Club GeoGebra Iberoamericano

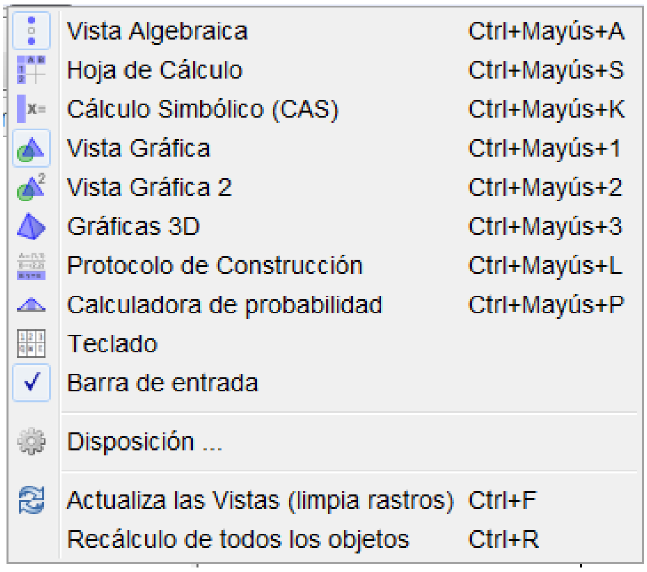
8

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

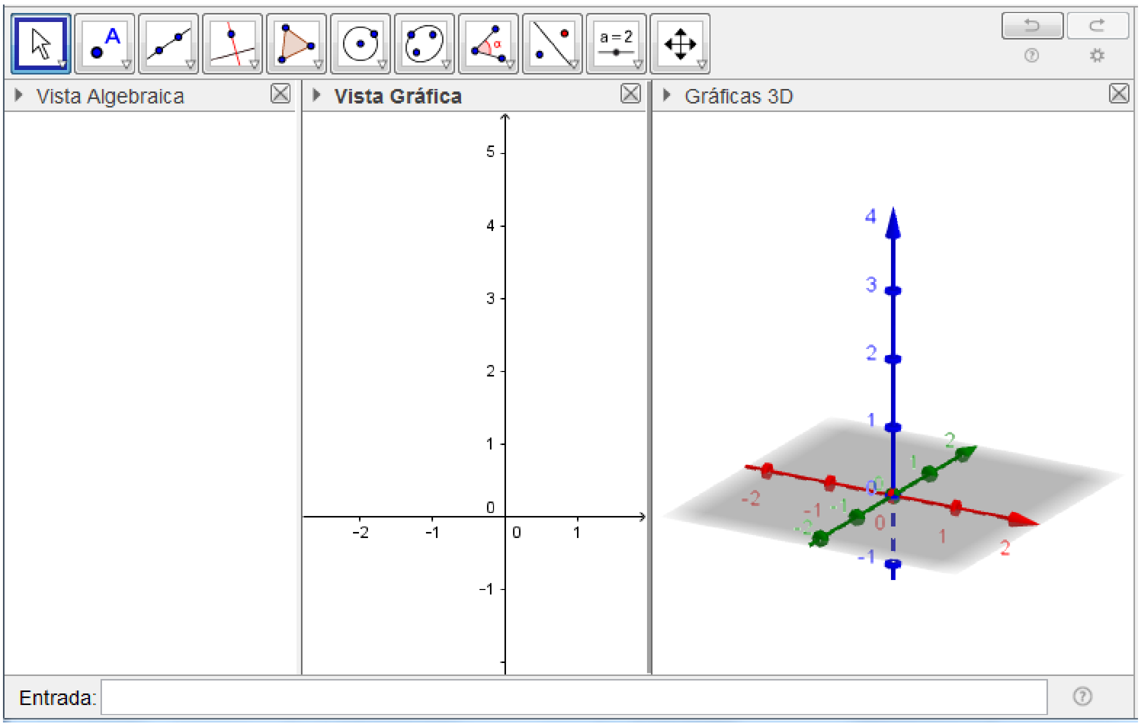
GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

PUNTOS, RECTAS Y PLANOS EN 3D

Para trabajar en 3D como es evidente, será necesario activar la vista 3D a través de la opción correspondiente en el menú **Vista**.

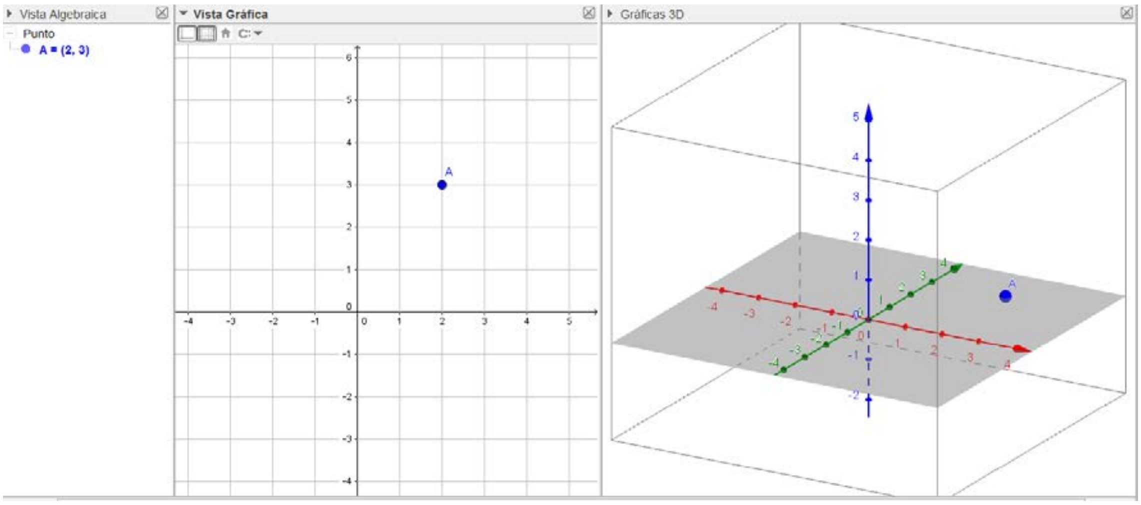


El aspecto será el que aparece en la imagen siguiente:

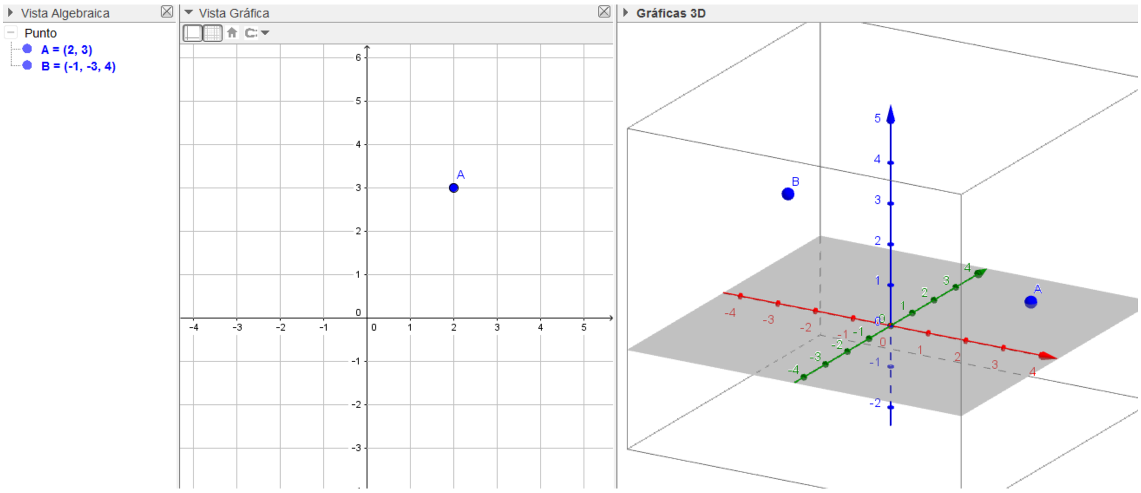


Una vez activada podemos definir puntos, rectas o planos a través de las distintas herramientas o con ayuda de los comandos que expondremos a continuación.

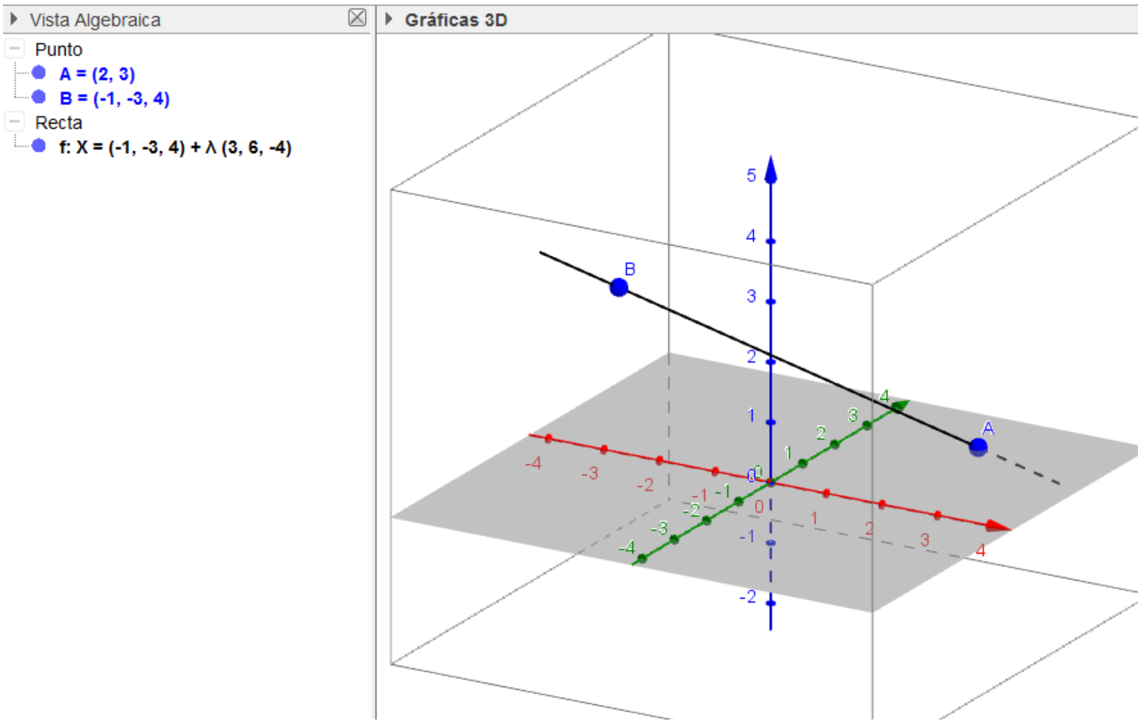
Si definimos un punto a través de la línea de entrada que tenga sólo dos coordenadas o se crea con la herramienta **Punto** en la vista gráfica, aparecerá también en la vista 3D, en el plano XY.



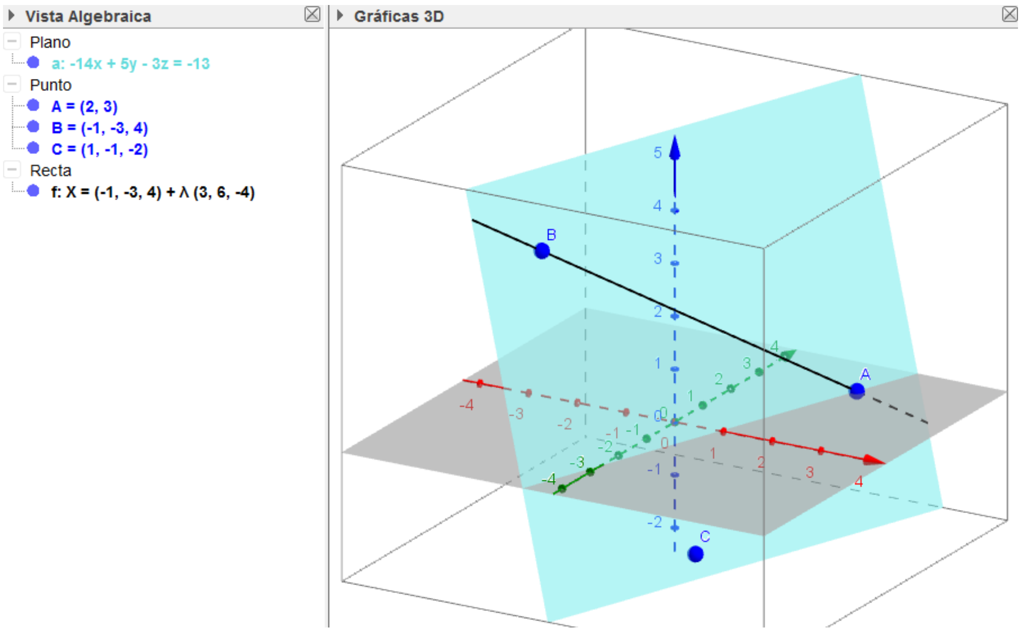
Por el contrario, si el punto se define con tres coordenadas o se crea a partir de la herramienta Punto en la vista 3D, sólo aparecerá en esta vista. En todos los casos, las coordenadas aparecerán en la vista algebraica.



De manera similar definiremos una recta, como recta que pasa por dos puntos, utilizando la herramienta **Recta** o a partir del comando del mismo nombre. Su ecuación paramétrica aparecerá en la vista gráfica al igual que ocurre con el resto de objetos.



Para definir un plano disponemos de la herramienta **Plano** o del comando **Plano[A,B,C]** que dibujará el plano que determinan los puntos A, B y C. Su ecuación general aparecerá en la vista algebraica.



Además disponemos del resto de herramientas que nos permitirán trazar planos perpendiculares o paralelos, o para obtener distintas rectas, tal y como expondremos en las actividades siguientes.

