CURSO 2023-2024

FyQ

Physics and Chemistry

2ºESO

Maristas Granada

RESUMEN DE TEORÍA Y EJERCICIOS PRIMERA EVALUACIÓN

FÍSICA Y QUÍMICA 2ºESO

COLEGIO MARISTA LA INMACULADA
CALLE SÓCRATES, 8
18002 - GRANADA

UNIDAD 1. Aprendemos a medir: Turismo por la ciudad de Granada

Evaluación: Primera

Temporalidad: 3 semanas

Número de sesiones: 9 horas

Actividades de evaluación:

- Cuaderno
- Informe técnico del laboratorio
- Respuesta oral a preguntas
- Trabajo diario

Breve resumen de la situación: Trabajamos en la oficina de turismo del ayuntamiento de Granada y recibimos la visita de turistas, de todas las partes del mundo, que desean conocer nuestra ciudad.

Cada grupo de turistas presenta unos requisitos concretos: máximo de dinero que pueden gastar en monumentos, preferencia por caminar o por utilizar transporte público, días de la semana que pueden estar en Granada, idiomas en los que pueden manejarse, información sobre conexiones con estaciones de autobús, tren y aeropuerto, etc.

La finalidad de esta situación de aprendizaje es ofrecer a cada grupo de turistas una organización de su visita a Granada que se ajuste a sus necesidades, aplicando los saberes y los criterios de evaluación tanto de FyQ como de Matemáticas (asignatura con la que se trabaja de manera coordinada durante todo el año). Para ello, los alumnos contarán con las explicaciones de clase, con los materiales de trabajo y con los recursos web proporcionados por el profesor, que establecen las condiciones de inicio y las condiciones a cumplir en cada grupo de turistas. También se ofrecen enlaces web fiables donde contrastar la información técnica (precios de monumentos, distancias, horarios, etc.).

Es importante el proceso de selección previo del profesor sobre la información web, para definir un conjunto de entornos web con veracidad y seguridad contrastada. Y tener así un marco común para todos los alumnos que deban buscar la información que inicialmente desconozcan: horarios, precios, historia, medios de transporte, etc.

Alternamos trabajo individual con trabajo grupal a lo largo de las distintas sesiones.

No hay solución única al reto que se plantea. Pero sí las hay más eficientes que otras, por lo que se valorará especialmente en la evaluación aquellas soluciones que cumplan con mayores márgenes de seguridad las necesidades de cada grupo.

1. ¿Qué necesitamos saber previamente?

1.1. ¿Qué es una magnitud física?

Una magnitud Una magnitud física es todo aquello que puede medirse con un número y una unidad. Una unidad es la cantidad que sirve de referencia para comparar diferentes medidas.

Por ejemplo, es fácil afirmar que 80.000 segundos es una cantidad de tiempo mayor que 2.500 segundos, ya que ambos números están acompañados por la misma unidad (segundo).

¿Qué pasaría si tuviésemos que comparar 80.000 segundos con 25 horas? Al no estar expresados ambos tiempos en la misma unidad, tendríamos que operar previamente para poder compararlos:

- En un minuto hay 60 segundos.
- En una hora hay 60 minutos.
- En una hora hay 3.600 segundos (60 veces 60).
- En 25 horas habrá 90.000 segundos (25 veces 3.600)

Y ahora sí podríamos afirmar que 80.000 segundos es una cantidad inferior a 25 horas (que son 90.000 segundos).

1.2. El Sistema Internacional de Unidades (S.I.)

Antiguamente se utilizaban las partes del cuerpo como unidades de medida. Por ejemplo:

- pulgada: grosor del dedo pulgar.
- codo: distancia entre el codo y el extremo del dedo medio de la mano.
- pie: longitud de la región plantar (un codo equivalía aproximadamente a dos pies).
- legua: distancia que una persona solía recorrer en una hora de camino.

Este tipo de unidades presentan el problema de que dos personas distintas suelen tener diferente grosor de dedo, diferente longitud de codo, diferente longitud de pie o caminar a ritmos distintos. Es decir, lo que para una persona serían 23 codos, para otra podrían ser 26. Las medidas, bajo esas unidades, diferían mucho entre sí.

Los científicos buscaron solución a este problema y acordaron en la Conferencia General de Pesos y Medidas celebrada en Ginebra (Suiza) en 1960, un sistema de referencia común a la hora de medir. Este sistema común se llamó inicialmente MKS (por las iniciales de metro, kilogramo y segundo) y posteriormente se denominó Sistema Internacional de Unidades (S.I.).

El S.I. es seguido por los científicos de todo el mundo, aunque es cierto que la tradición cultural de zonas anglosajones provoca que el S.I. conviva con otros sistemas de medida en esos países (que emplean, por ejemplo, la milla en vez del kilómetro para medir longitudes, o la libra en vez del kilogramo para medir masas).

1.3. Magnitudes fundamentales

Una magnitud fundamental es aquella que se define por sí misma y es independiente de las demás magnitudes. Actualmente consideramos siete magnitudes fundamentales: longitud, masa, tiempo, temperatura, intensidad de corriente, intensidad luminosa y cantidad de materia.

Tabla de magnitudes fundamentales		
Magnitud	**Unidad de referencia en el S.I.**	**Símbolo**
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Temperatura	kelvin	K (letra mayúscula y no se añade °)
Intensidad de corriente	amperio	A (letra mayúscula)
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de sustancia	mol	mol

1.4. Algunos ejemplos de magnitudes derivadas

Una magnitud derivada es aquella que se obtiene mediante expresiones matemáticas a partir de las magnitudes fundamentales. Existen cientos de magnitudes derivadas. En este inicio de curso vamos a centrarnos en el área, el volumen y la velocidad.

