas, uma vez que o objetivo não é uma lista de exercícios valendo nota e sim, valorizar o aprendizado. A maioria das calculadoras científicas realizam todas as operações estudadas neste capítulo. Seria interessante o aluno aprender a manipular sua calculadora.

1.7.1 Converta para o sistema decimal

a) 100110_2 =

b) 011110_2 =

c) 111011_2 =

d) 1010000_2 =

e) 11000101_2 =

f) 011001100110101_2 =

g) 14_8 =

h) 67_8 =

i) 153_8 =

j) 1544_8 =

k) 2063_8 =

l) 479_{16} =

m) $4AB_{16}$ =

n) BDE_{16} =

o) $F0CA_{16}$ =

p) $2D3F_{16}$ =

1.7.2 Converta para o sistema binário

a) 78_{10} =

b) 102_{10} =

c) 215_{10} =

d) 404_{10} =

e) 808_{10} =

f) 16383_{10} =

g) 477_8 =

h) 1523_8 =

i) 4764_8 =

j) 6740_8 =

k) 10021_8 =

l) 84_{16} =

m) $7F_{16}$ =

n) $3B8C_{16}$ =

o) $47FD_{16}$ =

p) $F1CD_{16}$ =

1.7.3 Converta para o sistema octal

a) 107_{10} =

b) 185_{10} =

c) 2048_{10} =

d) 4097_{10} =

e) 5666_{10} =

f) 1011_2 =

g) 10011100_2 =

h) 110101110_2 =

i) 1000000001_2 =

j) 1101000101_2 =

k) $1D2_{16}$ =

l) $8CF_{16}$ =

1.7.4 Converta para o sistema hexadecimal

a) 10011_2 =

b) 1110011100_2 =

c) 100110010011 =

d) 11111011110010_2 =

e) 1000000000100010_2 =

f) 486_{10} =

g) 2000_{10} =

h) 4096_{10} =

i) 5555_{10} =

j) 35479_{10} =

k) 7100_8 =

l) 5463_8 =

1.7.5 Quantos bits são necessários para representar cada um dos números decimais abaixo:

a) 512_{10} =

b) 12_{10} =

c) 2_{10} =

d) 33_{10} =

e) 17_{10} =

f) 7_{10} =

1.7.6 Porque o número 14875 não pode ser octal? Quais as bases ele poderia pertencer?

1.7.7 Qual o número binário seguinte a 01101111?

1.7.8 Quantos bits existem em 2 bytes?

1.7.9 Transforme para decimal os seguintes números binários

a) $11{,}11_2 =$

b) $1000{,}0001_2 =$

c) $1010{,}1010_2 =$

d) $1100{,}1101_2 =$

e) $10011{,}10011_2 =$

f) $11000{,}001101_2 =$

g) $100001{,}011001_2 =$

1.7.10 Transforme os seguintes números decimais em binários

a) $0{,}125_{10} =$

b) $0{,}0625_{10} =$

c) $0{,}7_{10} =$

d) $0{,}92_{10} =$

e) $7{,}9_{10} =$

f) $47{,}47_{10} =$

g) $53{,}387_{10} =$

1.7.11 Efetue as operações

a) $1000_2 + 1001_2 =$

b) $10001_2 + 11110_2 =$

c) $101_2 + 100101_2 =$

d) $1110_2 + 1001011_2 + 11101_2 =$

e) $110101_2 + 1011001_2 + 1111110_2 =$

f) $1100_2 - 1010_2 =$

g) $10101_2 - 1110_2 =$

h) $11110_2 - 1111_2 =$

i) $1011001_2 - 11011_2 =$

j) $100000_2 - 11100_2 =$

k) 10101_2 x $11_2 =$

l) 11001_2 x $101_2 =$

m) 110110_2 x $111_2 =$

n) 11110_2 x $11011_2 =$

o) 100110_2 x $1010_2 =$

Resposta dos exercícios

1.7.1 Converta para o sistema decimal

a)38_{10} b)30_{10} c)59_{10} d)80_{10} e)197_{10} f)13109_{10}
g)12_{10} h)55_{10} i)107_{10} j)868_{10} K)1075 l)1145_{10}
m)1195_{10} n)3038_{10} o)61642_{10} p)11583_{10}

1.7.2 Converta para o sistema binário

a)1001110_2 b)1100110_2 c)11010111_2 d)110010100_2
e)1100101000_2 f)11111111111111_2 g)100111111_2 h)1101010011_2
i)100111110100_2 j)110111100000_2 k)1000000010001_2 l)10000100_2
m)1111111_2 n)11101110001100_2 o)100011111111101_2
p)1111000111001101_2

1.7.3 Converta para o sistema octal

a)153_8 b)271_8 c)4000_8 d)10001_8 e)13042_8 f)13_8
g)234_8 h)656_8 i)1001_8 j)1505_8 k)722_8 l)4317_8

1.7.4 Converta para o sistema hexadecimal

a)13_{16} b)$39C_{16}$ c)993_{16} d)$3EF2_{16}$ e)8022_{16} f)$1E6_{16}$
g)$7D0_{16}$ h)1000_{16} i)$15B3_{16}$ j)$8A97_{16}$ k)$E40_{16}$ l)$B33_{16}$

1.7.9 Transforme para decimal os seguintes números binários

a) $3,75_{10}$ c) $10,625_{10}$ e) $19,59375_{10}$ g) $33,39065_{10}$

b) $8,0625_{10}$ d) $12,8125_{10}$ f) $24,203125_{10}$

1.7.10 Transforme os seguintes números decimais em binários

a) $0,001_2$ d) $0,111101011100001_2$ g) $110101,011000110011100111_2$

b) $0,0001_2$ e) $111,111001100_2$

c) $0,10110011_2$ f) $101111,0111100001_2$

1.7.11 Efetue as operações

a) 10001_2 b) 101111_2 c) 101010_2 d) 1110110_2 e) 100001100_2

f) 10_2 g) 111_2 h) 1111_2 i) 111110_2 j) 100_2

k) 111111_2 l) 1111101_2 m) 101111010_2 n) 1100101010_2 o) 101111100_2