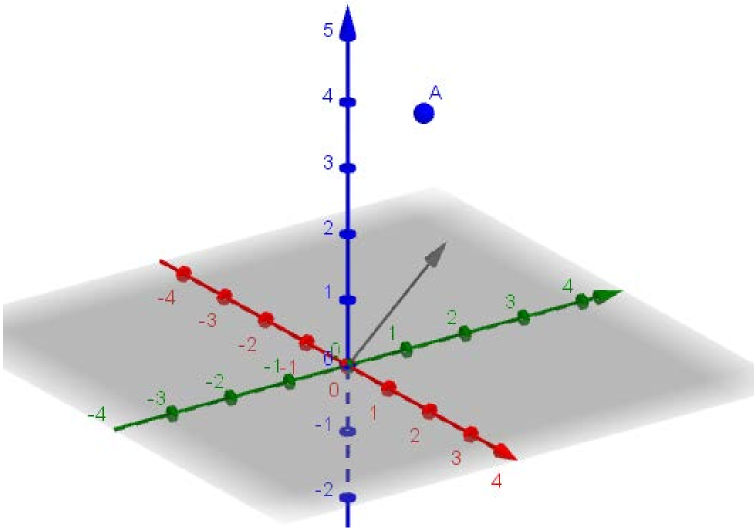
Actividad 1

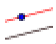
Construye la recta que pasa por el punto A(-1, 2, 3) y es paralela a la recta de ecuación

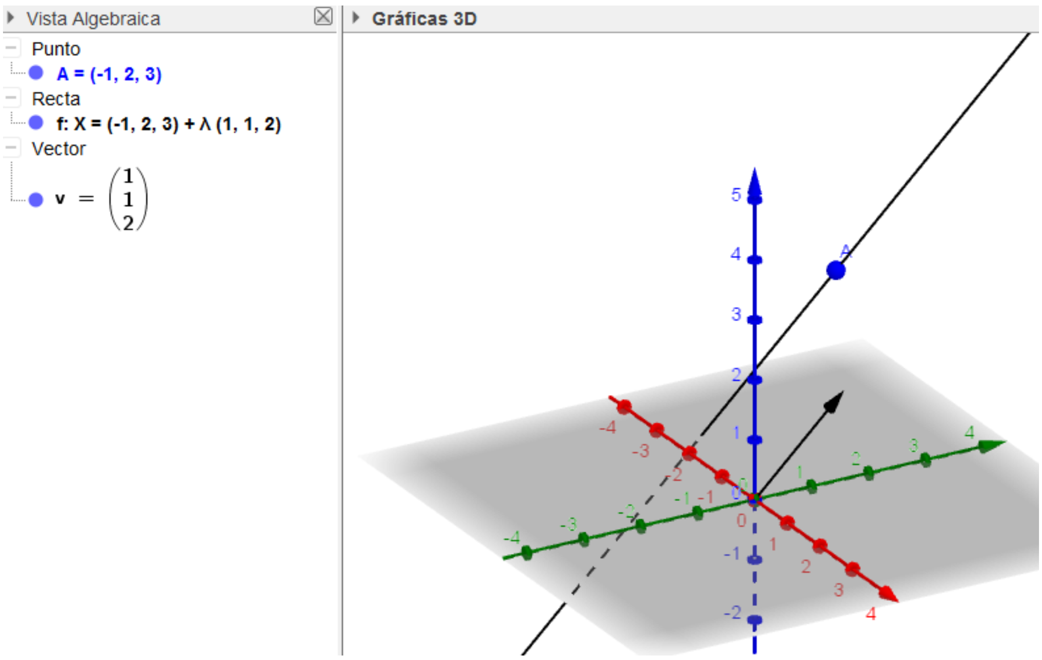
$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$$

Introducimos el punto A escribiendo sus coordenadas en la línea de entrada.

De la recta r conocemos su vector director (1, 1, 2), que representamos también a través de la línea de entrada, escribiendo v=(1, 1, 2).



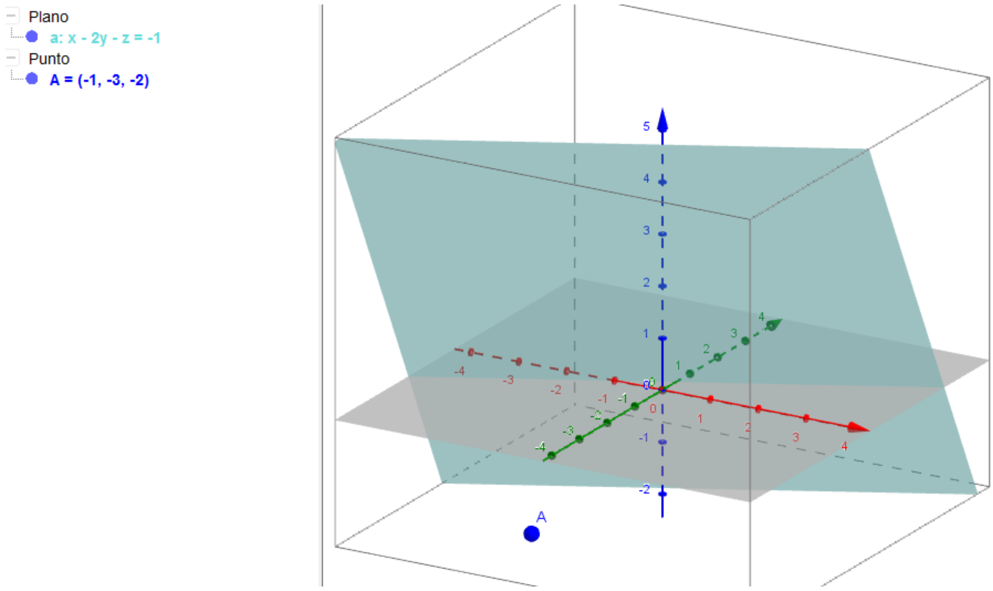
Utilizando la herramienta **Recta paralela** , obtendremos la recta que pasa por A y tiene como vector director a v.

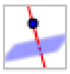


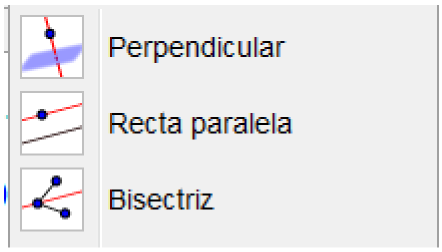
Actividad 2

Determina la recta perpendicular al plano de ecuación $x - 2y - z = -1$ que pasa por el punto A(-1, -3, -2).

Comenzamos dibujando el plano, para lo que basta con escribir su ecuación en la línea de entrada, y también introducimos el punto A.



Con ayuda de la herramienta **Perpendicular**  obtendremos la ecuación de la recta pedida, cuya expresión aparece en la vista algebraica.

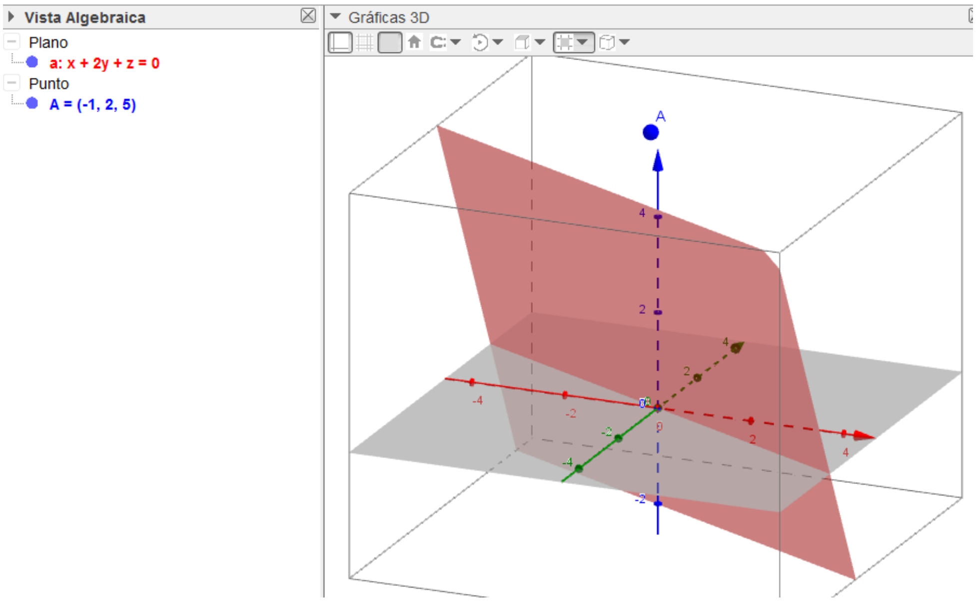


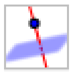
Actividad 3

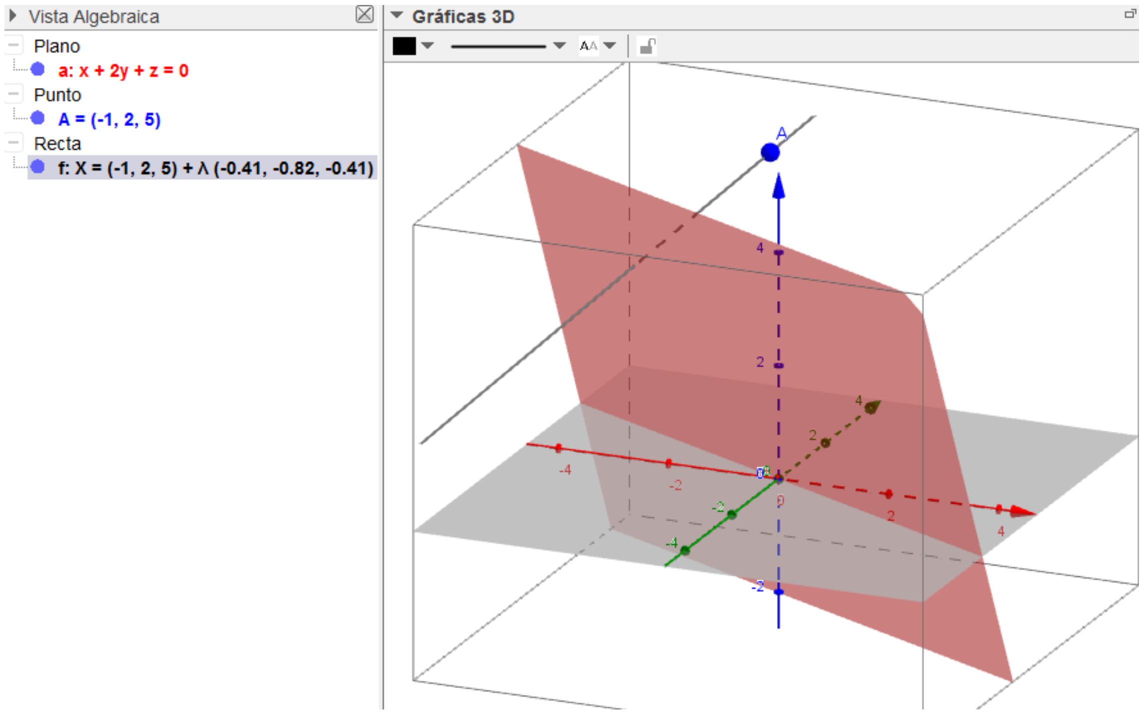
Dado el punto A(-1, 2, 5), calcula las coordenadas del punto simétrico de A con respecto al plano $\pi \ \equiv x + 2y + z = 0$.

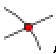
Halla la recta paralela al plano π que pasa por el punto A.

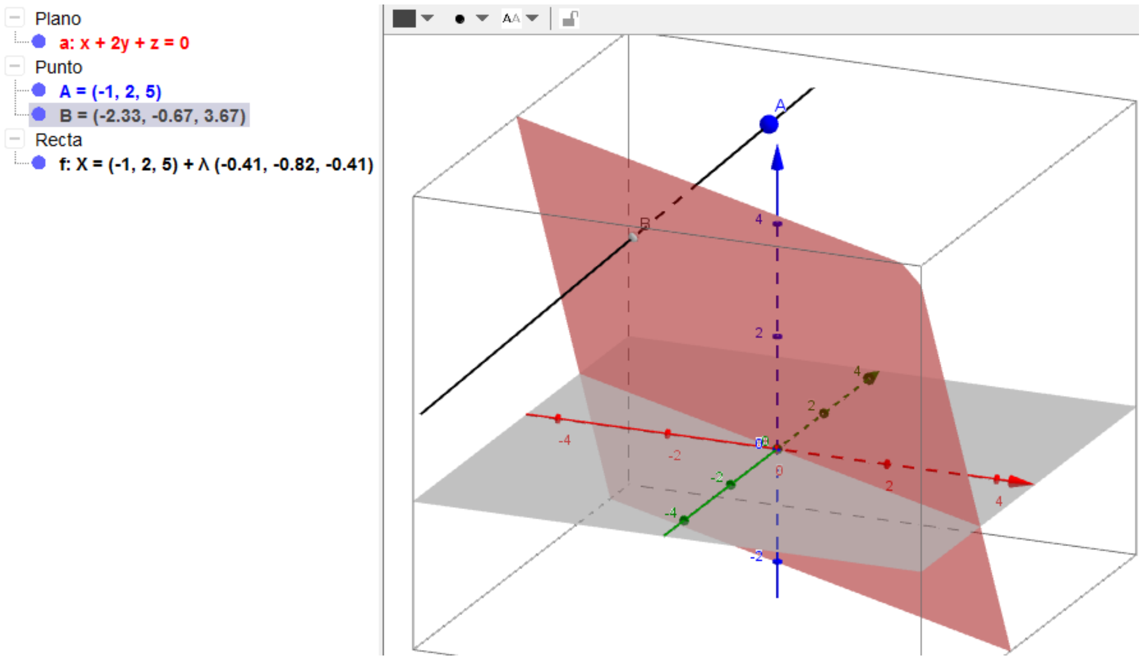
Comenzamos definiendo el punto A y el plano.



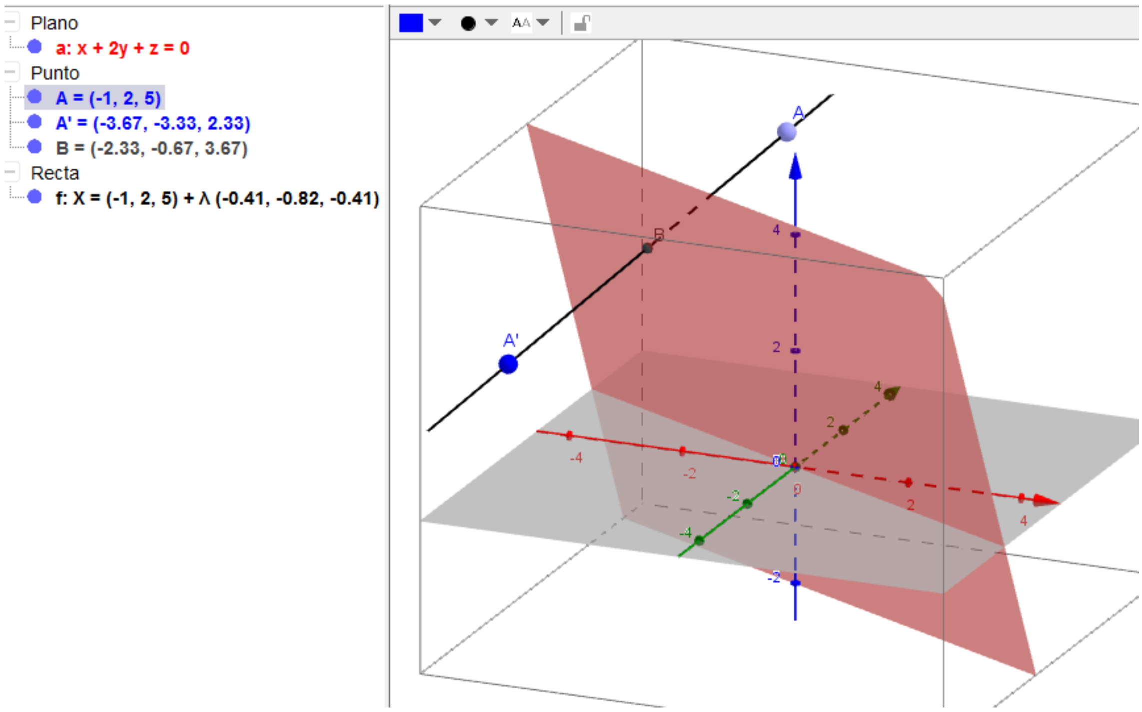
A continuación, seleccionamos la herramienta **Perpendicular**  para obtener la recta perpendicular al plano por el punto A, cuya ecuación aparecerá en la vista algebraica.