Tres ejemplos de magnitudes derivadas		
Magnitud	**Unidad de referencia en el S.I.**	**Símbolo**
Área	metro cuadrado	m^2
Volumen	metro cúbico	m^3
Velocidad	Metro dividido por segundo. Coloquialmente se dice "metro por segundo". ¡Pero ojo! Es una división, no es un producto.	m/s

1.5. Múltiplos y submúltiplos de unidades

Si vamos a medir cantidades muy grandes o muy pequeñas, aparecen lógicamente números muy grandes o números muy pequeños. Por ejemplo: la distancia de la Tierra al Sol es de aproximadamente 150.000.000.000 m. Es decir, ciento cincuenta mil millones de metros. Escribir un número tan largo y con tantos ceros es muy incómodo y poco práctico.

Por esta razón vamos a utilizar múltiplos, submúltiplos y potencias de base 10.

Recuerda las siguientes reglas de matemáticas que has aprendido en Primaria:

$$1 = 10^0$$
$$10 = 10^1$$
$$100 = 10^2$$
$$1.000 = 10^3$$
$$10.000 = 10^4$$
$$100.000 = 10^5$$
$$1.000.000 = 10^6$$

$$1 = 10^0$$
$$\frac{1}{10} = 0{,}1 = 10^{-1}$$
$$\frac{1}{100} = 0{,}01 = 10^{-2}$$
$$\frac{1}{1.000} = 0{,}001 = 10^{-3}$$
$$\frac{1}{10.000} = 0{,}0001 = 10^{-4}$$
$$\frac{1}{100.000} = 0{,}00001 = 10^{-5}$$
$$\frac{1}{1.000.000} = 0{,}000001 = 10^{-6}$$

Múltiplos y submúltiplos del metro

Longitud	Equivalencia con el metro
kilómetro (km)	1 km = 1.000 m = 10^3 m
hectómetro (hm)	1 hm = 100 m = 10^2 m
decámetro (dam)	1 dam = 10 m = 10 m
metro (m)	
decímetro (dm)	1 dm = 0,1 m = 10^{-1} m
centímetro (cm)	1 cm = 0,01 m = 10^{-2} m
milímetro (mm)	1 mm = 0,001 m = 10^{-3} m

Múltiplos y submúltiplos del kilogramo

Masa	Equivalencia con el kilogramo
tonelada (tm)	1 tm = 1.000 kg = 10^3 kg
kilogramo (kg)	
hectogramo (hg)	1 hg = 0,1 kg = 10^{-1} kg
decagramo (dag)	1 dag = 0,01 kg = 10^{-2} kg
gramo (g)	1 g = 0,001 kg = 10^{-3} kg
decigramo (dg)	1 dg = 0,0001 kg = 10^{-4} kg
centigramo (cg)	1 cg = 0,00001 kg = 10^{-5} kg
miligramo (mg)	1 mg = 0,000001 kg = 10^{-6} kg

Múltiplos y submúltiplos del segundo

Tiempo	Equivalencia con el segundo
día (d)	1 d = 24·3.600 s = 86.400 s
hora (h)	1 h = 60·60 s = 3.600 s
minuto (min)	1 min = 60 s
segundo (s)	
décima de segundo (ds)	1 ds = 0,1 s = 10^{-1} s
centésima de segundo (cs)	1 cs = 0,01 s = 10^{-2} s
milésima de segundo (ms)	1 ms = 0,001 s = 10^{-3} s

Múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado

Área o Superficie	Equivalencia con el metro cuadrado
kilómetro cuadrado (km^2)	1 km^2 = 1.000.000 m^2 = $(10^2)^3$ m^2 = 10^6 m^2
hectómetro cuadrado (hm^2)	1 hm^2 = 10.000 m^2 = $(10^2)^2$ m^2 = 10^4 m^2
decámetro cuadrado (dam^2)	1 dam^2 = 100 m^2 = $(10^2)^1$ m^2 = 10^2 m^2
metro cuadrado (m^2)	
decímetro cuadrado (dm^2)	1 dm^2 = 0,01 m^2 = $(10^2)^{-1}$ m^2 = 10^{-2} m^2
centímetro cuadrado (cm^2)	1 cm^2 = 0,0001 m^2 = $(10^2)^{-2}$ m^2 = 10^{-4} m^2
milímetro cuadrado (mm^2)	1 mm^2 = 0,000001 m^2 = $(10^2)^{-3}$ m^2 = 10^{-6} m^2

Múltiplos y submúltiplos del metro cúbico

Volumen	Equivalencia con el metro cúbico
kilómetro cúbico (km^3)	1 km^3 = 1.000.000.000 m^3 = $(10^3)^3$ m^3 = 10^9 m^3
hectómetro cúbico (hm^3)	1 hm^3 = 1.000.000 m^3 = $(10^3)^2$ m^3 = 10^6 m^3
decámetro cúbico (dam^3)	1 dam^3 = 1.000 m^3 = $(10^3)^1$ m^3 = 10^3 m^3
metro cúbico (m^3)	
decímetro cúbico (dm^3)	1 dm^3 = 0,001 m^3 = $(10^3)^{-1}$ m^3 = 10^{-3} m^3
centímetro cúbico (cm^3)	1 cm^3 = 0,000001 m^3 = $(10^3)^{-2}$ m^3 = 10^{-6} m^3
milímetro cúbico (mm^3)	1 mm^3 = 0,000000001 m^3 = $(10^3)^{-3}$ m^3 = 10^{-9} m^3

Actividades manipulativa sobre el concepto de área: rejilla de cuadraditos y pentominós

La siguiente rejilla está formada por cuadraditos. La longitud del lado de cada cuadradito es de 0,5 cm. Como la operación matemática del producto $b \times a$ es equivalente al cálculo del área de un rectángulo de base b y altura a, podemos afirmar que cada cuadradito posee un área igual a $0{,}5\ cm \times 0{,}5\ cm = 0{,}25\ cm^2$.