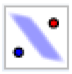


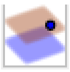
Calculamos el punto de intersección de la recta con el plano, utilizando para ello, la herramienta **Intersección** , marcando la recta y el plano. Obtendremos el punto B cuyas coordenadas aparecen en la imagen siguiente:

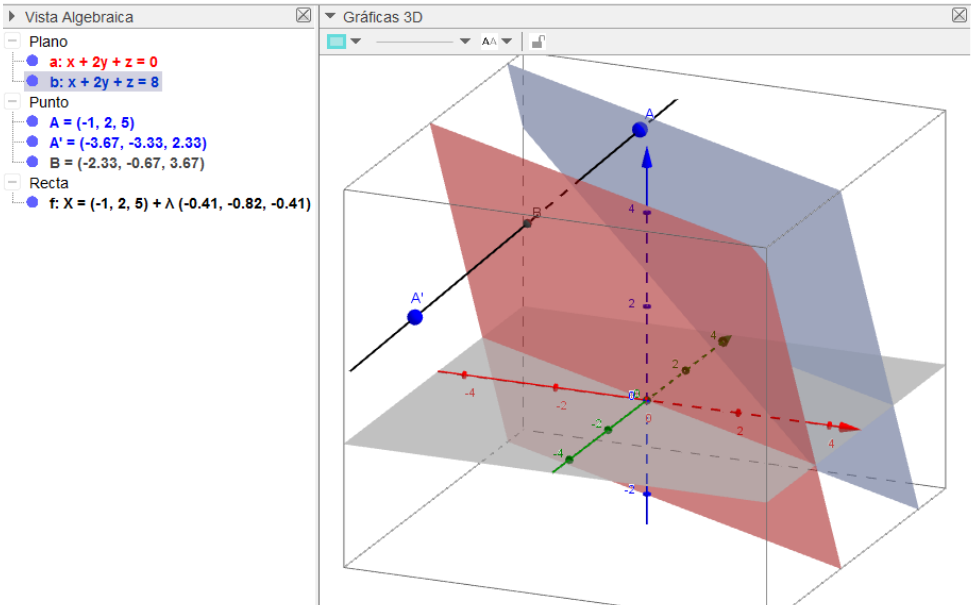


A continuación podemos obtener el simétrico de A con respecto a B utilizando la herramienta **Simetría central**  .



Este es el proceso que habitualmente se realiza, aunque GeoGebra ofrece una herramienta que permite obtener de manera directa el simétrico de un punto con respecto a un plano. Esta herramienta es **Simetría especular** .

También, para obtener el plano paralelo que pase por A, disponemos de la herramienta **Plano paralelo**  que al utilizarla, nos dará su ecuación.



Actividad 4

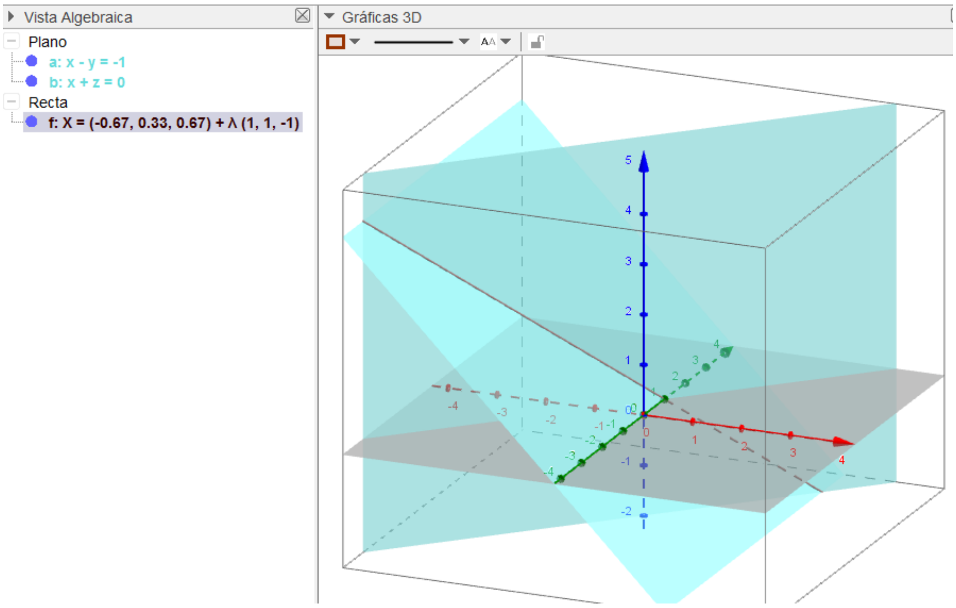
Consideramos las rectas r y s cuyas ecuaciones son:

$$r: \left.\begin{array}{r} x - y + 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{r} x - y + 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{array}\right\}$$

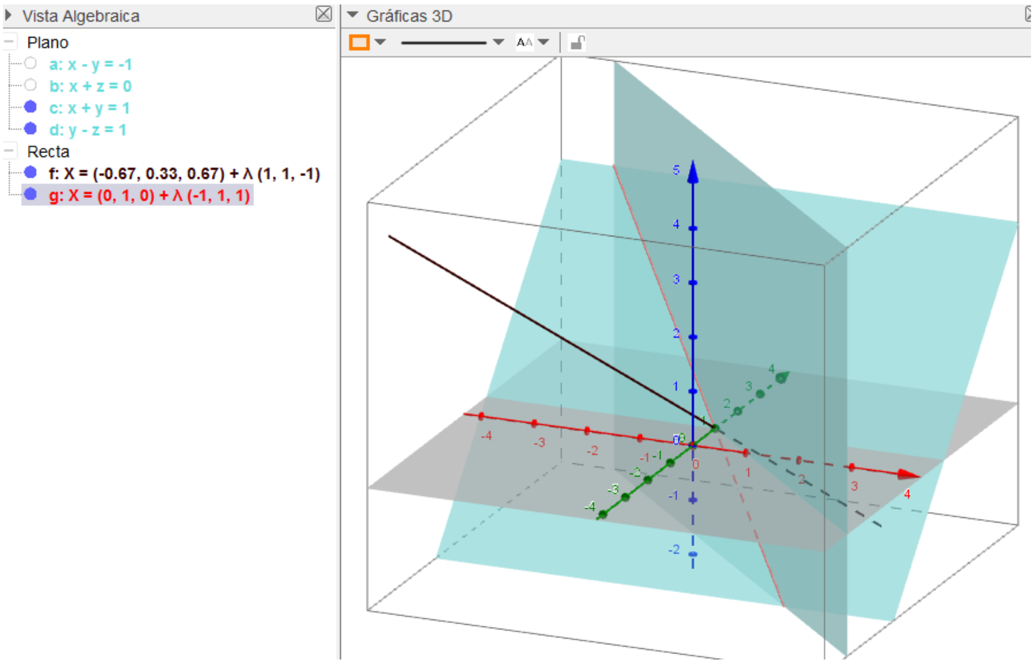
Determina el punto de corte de las dos rectas.

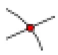
Halla la ecuación del plano que determinan.

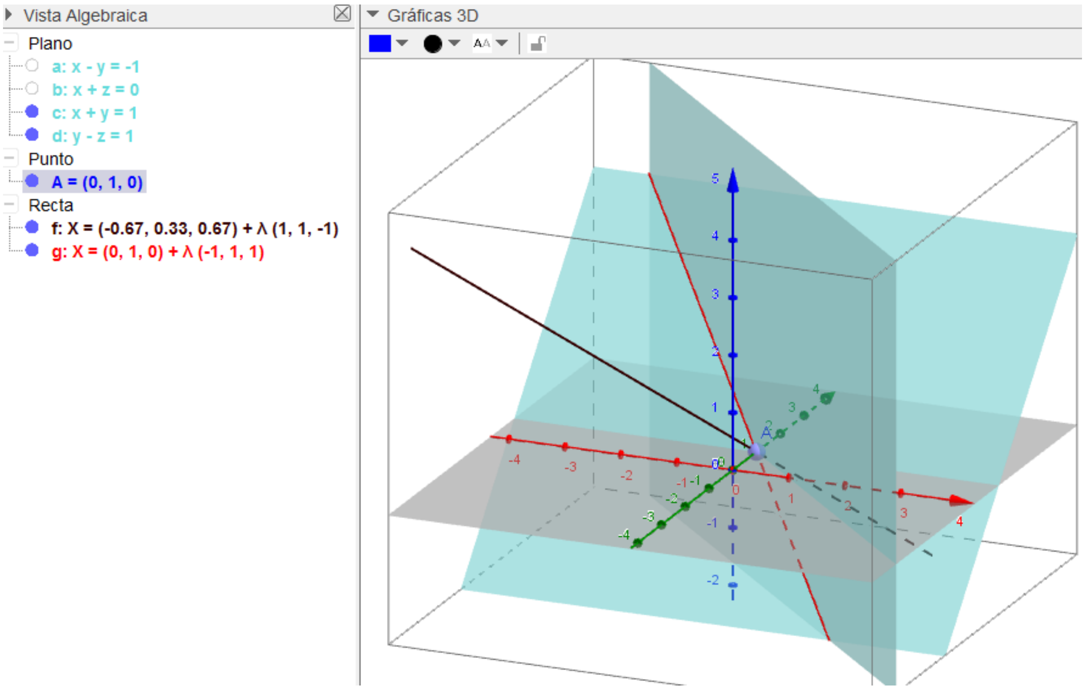
Para obtener la primera recta introducimos las ecuaciones de los dos planos que la determinan y con la herramienta **Intersección de dos superficies** , obtenemos su ecuación en forma paramétrica.

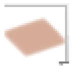


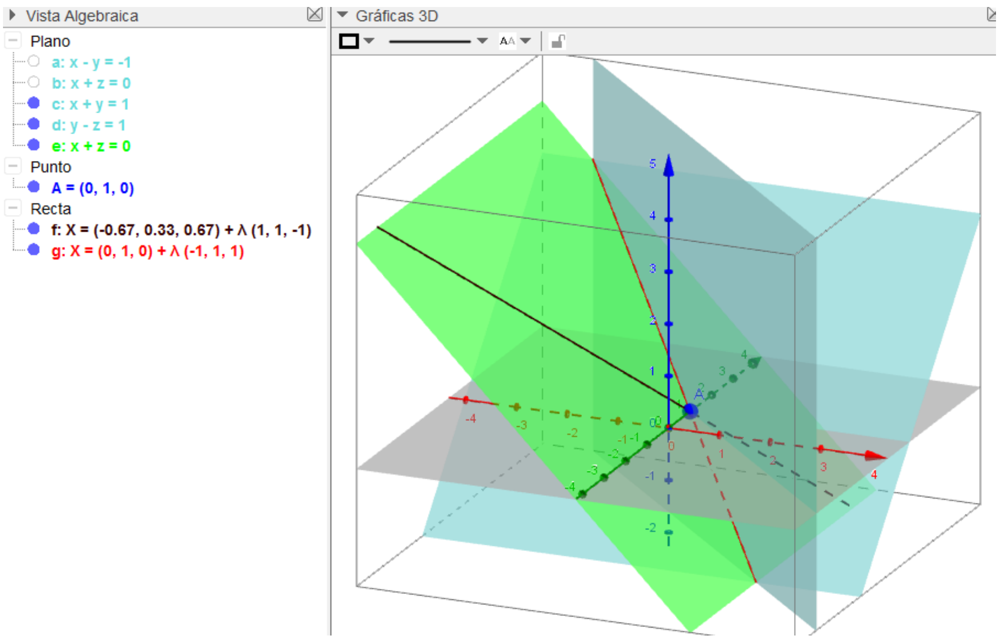
A continuación, ocultamos los dos planos y repetimos el proceso para la segunda recta.



Ya tenemos las dos rectas, por lo que bastará utilizar la herramienta **Intersección**  para obtener el punto de corte. El punto obtenido es A(0,1,0) que observaremos que aparecerá en la vista 3D y también en la vista 2D al encontrarse en el plano XY.



Para obtener el plano determinado por las dos rectas, utilizamos la herramienta **Plano**  que permite obtener un plano determinado por tres puntos, un punto y una recta o dos rectas.

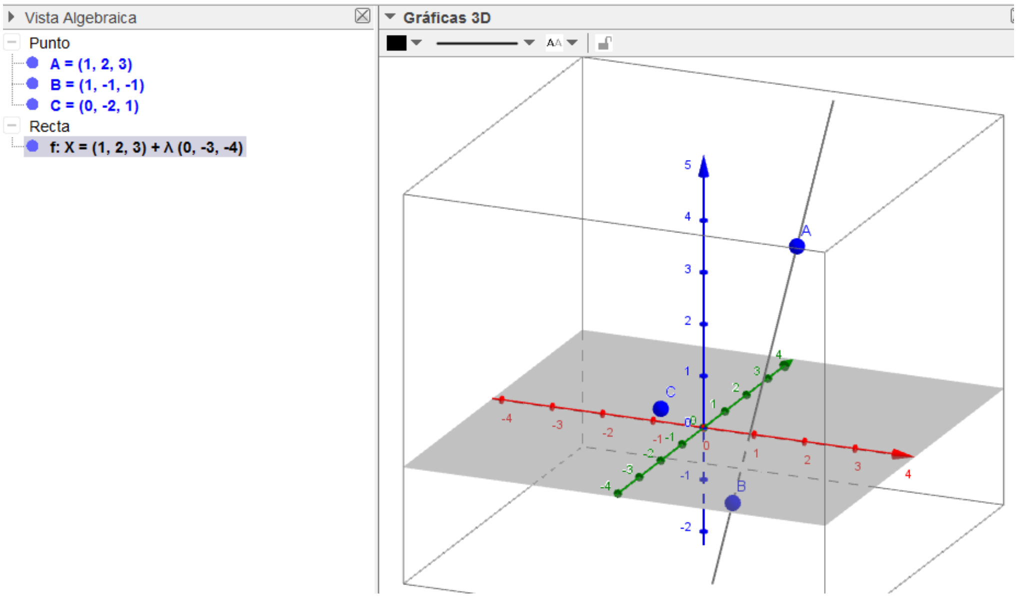


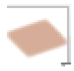
Obtenemos que el plano determinado por las dos rectas es $x + z = 0$.

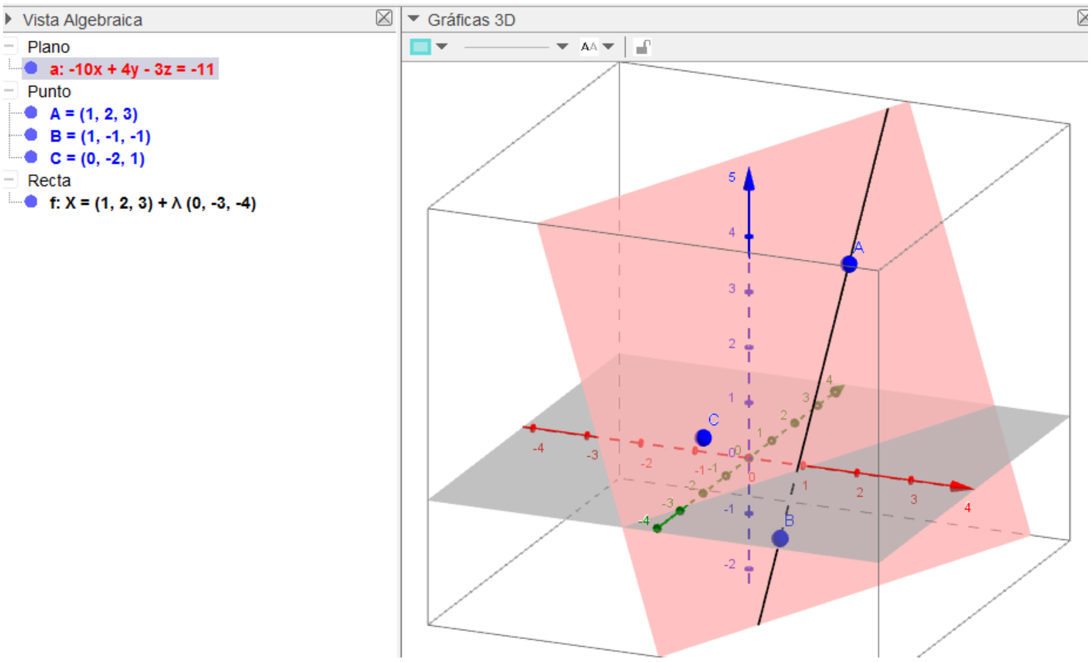
Actividad 5

Halla un punto de la recta que pasa por los puntos A(1,2,3) y B(1,-1,-1), tal que su distancia al punto C(0,-2,1) sea igual a tres unidades.

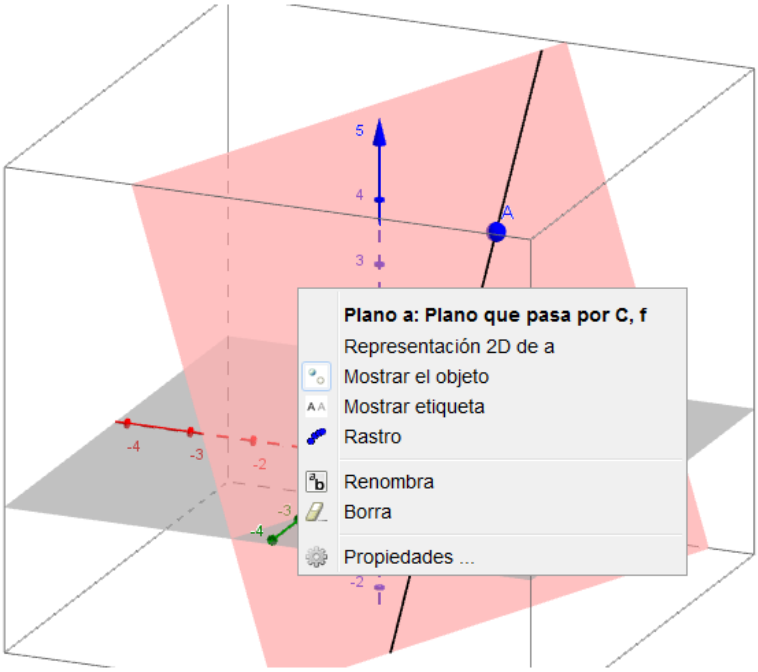
Creamos los tres puntos A, B y C, y la recta AB utilizando la herramienta **Recta**  .



A continuación, utilizando la herramienta **Plano**  obtenemos el plano determinado por la recta AB y el punto C.

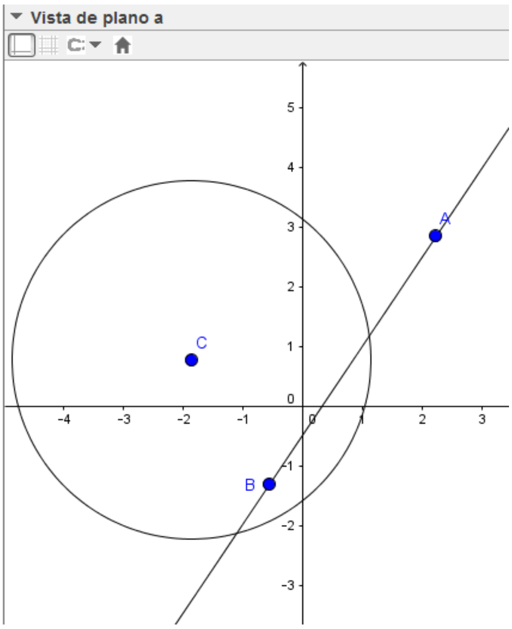


Pulsando el botón derecho sobre el plano que acabamos de obtener, aparecerá el menú siguiente:



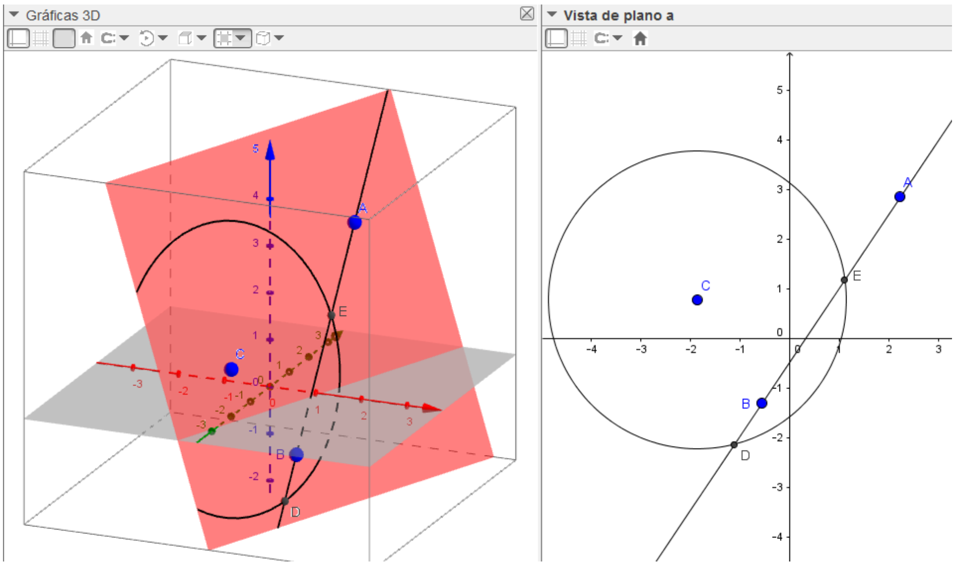
Seleccionamos la opción **Representación en 2D** de a para que aparezca una nueva vista con dicho plano. Es esta nueva vista aparecerán los elementos que hay en el plano a que son los puntos A, B y C, y la recta AB.

En este plano podemos trabajar de manera análoga a como lo hacemos en la vista 2D, por lo que podemos utilizar la herramienta **Circunferencia (centro, radio)** para obtener la circunferencia que tiene centro en C y radio igual a 3 unidades.

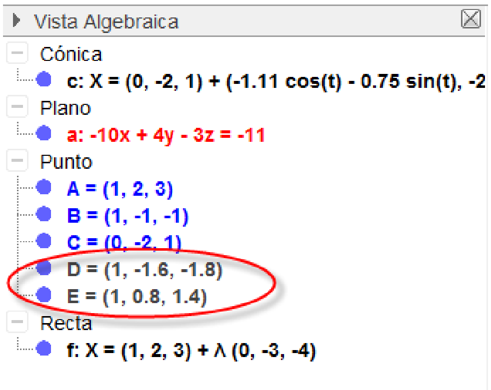


Los puntos de la recta que se encuentran a una distancia de 3 unidades del punto C serán los puntos de intersección de la circunferencia y la recta, que obtenemos con la herramienta **Intersección**.

Aparecerán los puntos E y D tanto en la vista en 2D de a como en la vista 3D.



Y sus coordenadas aparecen en la vista algebraica.



Actividad 6

Halla la distancia del punto A(-1,2,0) a la recta r: $\left.\begin{aligned} -x+y+2z&=0 \\ y+z&=1 \end{aligned}\right\}$.

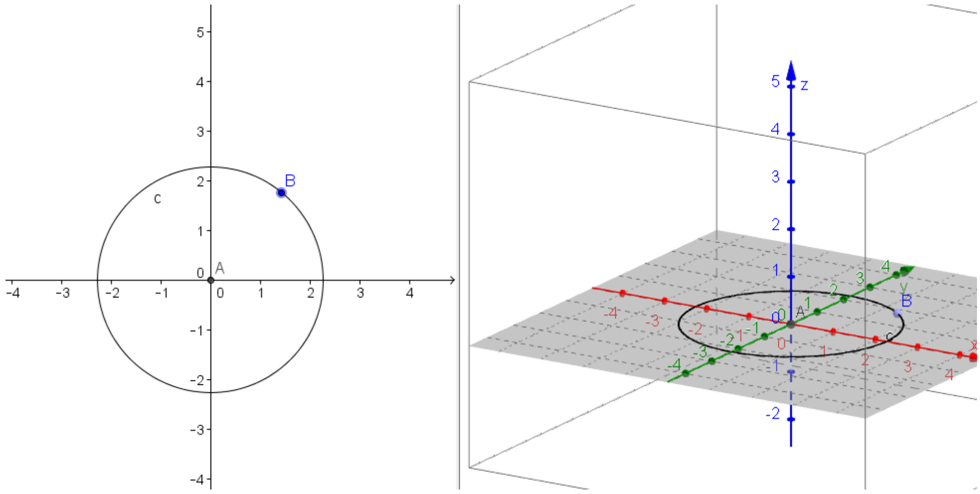
Determina las coordenadas del punto A´ simétrico de A con respecto a la recta r.

Actividad 7

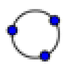
Dados los puntos A(2,3,1) y Q(0,1,1), halla el plano respecto del cual A y B son puntos simétricos.

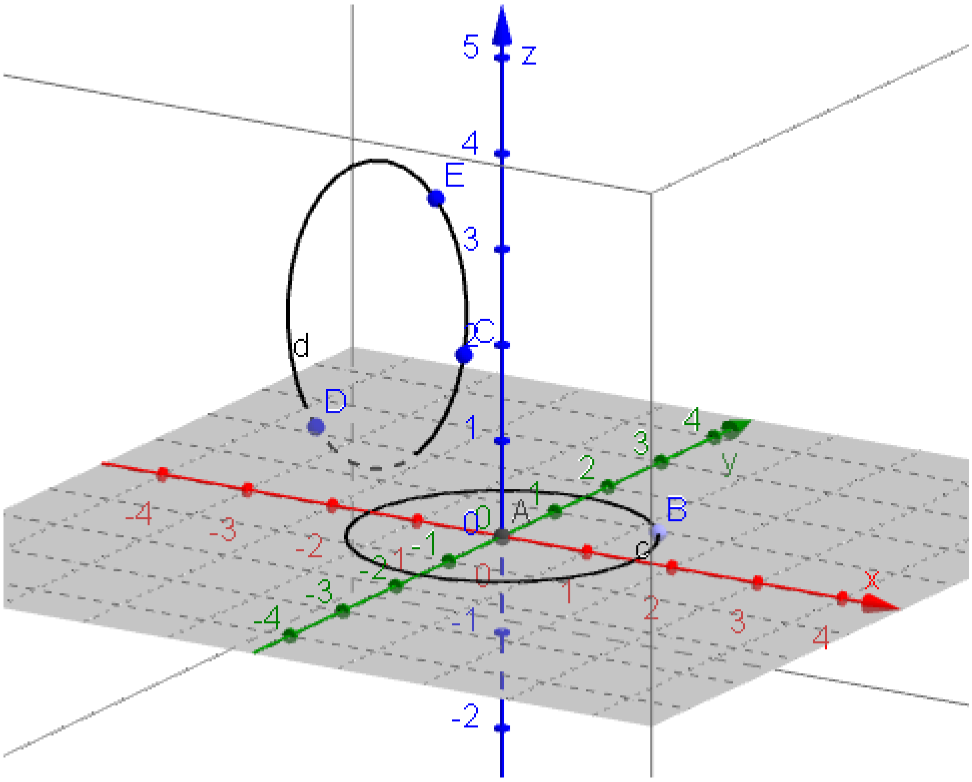
Circunferencias y esferas

Al igual que ocurría con los puntos, al trazar una circunferencia en la **Vista gráfica** (2D), aparecerá también en la vista en 3D.