PARA PENSAR 1. ¿Cómo es posible que el número asociado al área $(0{,}25)$ haya resultado más pequeño que el número asociado al lado del cuadradito $(0{,}5)$? ¿Podemos comparar longitud con área?

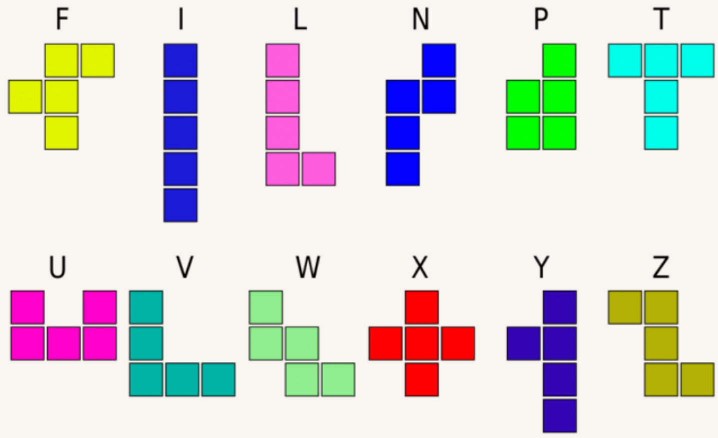
Fíjate en la esquina superior de la rejilla. Aparece sombreado un cuadrado formado por 2 cuadraditos de base y 2 cuadraditos de altura. El área de ese cuadrado es de $1\ cm^2$ y se ha formado con la unión de 4 cuadraditos pequeños.

PARA PENSAR 2. ¿Eres capaz de dibujar en la rejilla otras figuras distintas al cuadrado y que posean el mismo área de $1\ cm^2$? ¿Existen infinitas figuras distintas de área $1\ cm^2$? ¿Existen figuras simétricas o relacionadas mediante giros?

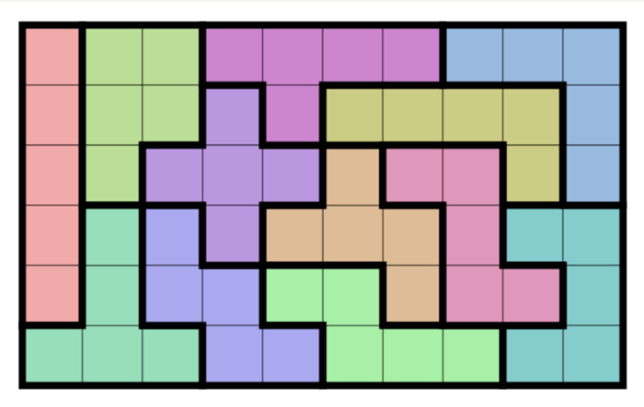
CONCEPTO DE ÁREA O SUPERFICIE

PENTOMINÓ

Un pentominó es una figura plana formada por 5 cuadrados unidos por sus lados. Solo existen 12 pentominós posibles.
Si cada cuadrado posee de lado 1 unidad de longitud, su área sería igual a 1 unidad al cuadrado. Por lo tanto, el área de cada pentominó será igual a 5 unidades al cuadrado.



La siguiente imagen muestra un rectángulo utilizando los 12 pentóminos. ¿Cuál será el área de este rectángulo?



¿Eres capaz de formar otros rectángulos usando al menos 3 pentóminos? Calcula el área de los rectángulos que consigas formar.

Utiliza los pentominós que tienes en clase para crear los siguientes rectángulos:

- Con 3 pentominós puedes formar un rectángulo 3x5 (área total 15 unidades cuadradas).
- Con 4 pentominós puedes formar un rectángulo 4x5 (área total 20 unidades cuadradas).
- Con 5 pentominós puedes formar un cuadrado 5x5 (área total 25 unidades cuadradas).
- Con 6 pentominós puedes formar un cuadrado 6x5 (área total 30 unidades cuadradas).
- Con 7 pentominós puedes formar un rectángulo 7x5 (área total 35 unidades cuadradas).
- Con 8 pentominós puedes formar un rectángulo 8x5 (área total 40 unidades cuadradas).
- Con 9 pentominós puedes formar un rectángulo 9x5 (área total 45 unidades cuadradas).

Hay más configuraciones posibles. En internet encontrarás infinidad de ejemplos resueltos. Intenta pensar las soluciones por ti mismo. Los rectángulos arriba indicados no tienen solución única, por lo que puedes colocar los pentominós de diversas formas para conseguir la figura final.

PARA PENSAR 3. Todos los pentominós poseen el mismo área. Pero ¿poseen todos los pentominós el mismo perímetro? ¿Qué es el perímetro de una figura plana?