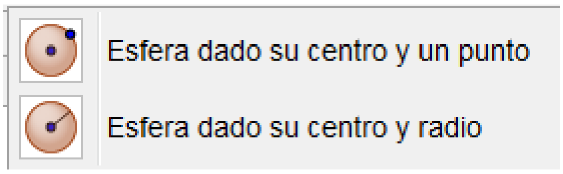
Además, en la Vista gráfica en 3D tenemos otras opciones para dibujar circunferencias en el espacio que aparecen en el bloque siguiente:

Con la herramienta **Circunferencia por tres puntos**  dibujaremos una circunferencia en la vista gráfica en 3D, creando los puntos en el plano OXY para después, moverlos por el espacio.

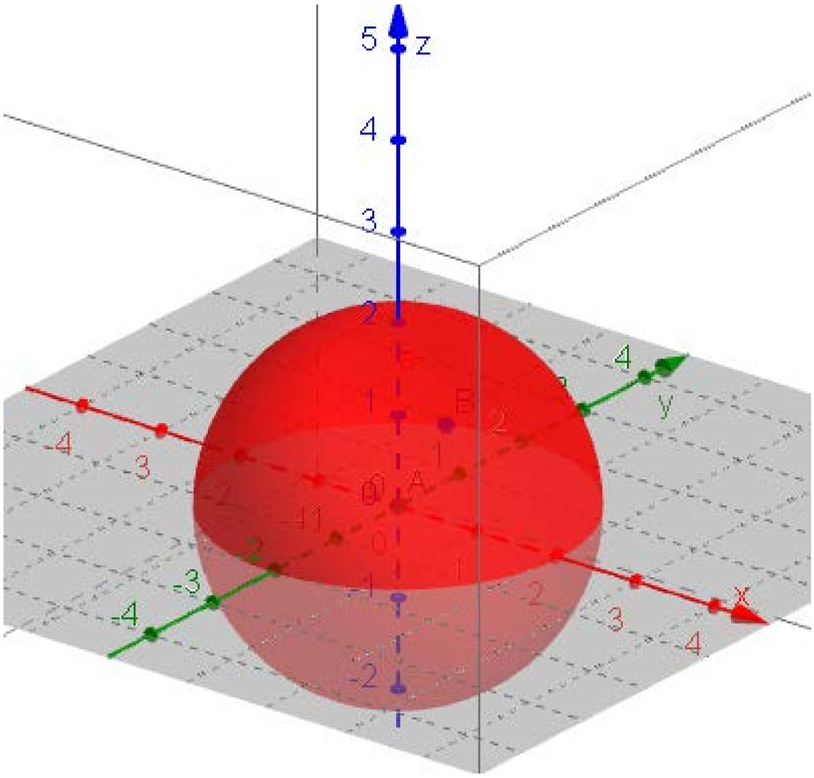


Para las otras dos herramientas necesitaremos una recta y un punto (**Circunferencia[eje, punto]**) o un punto, un vector y un valor numérico para determinar el radio (**Circunferencia [centro, radio, dirección]**).

Para dibujar una esfera disponemos de dos opciones cuyos argumentos aparecen en el siguiente bloque de herramientas.



Por tanto, podemos dibujar una esfera a partir de dos puntos, siendo el primero el centro y el segundo el que fijará el centro o a partir de un punto para el centro y un valor numérico para establecer el radio.



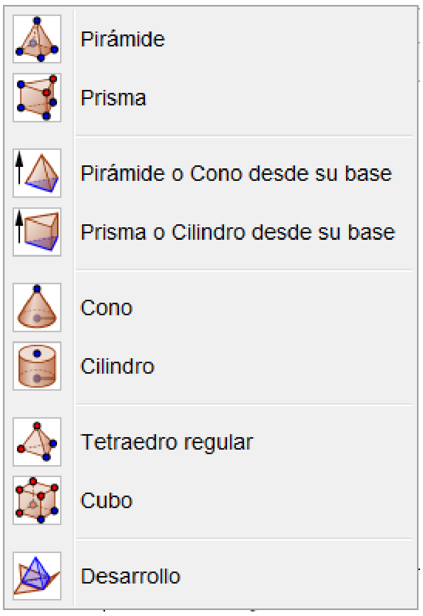
Además, como ya es habitual, también se podrán crear estos objetos con el comando **Esfera**.

Esfera[punto, punto]

Esfera[punto, radio]

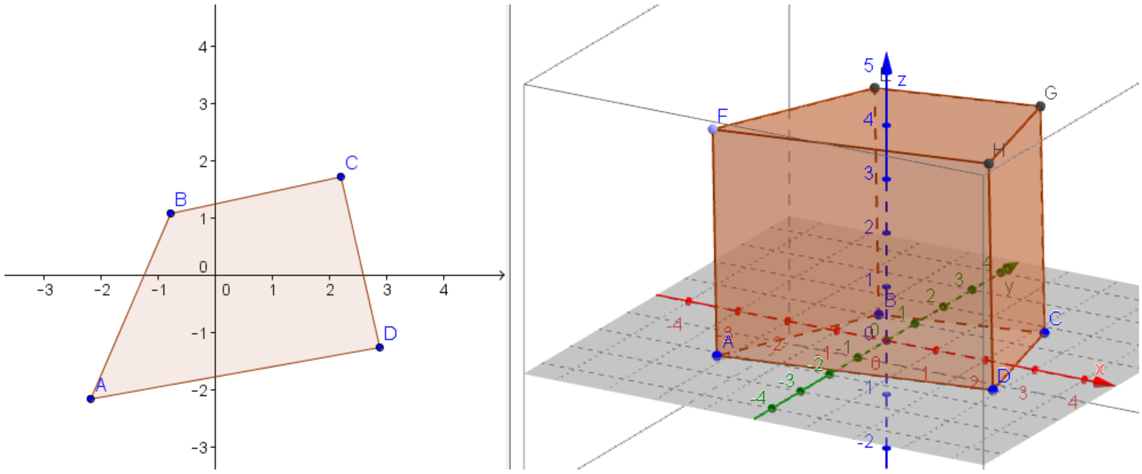
Primas y pirámides

Para dibujar estos objetos disponemos de un nuevo bloque de herramientas:

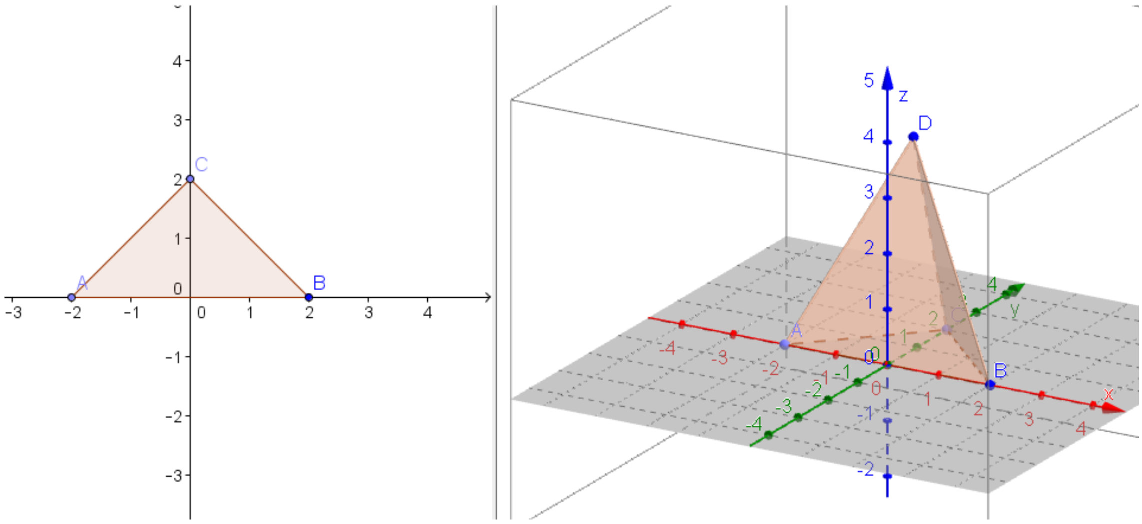


Describimos a continuación los pasos necesarios para construir un prisma o una pirámide.

Para dibujar un prisma necesitaremos un polígono para la base y un punto que determinara la posición de la otra base.



El proceso es similar para una pirámide.

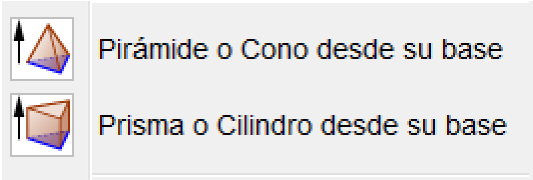


Para dibujar estos objetos hay otras posibilidades a través de comandos.

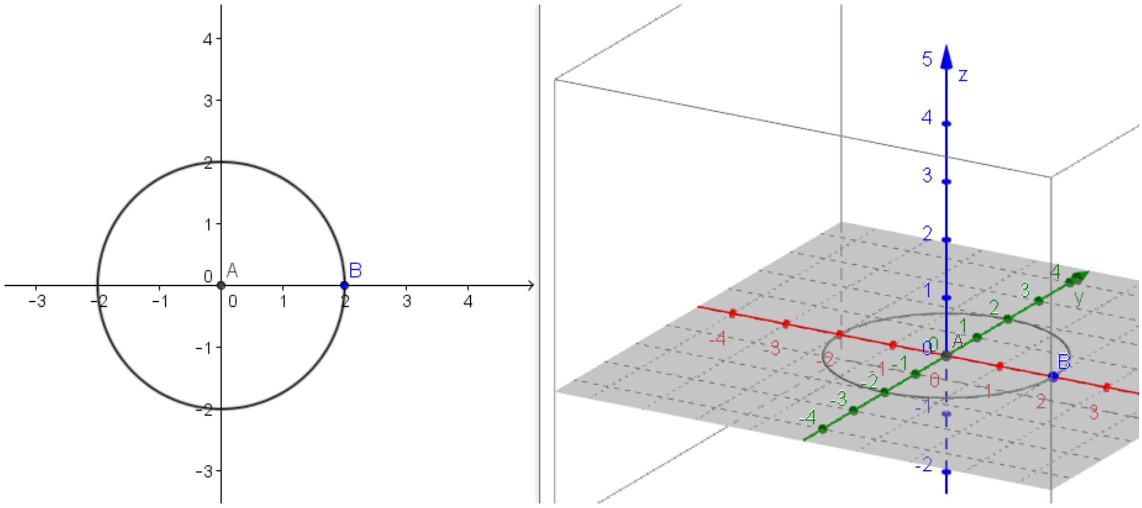
- **Prisma[polígono, punto]** similar al proceso seguido anteriormente.
- **Prisma[polígono, altura]**
- **Prisma[punto, punto, …, punto]** todos los puntos excepto el último se encontrarán en el mismo plano, por lo que determinarán un polígono.

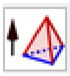
Las mismas opciones servirán para una pirámide utilizando el comando del mismo nombre.

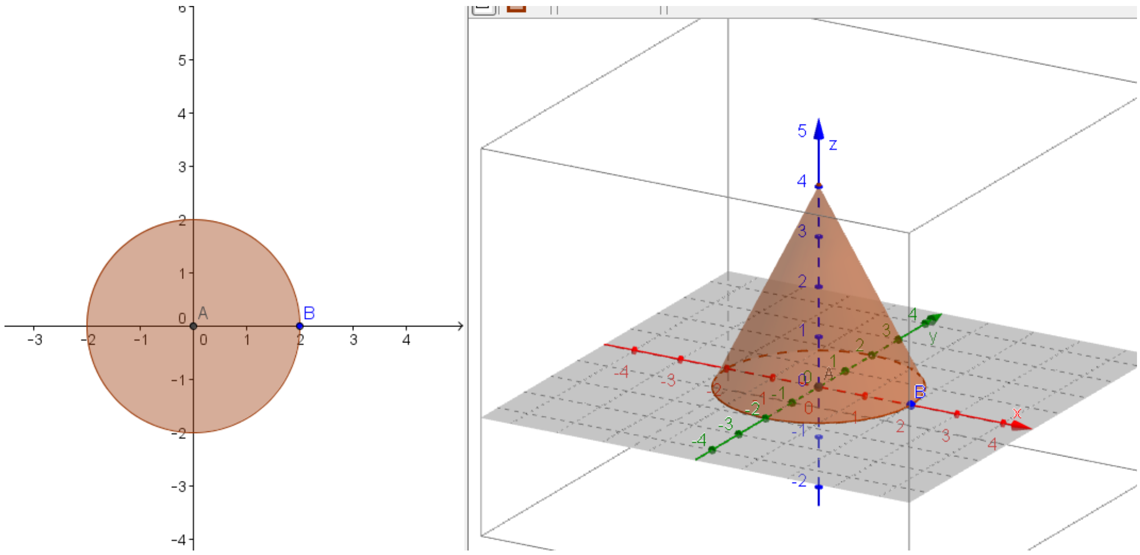
Las dos siguientes herramientas que aparecen en este bloque permitirán crear conos, cilindros, prismas o pirámides a partir de la base, alzándola hasta llegar a la altura deseada.



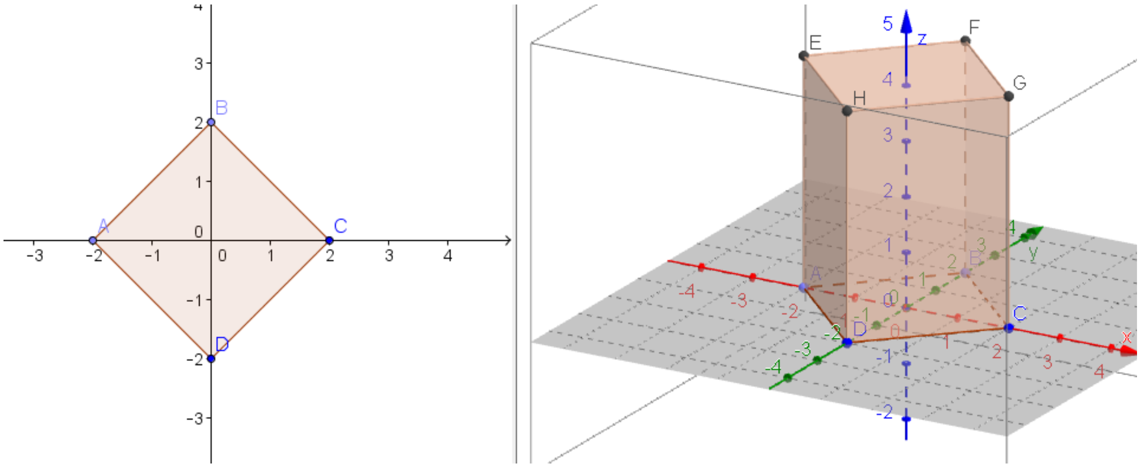
Por ejemplo para crear un cono, podemos dibujar una circunferencia en la vista gráfica en 2D que también aparecerá en el plano OXY en la vista en 3D, tal y como aparece en la imagen siguiente:

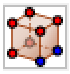


A continuación, seleccionamos la herramienta , arrastrando a continuación la circunferencia para que vaya apareciendo el cono que deseamos construir.

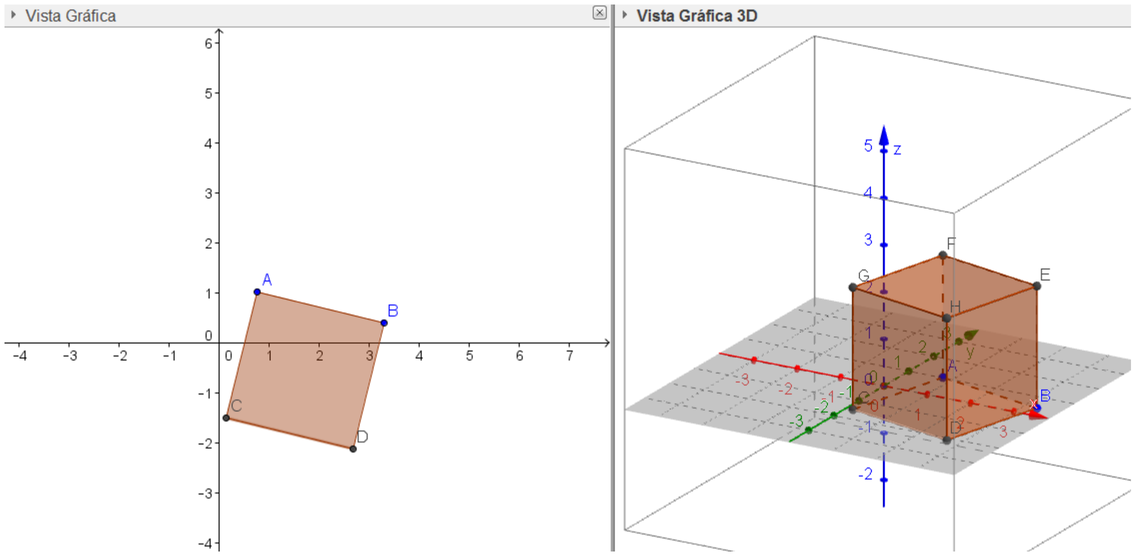


De manera análoga se creará un prisma a partir de un polígono previamente dibujado.

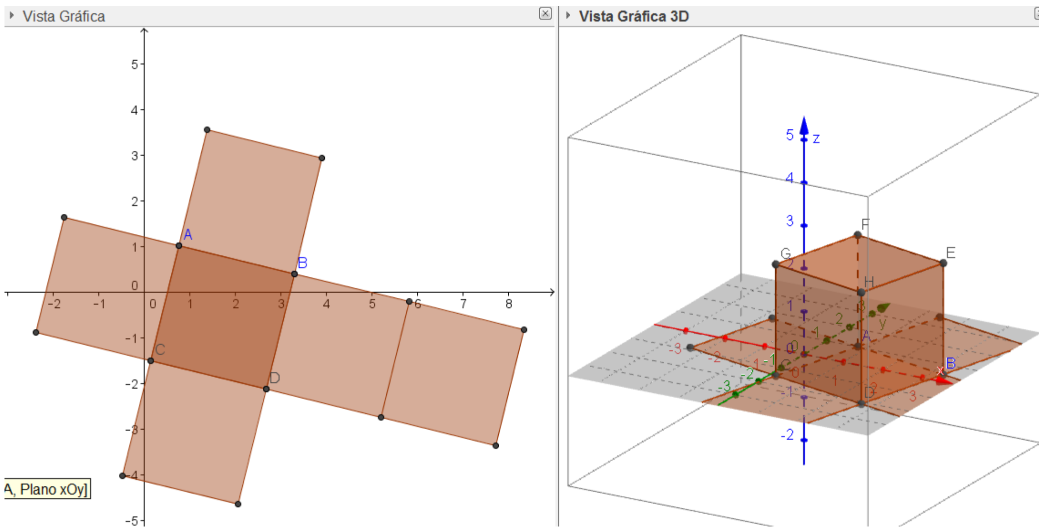


En este mismo bloque de herramientas disponemos también, de las necesarias para dibujar un cubo  o un tetraedro .

Las dos funcionan de manera similar, bastará con pulsar sobre dos puntos que se encuentren en el mismo plano para obtener el poliedro deseado.



La última herramienta de este bloque  devolverá en las dos vistas gráficas (2D y 3D), el desarrollo del poliedro sobre el que se aplique.



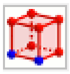
Actividad 8. Construcción de un cubo de arista variable.

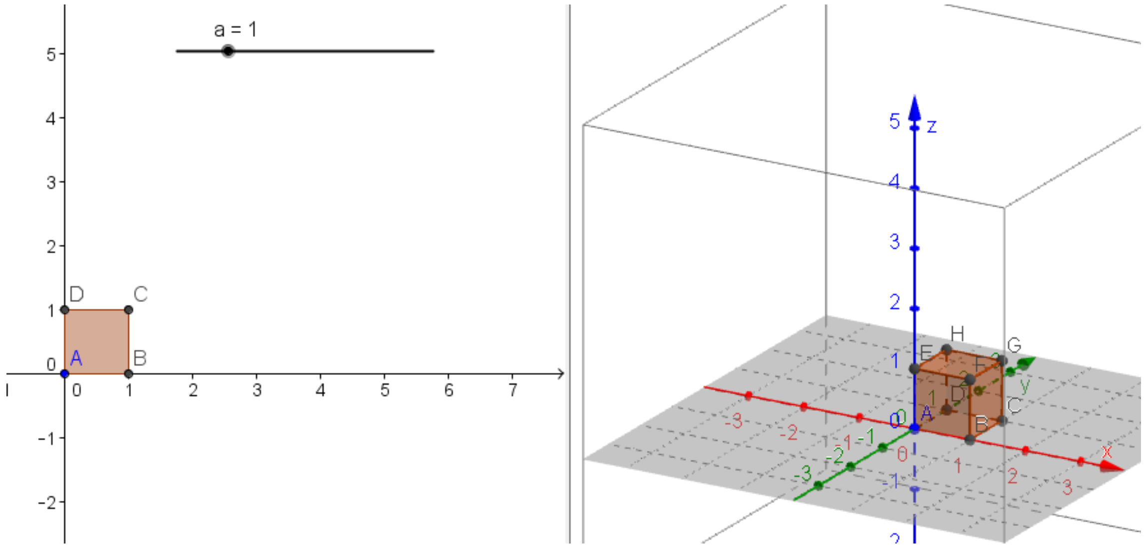
A partir de un deslizador a, construir un cubo cuya arista sea a.

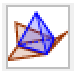
En primer lugar, creamos el deslizador en la vista gráfica 2D ya que por ahora, no está permitido crearlos directamente en la vista 3D.

Podemos situar un vértice en el origen de coordenadas, por lo definimos el punto A(0,0,0).

A continuación, podemos definir otro vértice como B=(a,0,0).

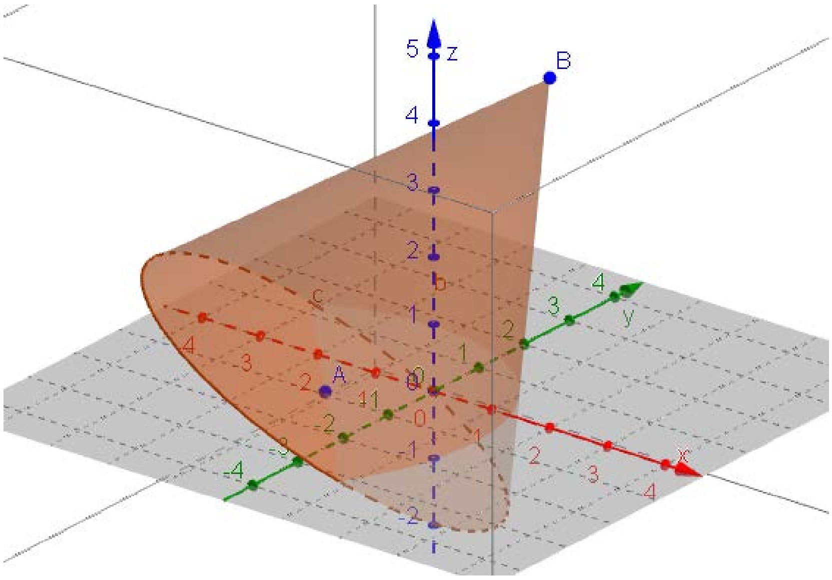
Por último, utilizando la herramienta **Cubo**  dibujarlo marcando los dos puntos anteriores y el plano OXY, para obtener la imagen siguiente:



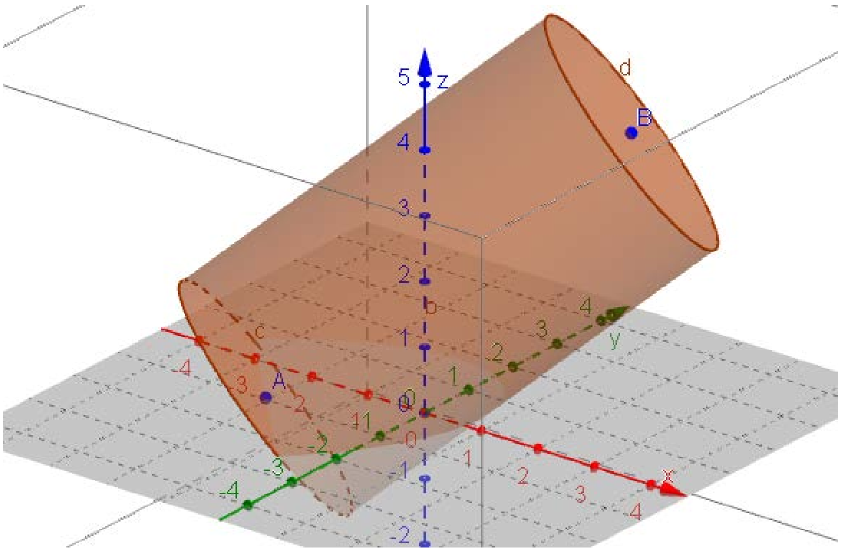
Al variar el valor del deslizador observaremos que cambia el tamaño del cubo, del que podemos obtener su desarrollo utilizando la herramienta  .

Conos y cilindros

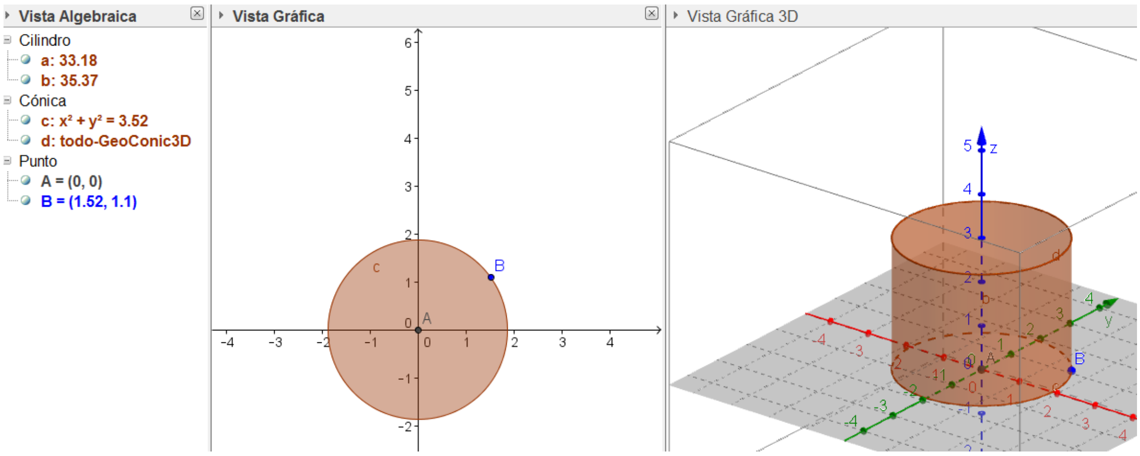
Para dibujar un cono marcaremos dos puntos que corresponden a la altura del cono, siendo el primer punto, el centro de la circunferencia de la base. El proceso se completa a partir de un valor que corresponde al radio de la base.



De manera análoga, un cilindro se construye a partir de los mismos elementos: dos puntos y radio de la base.



En ambos casos, las dos figuras se pueden construir a partir de una circunferencia y un valor para determinar la altura.