PARA PENSAR 4. ¿Es posible crear un rectángulo 3x5 con tres pentominós diferentes si una de la piezas es la denominada como X en el cartel resumen anterior? Razona tu respuesta.

Actividad manipulativa sobre el concepto de volumen: policubos

Un cubo es una figura geométrica de 6 caras, donde cada cara es un cuadrado. El lado de cada uno de los cuadrados se llama arista. Los policubos son “muchos cubos” que pueden engancharse por sus caras laterales.

Si la arista de un policubo mide 1 unidad de longitud, el área de su base cuadrada será igual a 1 unidad cuadrada. Hasta aquí, igual que los pentominós. Pero si consideramos también la profundidad del policubo, podemos hablar de volumen en tres dimensiones. El volumen es el espacio que ocupa un objeto.

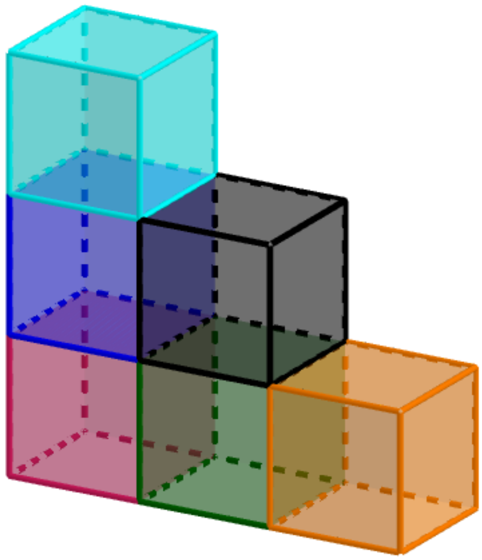
En un cubo el volumen es igual al producto de las longitudes de las tres aristas que tienen un vértice en común. Si la arista mide 1 unidad de longitud, el volumen será: 1 unidad x 1 unidad x 1 unidad = 1 unidad cúbica.

PARA PENSAR 5. Si unimos los policubos entre sí y formamos un cubo más grande que tenga por arista 2 policubos, ¿cuántos policubos formaran el cubo grande? ¿Cuál será el volumen de ese cubo grande?

PARA PENSAR 6. Y si construimos un cubo aún más grande formado por 3 policubos en su arista, ¿cuántos policubos formarán ahora el cubo grande? ¿Y cuál será su volumen?

PARA PENSAR 7. Repite el razonamiento construyendo aristas con 4 policubos, con 5 policubos, con 6 policubos, etc. ¿Encuentras algún patrón para calcular el volumen total? Utiliza los policubos que tienes en clase.

PARA PENSAR 8. Utiliza los policubos para fabricar formas geométricas en tres dimensiones que no sean cubos. Pueden ser en forma de caja de zapatos, en forma de escalera, etc. Clasifica las construcciones por el volumen total y por la suma de las áreas de todas sus caras exteriores.



PARA PENSAR 9. La longitud de las aristas de los policubos es de 2 cm. Por lo tanto, ¿cuánto valdrá el volumen de un policubo en centímetros cúbicos? ¿Cuánto valdrá el volumen, en centímetros cúbicos, de un cubo formado por 2 policubos de arista? ¿Y si el cubo está formado por 3 policubos de arista? ¿Y si está formado por 4 policubos de arista? ¿Y por 5 policubos? ... ¿Y por "n" policubos?

1.6. Notación científica para expresar cantidades

Los números positivos que no tiene decimales son los números naturales. Si incluimos también los números negativos sin decimales, tendremos los números enteros. Y si incluimos los decimales hablaremos de números reales. Las operaciones que hemos estudiado en MATEMÁTICAS son las herramienta FUNDAMENTAL para operar en FÍSICA Y QUÍMICA. Ambas asignaturas estamos coordinadas y trabajamos a la par los mismos contenidos matemáticos.

Cuando aparezcan decimales vamos a asumir el siguiente convenio de notación científica:

- Trabajar con potencias de base 10 si la extensión del número lo requiere.
- Dejar un cifra distinta de cero en la parte entera.
- Dejar un máximo de dos cifras redondeadas en la parte decimal.

Recuerda que multiplicar por potencias de base 10 implica desplazar hacia la derecha la coma decimal tantas posiciones como indique el exponente. Y dividir por potencias de base 10 implica desplazar hacia la izquierda la coma decimal tantas posiciones como indique el exponente. Por ejemplo:

$$17{,}38567 \cdot 10^2 = 1734{,}567$$

Con el convenio que hemos establecido, usaríamos las potencias de base 10 para dejar una única cifra en la parte entera del número decimal:

$$1{,}738567 \cdot 10^3$$

Y dejamos dos cifras decimales redondeadas:

$$1{,}74 \cdot 10^3$$

Apliquemos estos conocimientos matemáticos al trabajo con unidades científicas.

Supongamos que tenemos 2.340,26 metros y deseamos pasar a milímetros. Sabemos que para pasar de metros a milímetros debemos multiplicar por 1.000.

$$2.340{,}26\, m \cdot 10^3 = 2.340.260\, mm$$

Dejamos una única cifra en la parte entera:

$$2{,}340.260 \cdot 10^6\, mm$$

Y redondeamos a dos cifras decimales:

$$2{,}34 \cdot 10^6\, mm$$

PARA PENSAR 10. Ahora es tu tiempo para practicar. Realiza las operaciones de manera ordenada para pasar las siguientes cantidades a la unidad de referencia del S.I. correspondiente, siguiendo el convenio de notación científica que hemos establecido. La unidad de referencia viene indicada entre paréntesis.

- $421\, hm\, (m)$
- $56{,}3\, cm\, (m)$
- $1.324\, g\, (kg)$
- $3{,}25\, h\, (s)$
- $234{,}56\, km^2 (m^2)$
- $0{,}37\, hm^3 (m^3)$

1.7. Sensibilidad de un instrumento de medida

Un instrumento de medida es un aparato que ofrece el valor de una magnitud física. Por ejemplo: un cronómetro mide el tiempo, una balanza mide la masa y una regla mide la longitud.

El valor más pequeño que puede medir un instrumento de medida se llama sensibilidad.

En una regla como la que usas en clase, la sensibilidad es de 1 mm. Eso significa que no puedes medir cantidades inferiores al milímetro.

El cronómetro que suele aparecer en los relojes de pulsera o en los teléfonos móviles tiene sensibilidad de 1 cs. Es decir, no pueden medir tiempos más pequeños que la centésima de segundo.

Cuando realicemos una medida con un instrumento, siempre, siempre, siempre, siempre, siempre, deberemos indicar la sensibilidad del aparato.

Aquí tienes unos ejemplos:

- Tiempo: 46,53 ± 0,01 s (cronómetro con sensibilidad de la centésima de segundo)
- Masa: 236,7 ± 0,1 g (balanza con sensibilidad del decigramo)
- Longitud: 23,1 ± 0,1 cm (regla con sensibilidad del milímetro)

Incluso si las cifras decimales de la medida son iguales a cero, se escriben explícitamente.

- Tiempo: 36,00 ± 0,01 s

Además, la sensibilidad se puede escribir en función de distintas unidades.

- Longitud: 17,1 ± 0,1 cm o bien podemos escribir 171 ± 1 mm

1.8. Diferencia entre medidas precisas y medidas exactas

Cuando un conjunto de medidas experimentales están muy próximas entre sí, decimos que esas medidas son muy precisas. Por ejemplo: lanzamos dardos a una diana, y todos los dardos quedan muy cerca uno del otro. Diremos que nuestros lanzamientos son muy precisos.

Si el conjunto de medidas está muy próximo del valor que se considera verdadero, decimos que esas medidas son muy exactas. Por ejemplo: lanzamos dardos a una diana, y todos los dardos quedan muy cerca del centro. En este caso diremos que nuestros lanzamientos son muy precisos (por estar muy cerca unos de otro) y también muy exactos (por estar cercanos al centro de la diana).

1.9. Errores en la medida

Siempre que medimos cometemos errores.

Los errores instrumentales son los errores provocados por los aparatos de medida. La sensibilidad de un aparato es un tipo de error instrumental. La mala fabricación de un aparato es otro tipo de error experimental, llamado error de fabricación. Y si hay piezas que funcionan mal en aparatos más complejos (como una balanza o un termómetro electrónico), tendremos un error de calibrado.

Y hay errores sistemáticos, que no dependen de los instrumentos de medida. Los errores sistemáticos dependen de las condiciones ambientales donde se realiza el experimento y dependen del observador. Si, por ejemplo, mido el tiempo de caída de una pelota desde una ventana y hay viento, la influencia del viento no la puedo controlar y alterará el resultado de las medidas. Y si una persona debe pulsar el botón de inicio y de parada del cronómetro, siempre habrá un tiempo de retardo en la acción de pulsar los botones.

1.10. Concepto de valor medio

Para reducir la influencia de los errores en la toma de medidas, se realizan muchas repeticiones de las medidas experimentales. Si repitiésemos todas las medidas muchas, muchas, muchas veces, la influencia de los errores en el resultado final sería cada vez menor, ya que son consecuencia de fenómenos aleatorios.

Pero si repetimos el experimento muchas veces… ¿con qué valor de las medidas nos quedamos? ¿Con la primera medida? ¿Con la última? ¿Con una que elijamos al azar?

El convenio que siguen los científicos de todo el mundo es realizar la media aritmética: sumar todas las medidas y dividir por el número total de medidas realizadas.

Por ejemplo, si tengo el siguiente conjunto de medidas temporales:

- 46,53 ± 0,01 s
- 45,41 ± 0,01 s
- 45,89 ± 0,01 s
- 46,86 ± 0,01 s

La media resultará:

$$tiempo\ medio = \frac{46{,}53 + 45{,}51 + 45{,}89 + 46{,}86}{4}$$

$$tiempo\ medio = 46{,}20\ s$$

Fíjate que en la media ya no incluimos la sensibilidad del cronómetro, porque la media es el fruto de una operación matemática y no de una medición directa con un aparato. Esto no significa que la media no tenga error. Pero el estudio de cómo se propaga el error de las medidas al valor de la media no lo vamos a estudiar en este curso.

Sí es importante que te fijes en que dejamos la media con un máximo de dos cifras decimales redondeadas (convenio notación científica). Y no olvides situar la unidad tras el número calculado para la media.

¿Es la media un buen representante de las medidas experimentales?

Esta respuesta se responde con estadística, y por ahora no vamos a adentrarnos en esa rama de la matemática. Pero sí es importante que entiendas que valores que han sido muy precisos (muy próximos entre sí) están mejor representados por la media que valores que han sido poco precisos (muy alejados entre sí).