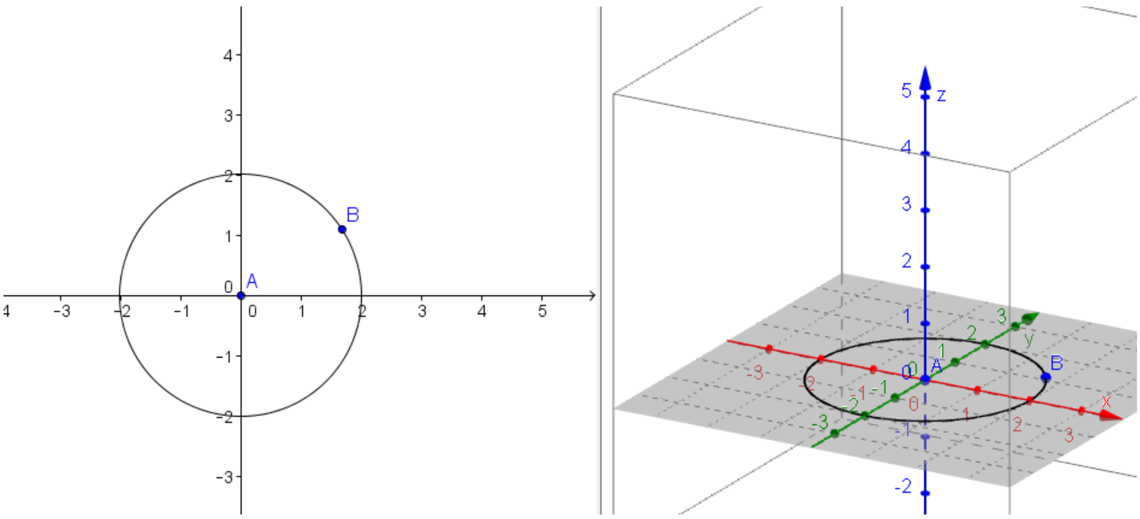
También, disponemos de los correspondientes comandos:

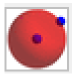
Cono[punto, punto, altura] **Cono[circunferencia, altura]**

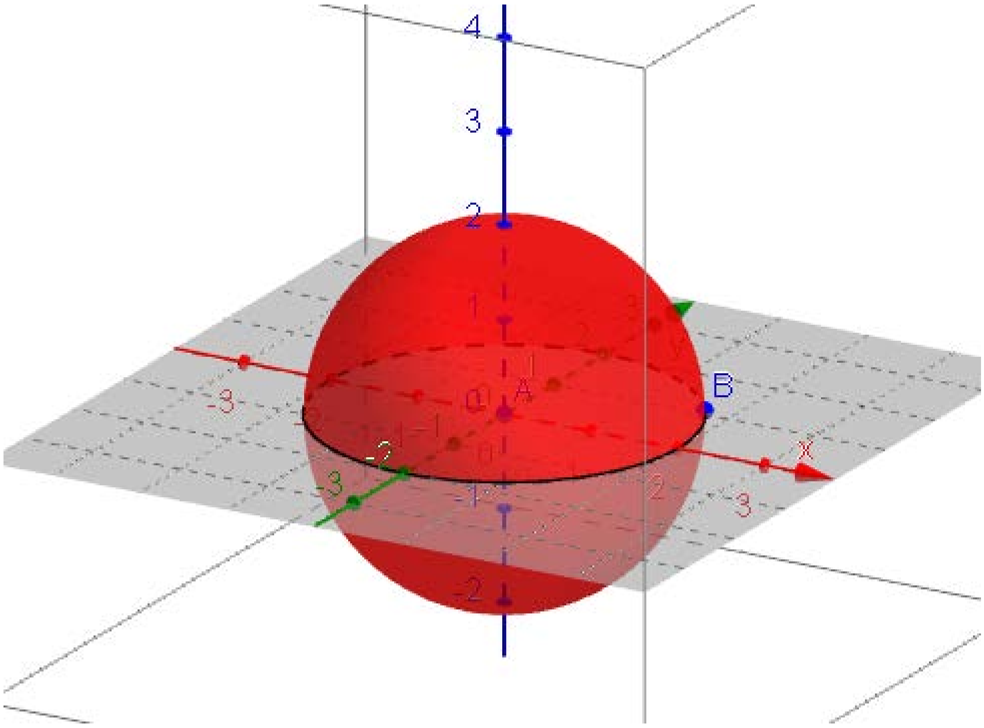
Cilindro[punto, punto, altura] **Cilindro[circunferencia, altura]**

Actividad 9. Explorar una esfera

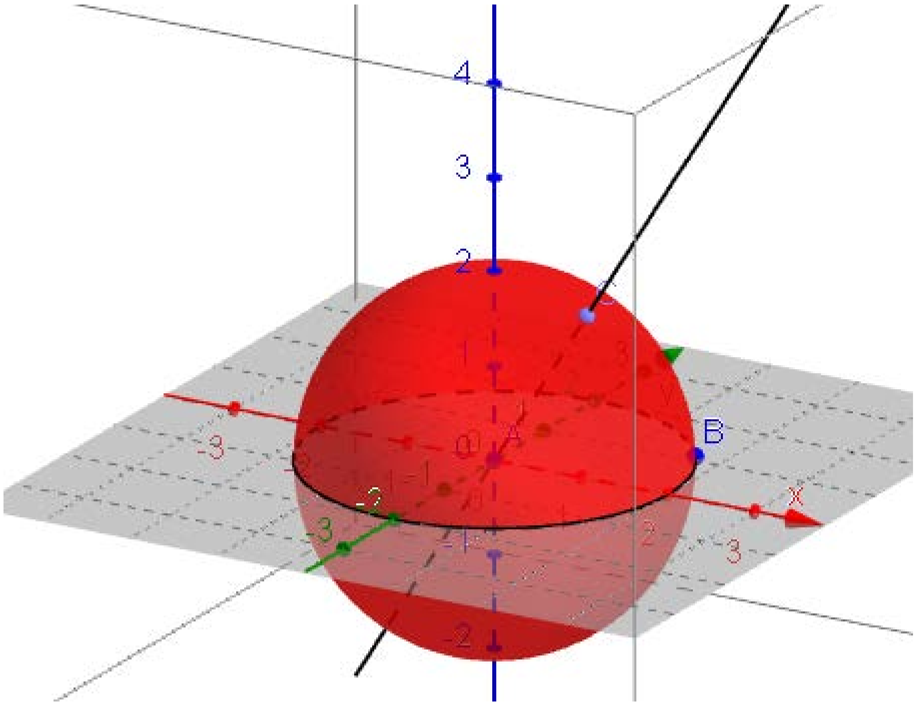
En la vista gráfica 2D dibujamos una circunferencia de centro el origen.

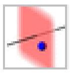


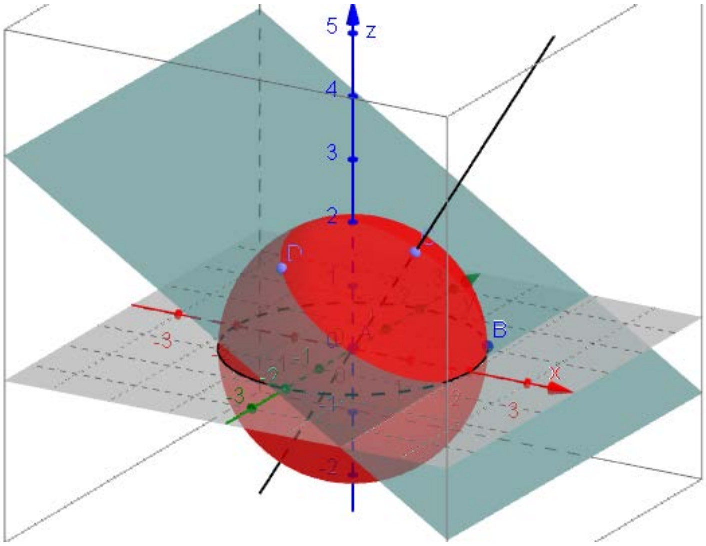
Con la herramienta **Esfera dado su centro y un punto**  dibujamos en la vista 3D, la que tiene centro en A y pasa por B.

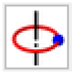


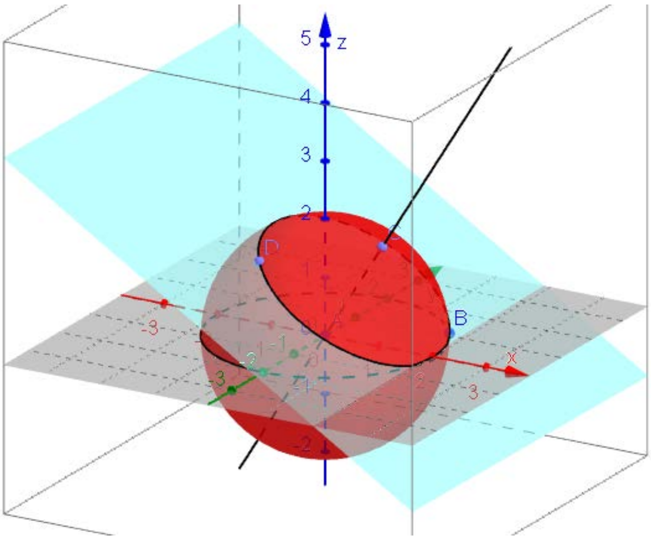
A continuación, creamos un nuevo punto C, sobre la esfera y trazamos la recta AC.



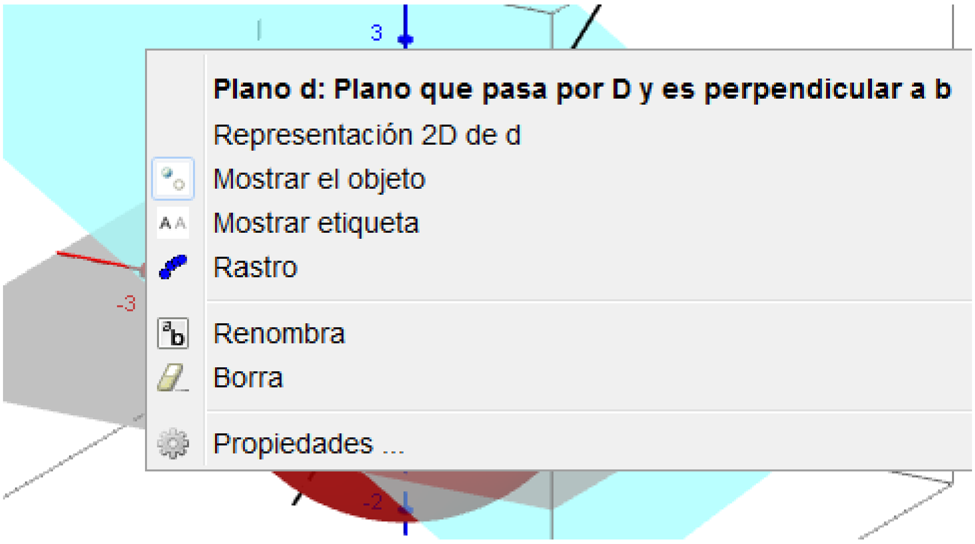
Creamos un nuevo punto D sobre la esfera. A continuación, con ayuda de la herramienta **Plano perpendicular** , construimos el plano perpendicular a la recta AC que pasa por D.



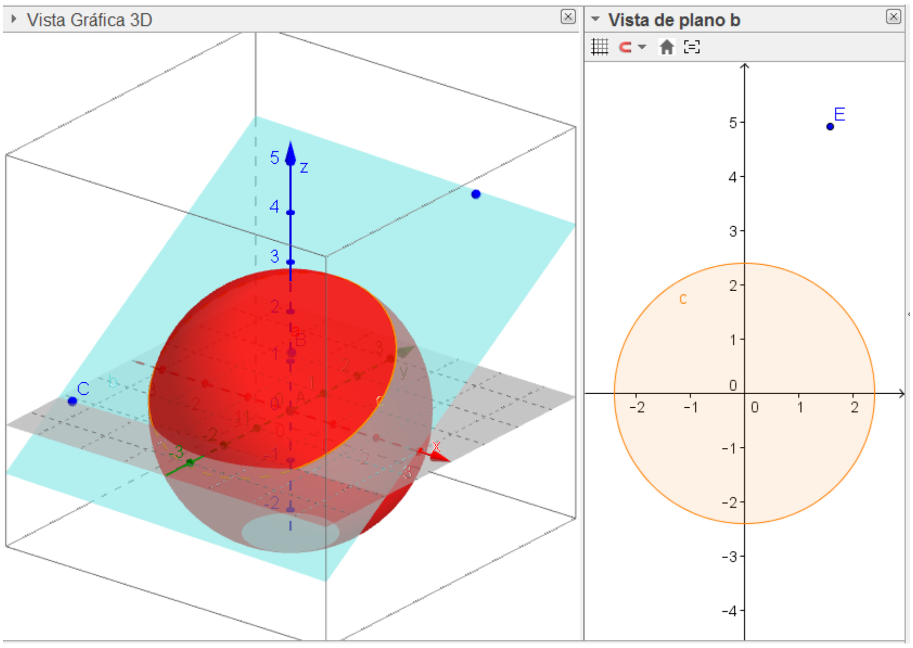
En el siguiente paso, utilizamos la herramienta **Circunferencia (Eje,punto)**  para obtener la circunferencia cuyo eje es la recta AC y que pasa por el punto D.



Para obtener la representación en una vista 2D de la intersección del plano y la esfera, pulsamos el botón derecho sobre el plano; seleccionando la opción **Representación 2D de d** (d es el nombre que tiene asignado el plano).



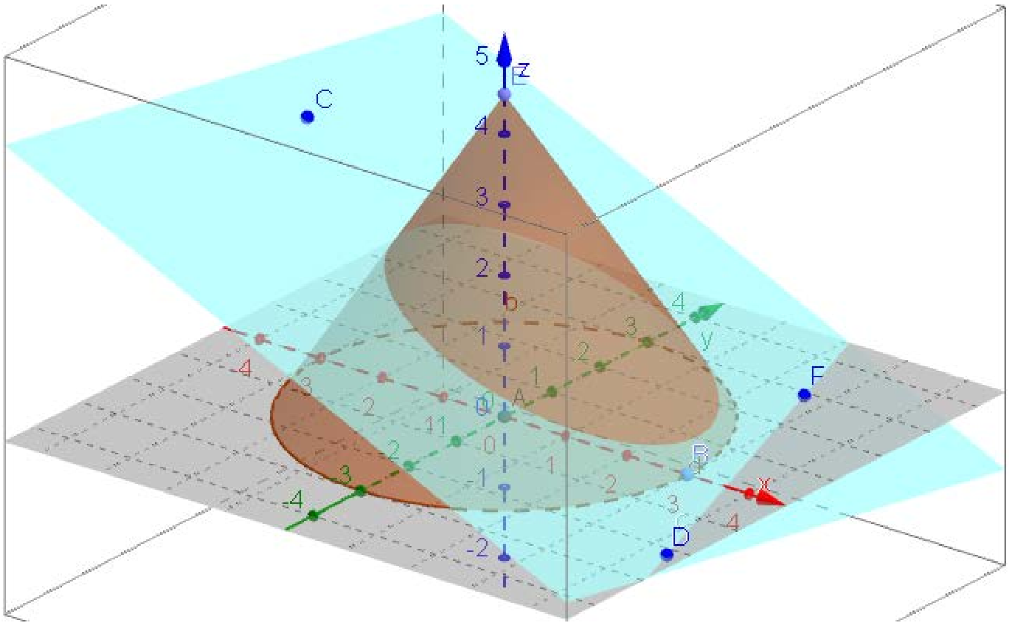
Aparecerá una nueva vista con la representación siguiente:



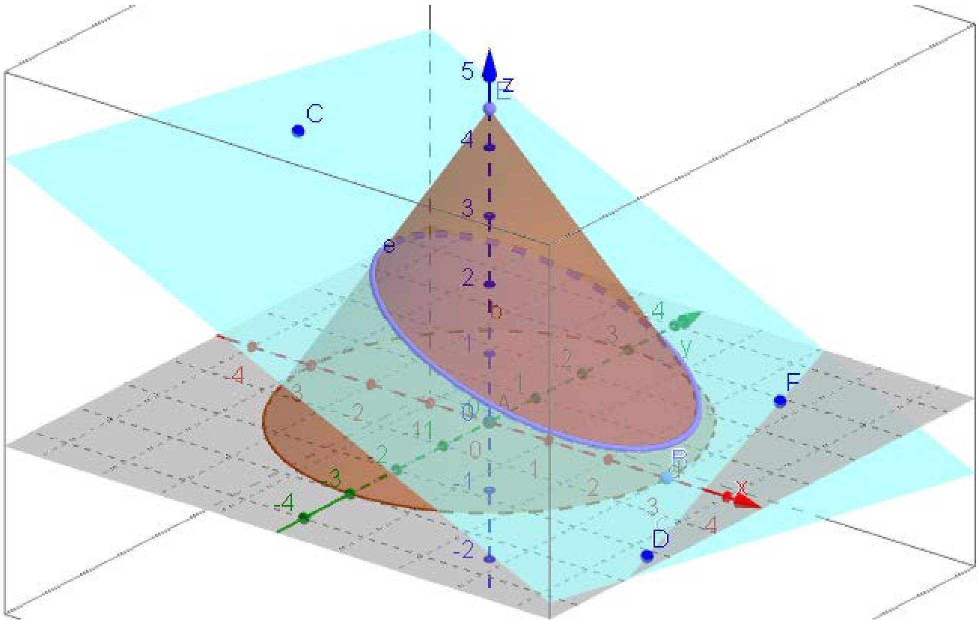
Proponemos mover los puntos B, C y D para observar los cambios en los objetos de la construcción.