UNIDAD 2. Comprendemos y organizamos la información. Leer te cambia la vida

Evaluación: Primera

Temporalidad: 3 semanas

Número de sesiones: 9 horas

Actividades de evaluación:

- T.E.C.A. (Trabajo Escrito Con Apuntes)
- Cuaderno
- Programación robótica
- Exposición oral
- Simulación con software matemático
- Respuesta oral a preguntas
- Producto audiovisual digital
- Trabajo diario

Breve resumen de la situación: Leer de manera comprensiva es fundamental en el desarrollo de cualquier persona. Fomentar el amor por la lectura es uno de los mejores legados que puede ofrecer la escuela.

Los alumnos de 2ºESO deben organizar una "lectura teatralizada" sobre el libro de lectura de clase, para estimular la curiosidad por las historias y los libros sobre ciencia. Además trabajaremos la exposición oral y manipulativa de contenidos científicos, dirigido a alumnos de Primaria.

Alternamos trabajo individual con trabajo grupal a lo largo de las distintas sesiones.

No hay solución única al reto que se plantea. Pero sí hay lecturas teatralizadas y exposiciones mejores organizadas que otras, con un guion más elaborado que otras y con una ejecución más clara, acertada y pedagógica que otras.

2. ¿Qué necesitamos saber previamente?

2.1. Concepto de Ciencia

La Ciencia es el conjunto de conocimientos objetivos y verificables experimentalmente que el ser humano posee sobre la naturaleza y la sociedad de la que forma parte.

2.2. ¿Qué es un dato objetivo verificable experimentalmente?

Un dato objetivo significa que no es inventado por el ser humano y que no es creado ni por sus opiniones ni por sus sentimientos.

Un dato verificable experimentalmente significa que puedo realizar un experimento para comprobar su validez.

Por lo tanto, un dato objetivo verificable experimentalmente es todo aquella afirmación que se puede demostrar gracias a un experimento que no depende de la ideología ni de los prejuicios de los científicos que lo realizan.

2.3. Fases del método científico

El método científico es el proceso que siguen los científicos para dar respuesta a sus interrogantes o hipótesis.

Una hipótesis es una idea inicial que debemos determinar si es verdadera o falsa, con ayuda de un montaje experimental.

Los pasos ordenados que definen el método científico son:

1. **Observación inicial ante algo que nos resulta curioso**. Algo despierta nuestra curiosidad y lo analizamos. Si es algo sensorial, lo tocamos, lo miramos y lo medimos. Si no lo tenemos delante de nosotros, pensamos en él y nos lo imaginamos mentalmente. La observación debe ser detenida y concisa. Si no nos planteamos preguntas iniciales interesantes, las conclusiones serán malas y de poca importancia.
2. **Hipótesis**. Es la explicación que se le da al hecho o fenómeno observado, antes de realizar cualquier comprobación experimental. Puede haber varias hipótesis para un mismo acontecimiento. Las hipótesis tienen que ser sometidas a experimentación para confirmar su veracidad o falsedad.
3. **Experimentación**. Los experimentos nos permiten probar la validez de las hipótesis planteadas o descartarlas, parcialmente o en su totalidad. Miden valores objetivos y medibles de nuestra realidad a estudiar. Un experimento debe ser claro, de tal forma que cualquier científico que lo desee pueda seguir los pasos que indiquemos para reproducirlo.
4. **Conclusiones tras estudiar los resultados experimentales (teorías científicas)**. Se establecen conclusiones a partir de aquellas hipótesis con más probabilidad de confirmarse como ciertas a la luz de los resultados obtenidos en el laboratorio. Una conclusión o teoría científica está formada por un conjunto de afirmaciones que responden a los interrogantes de la observación inicial.
5. **Ley**. Una conclusión o teoría se convierte en ley cuando científicos de todas las partes del mundo, y durante varios años, confirman experimentalmente las mismas hipótesis.

The scientific method – Rap

Watch the video below and fill in the blanks with the lyrics of the song (teacher will give you a document to complete the blanks).

https://www.youtube.com/watch?v=DChofjUH488

The song describes the scientific method phases:

- Observe
- Hypothesize
- Experiment
- Analyze
- Report: It is a scientific paper that explains the conclusions to scientists from all over the world. It is a requisite for the conclusions to become universal law.

2.4. Error absoluto

En toda medida experimental aparecen errores. Imagina que científicos de todo el mundo han establecido una ley científica. Por ejemplo: el cociente entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro se conoce como número pi, y su valor es igual a 3,141592… infinitos decimales sin repetición. Y tú realizas un experimento para confirmar los primeros cuatro decimales del número pi.

El valor asumido por los científicos de todo el mundo se denomina “valor verdadero” o “valor teórico”. Si redondeamos a la cuarta cifra decimal, el “valor teórico” del número pi será el famoso 3,1416.

El valor que obtienes en tu experimento se conoce como “valor experimental”. ¿Cómo medir de forma objetiva si tu “valor experimental” está próximo del “valor teórico”? Con el concepto de error absoluto.

El error absoluto es la diferencia, en valor absoluto, entre el “valor teórico” y el “valor experimental”.

$$Error\ absoluto: E = |Valor\ teórico - Valor\ experimental|$$

Recuerda: el valor absoluto convierte en positivo los resultados que son negativos.

Por ejemplo: si tu “valor experimental” es 3,1523 el error absoluto cometido será:

$$E = |3{,}1416 - 3{,}1523|$$

$$E = |-0{,}0107|$$

$$E = 0{,}0107$$

Si dos científicos realizan dos experimentos para determinar el valor del número pi, el que haya cometido un error absoluto más pequeño será el que habrá realizado un experimento más exacto (es decir, más cercano al valor considerado como verdadero).

En el ejemplo que acabamos de resolver, el valor del número pi no tiene unidades. Pero si el experimento diese como resultado una magnitud física (con su número y su unidad de referencia), el valor del error absoluto también debe ir acompañado de la unidad correspondiente.

2.5. Error relativo

El error relativo es el porcentaje de error que ha cometido nuestro experimento al compararlo con el valor teórico. Es costumbre dar este porcentaje de error en tanto por ciento.

$$error\ relativo: e = \frac{Error\ absoluto}{valor\ teórico} \times 100\%$$

Siguiendo con el ejemplo del apartado anterior, donde ya habíamos calculado el error absoluto de un experimento sobre el número pi, podemos operar de la siguiente forma:

$$e = \frac{0{,}0107}{3{,}1416} \cdot 100\%$$

$$e = 0{,}003406 \cdot 100\%$$

$$e = 0{,}34\ \%$$

Donde hemos escrito el resultado con dos cifras decimales redondeadas. En los porcentajes del error relativo no es costumbre utilizar potencias de base 10 para expresar el resultado final. El error relativo es un porcentaje, por lo tanto no tiene unidades.

Si dos científicos realizan dos experimentos totalmente distintos (por ejemplo, uno busca determinar el valor del número pi y otro busca calcular el radio del planeta Tierra), ¿cómo podemos saber cuál de los dos ha sido más exacto en su trabajo? Con ayuda del error relativo.

Dados dos experimentos completamente distintos uno del otro, el que tenga menor error relativo será el experimento más exacto de los dos (es decir, más próximo al valor considerado como verdadero).

2.6. Ejemplo para comprender el método científico y el cálculo de errores: el número pi

Como aplicación del método científico vamos a obtener, con material manipulativo, una aproximación numérica al número pi.

Es posible que en cursos anteriores te hayan informado de que pi es igual a 3,1415… (infinitos decimales) y que es un número relacionado con el perímetro de la circunferencia. Y también es muy posible que esta información haya quedado en un dato teórico y no lo hayas comprobado experimentalmente. Ahora es el momento de comprobar, con una sencilla experiencia, la veracidad de este dato.

Asumimos como "valor verdadero" o "valor teórico" la cantidad 3,1416 (redondeando al cuarto decimal). Y diseñamos un "experimento" que confirme ese valor. No estamos planteando ninguna hipótesis, porque asumimos como cierto el valor del número pi que lleva miles de años siendo estudiado por científicos y matemáticos de todos los rincones del planeta.

El experimento debe indicar claramente los pasos que deben seguirse y los materiales que se van a utilizar.

Siempre habrá errores. Ya hemos reflexionado sobre esto. No esperes obtener el valor del número pi, con cuatro decimales, sin ningún margen de error, utilizando materiales caseros como los que vamos a emplear.

Actividad manipulativa para obtener el número pi a partir del perímetro de una circunferencia

El número pi es la relación entre el perímetro de la circunferencia y su diámetro.

Da igual el tamaño de la circunferencia. El número pi siempre aparece.

$$\frac{Perímetro}{Diámetro} = \pi$$

¡Vamos a comprobarlo!

Rodea con un hilo el cilindro que te ha entregado el profesor. Y con ayuda de una regla mide la longitud de la parte de hilo que has utilizado para rodear el cilindro. Ese valor es el perímetro de la circunferencia.

Para calcular el diámetro puedes encajar el cilindro entre dos policubos paralelos y medir directamente la distancia de separación entre los policubos.

Dividiendo directamente el valor del perímetro entre el valor de diámetro tendrás una estimación experimental del número pi. Trabaja con las mismas unidades en las dos medidas (o bien todo en centímetros o bien todo en milímetros).

La siguiente animación de Geogebra es otra forma de "visualizar" el valor del perímetro de la circunferencia.

https://www.geogebra.org/m/VdVgERYy#material/ezcmWNjn

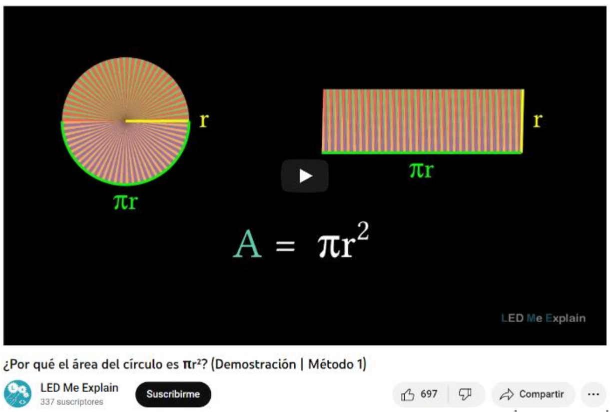
Actividad manipulativa para obtener el área de un círculo dividiéndolo en triangulitos.

El siguiente vídeo del canal "LED Me Explain" y la animación Geogebra muestran de manera muy visual el área de un círculo.

https://www.youtube.com/watch?v=qMoP0LAhbkc

https://www.geogebra.org/m/VdVgERYy#material/ryXkqHrR

Un círculo de radio r tiene por área el producto del número pi por el radio al cuadrado. Vamos a comprobarlo, "convirtiendo" la forma del círculo en la forma de un rectángulo (que está formado, a su vez, por triángulos). Obtendremos el área de ese rectángulo simplemente multiplicando su base por su altura.