Actividad 10. Secciones cónicas

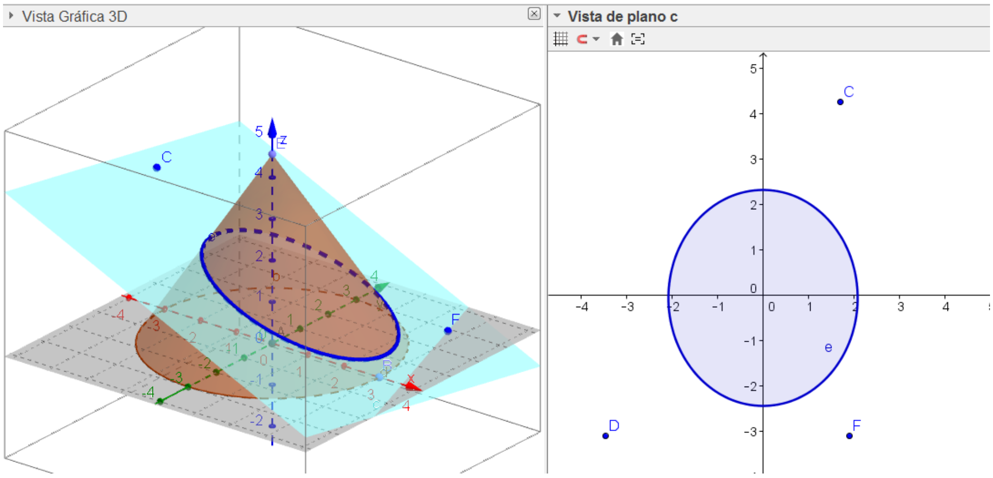
Comenzamos dibujando un cono y un plano, utilizando las herramientas  o  para el primero y  para construir el plano que pasa por tres puntos (D, E y F en la figura).



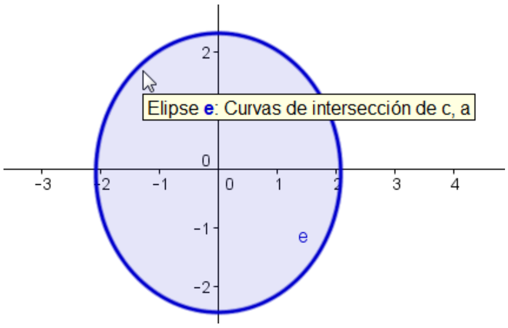
A continuación, la herramienta  nos dará la intersección entre el plano y el cono.



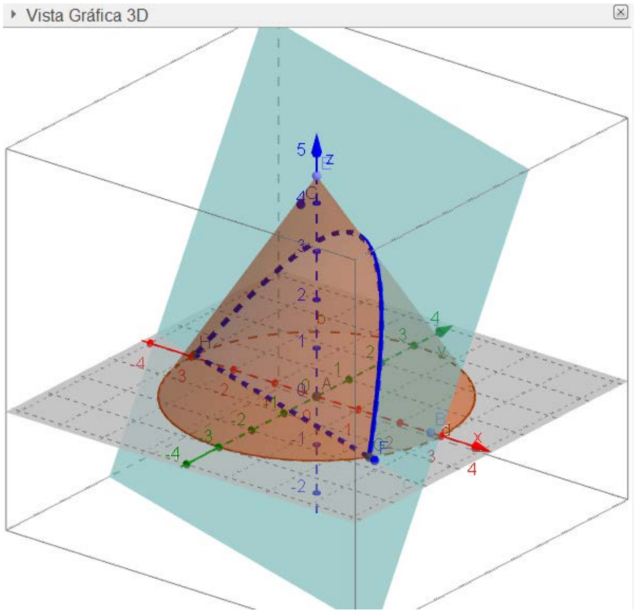
Haciendo clic con el botón derecho en el plano, obtendremos la representación de la sección cónica en una nueva vista.



Al pasar el cursor sobre la curva representada en la nueva vista observaremos que GeoGebra reconoce la sección cónica que en la imagen anterior corresponde a una elipse.



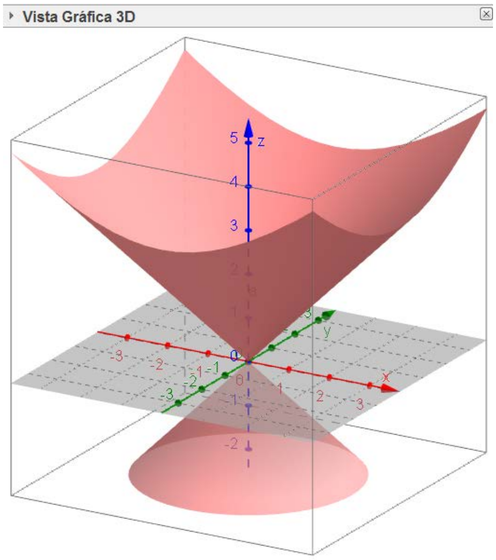
Al mover los puntos D, E y F, obtendremos nuevas secciones.



Proponemos la construcción de las secciones cónicas a partir de un cono infinito, utilizando el comando **ConoInfinito** cuyos argumentos pueden ser dos puntos y un ángulo.

ConoInfinito[punto, punto, ángulo]

Por ejemplo, al introducir en la línea de entrada el comando ConoInfinito[(0,0,0),(0,0,4),45º] obtendremos la imagen siguiente:



Ya solo queda crear un plano para obtener las distintas secciones cónicas.

Actividad 11

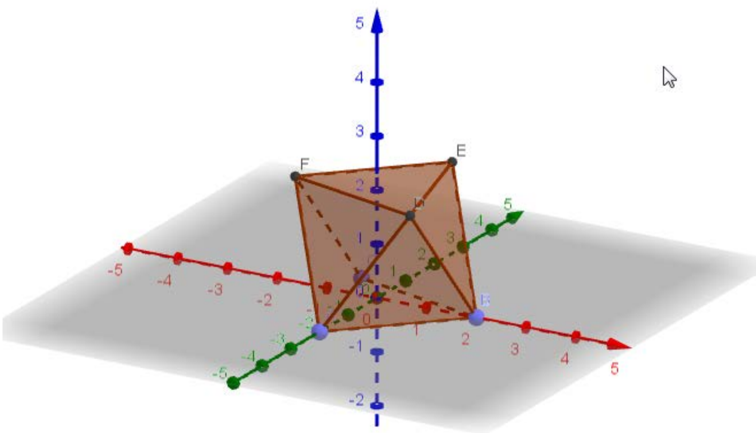
Dibuja un octaedro y determina su volumen, el área de una de las caras y la medida del lado.

Para dibujar un octaedro utilizamos el comando del mismo nombre.

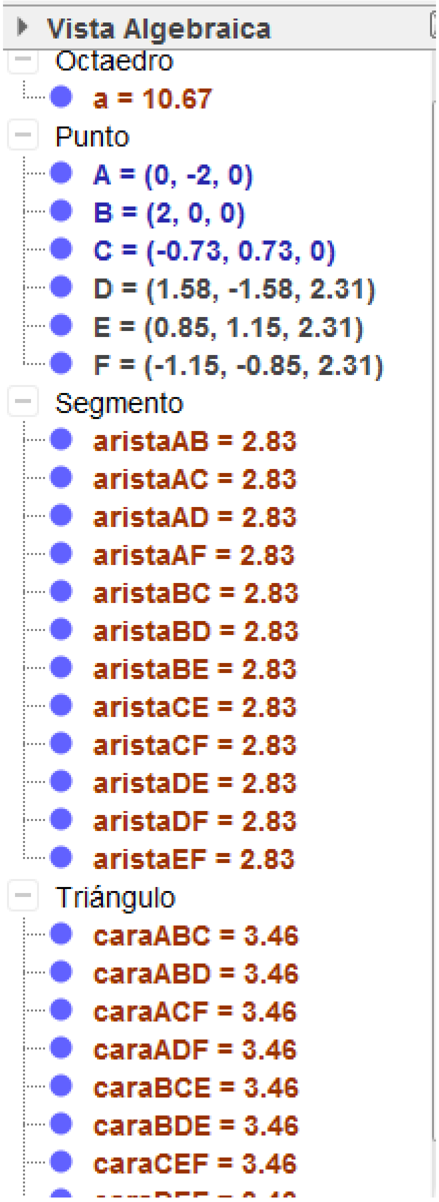
Para ello, podemos definir dos puntos, por ejemplo A (0, -2, 0) y B(2, 0, 0), introduciendo a continuación en la línea de entrada la expresión:

Octaedro[A,B]

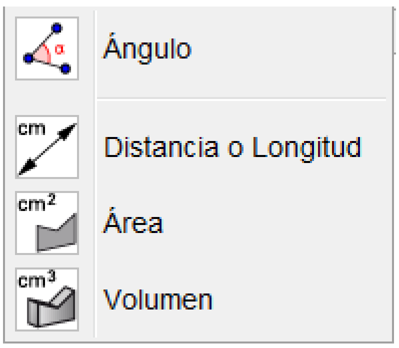
Aparecerá la imagen siguiente:



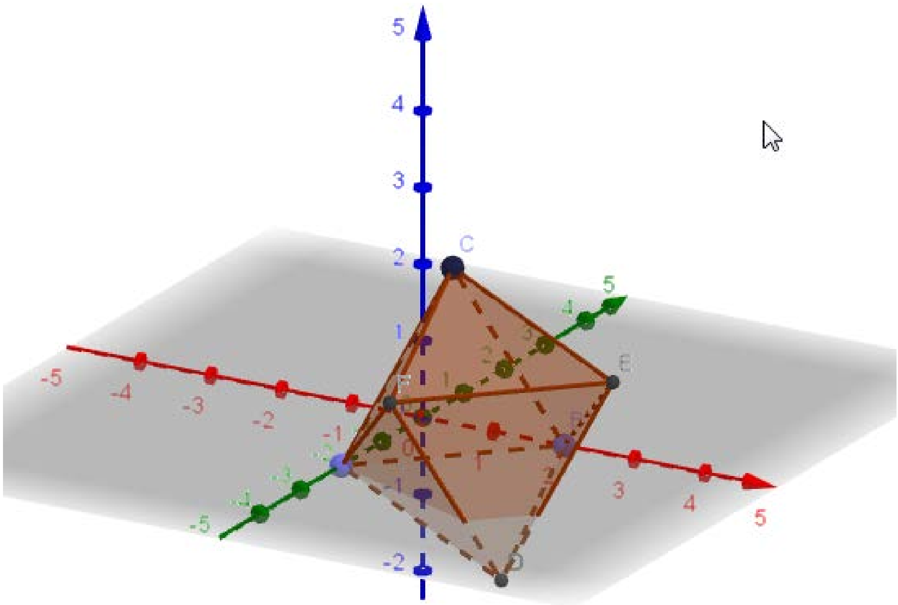
Podemos observar los valores que aparecen en la vista algebraica.



En primer lugar observamos que aparece el nombre del poliedro y un valor que corresponde al volumen que también se puede obtener con la herramienta que encontramos en el bloque siguiente:



A continuación, aparecen las coordenadas de los vértices, de las que observamos que, evidentemente A y B son puntos libres, aunque también lo es el punto C, ya que podemos moverlo para que el octaedro se mueva en el espacio.



En este caso, observaremos que C se mueve sobre una circunferencia para mantener siempre que la cara sea un triángulo equilátero.

Los siguientes valores aparecen con el encabezado Arista y el valor expresa la longitud que también podemos obtener con la herramienta **Distancia o longitud** .

Los últimos valores corresponden a las caras, de las que la medida es el área, que también se puede obtener con la herramienta del mismo nombre. .

A continuación, proponemos algunas actividades de geometría afín y euclídea para trabajar en el espacio con la ayuda de GeoGebra.

Actividad 12

Halla las ecuaciones de la recta paralela a la recta r que pasa por el punto de intersección de la recta s con el plano π.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$$

$$s \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3}$$

$$\pi \equiv x - y \mp z = 5$$

Actividad 13

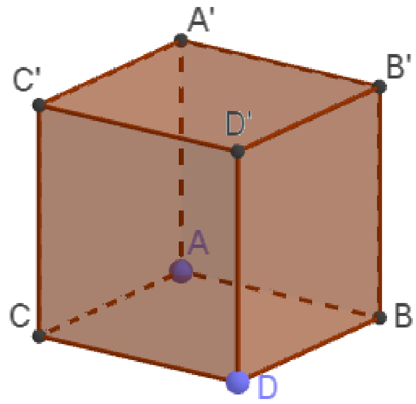
Encuentra la ecuación del plano π paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

$$r \equiv \frac{2x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{1-z}{1}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

Actividad 14

Los puntos A(0, 0, 0), B(1, 0, 0) y C(1, 0, 0) son tres vértices de una de las caras de un cubo, tal y como aparece en la figura.



Determina:

a. Las coordenadas del resto de vértices, sabiendo que la coordenada Z de los vértices A’, B’, C’ y D’ es positiva.

b. Las ecuaciones de las aristas de las que A es el vértice común.

c. El ángulo que forman las diagonales A’D y A’C.

d. La ecuación del plano que contiene a la diagonal C’B y que pasa por el vértice A.

e. El ángulo que forma el plano anterior y la recta que pasa por los vértices A y A’.