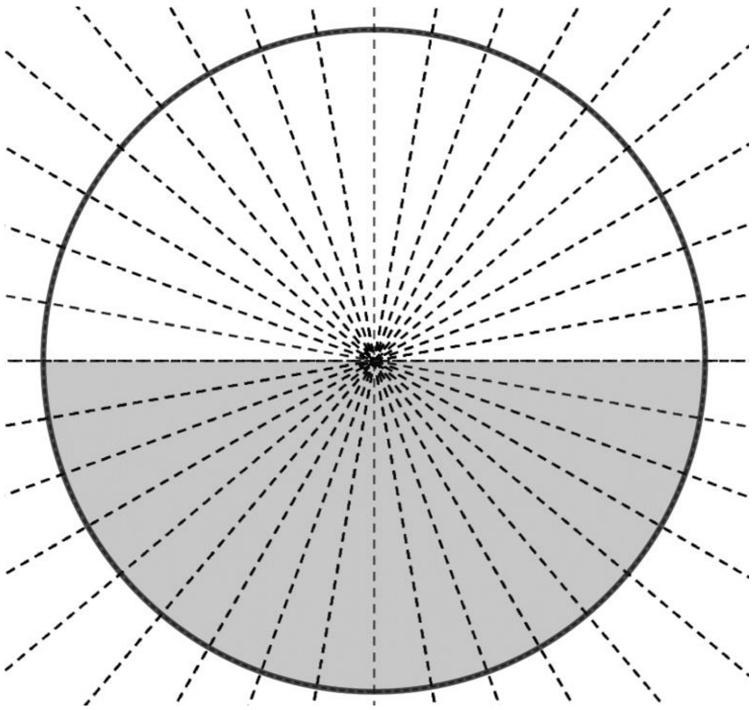
Es muy importante que nos acostumbremos a tomar nota de los vídeos que vemos y sacar ideas claras. De nada sirve ver un vídeo si después… no nos acordamos o no hemos comprendido nada. Si algo no lo comprendes, pregunta al profesor, por favor.

En primer lugar, necesitamos dibujar una circunferencia que dividiremos en partes iguales con rectas que pasen por su centro. La parte inferior de la circunferencia la sombreamos de color gris, dejando la parte superior de color blanco.

En segundo lugar, recordamos el dato que confirmamos con material manipulativo en el apartado anterior: el valor del perímetro de una circunferencia es igual al número pi multiplicado por el diámetro. O lo que es lo mismo: $\pi \cdot 2 \cdot radio$.

Tras recortar convenientemente el círculo, llegaremos a un rectángulo de base $\pi \cdot radio$ y altura igual al $radio$. Y al multiplicar la base por la altura obtendremos la fórmula del área del círculo:

$$Área\ del\ círculo = \pi \cdot radio^2.$$



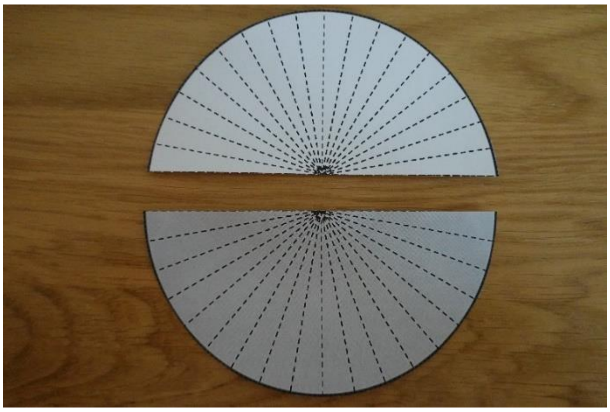
El profesor te entregará una fotocopia del diámetro del círculo superior, con un diámetro de $13{,}3 \pm 0{,}1$ cm. Por lo tanto, el radio será 6,65 cm. El área del círculo será:

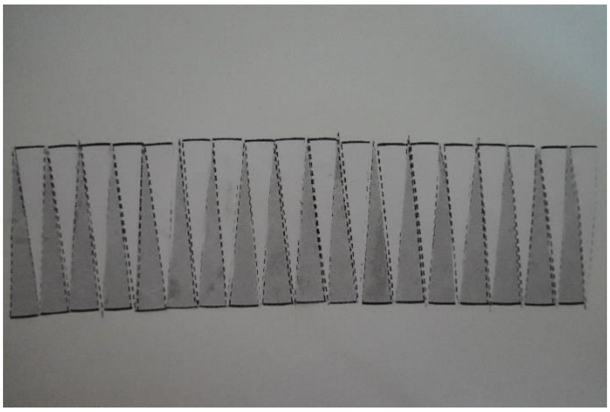
$$Área\ del\ círculo = \pi \cdot radio^2$$

$$Área\ del\ círculo = \pi \cdot (6{,}65)^2$$

$$Área\ del\ círculo = 138{,}93\ cm^2$$

El método experimental para aproximar este valor del área del círculo es el siguiente. Con unas tijeras, recortamos el círculo por la mitad. También cortamos por encima de las líneas discontinuas. Quedarán 18 “triángulos curvos” de color gris y 18 “triángulos curvos” de color blanco.





Con paciencia, y con pegamento, formamos un "rectángulo" alternando triángulos grises y blancos. Con una regla medimos la base y la altura del rectángulo. El área de este rectángulo es una "buena aproximación" al área del círculo.

$$\text{Área del círculo } \approx \text{Área del rectángulo} = \text{base} \cdot \text{altura}$$

El resultado final de las operaciones será nuestra estimación al valor teórico del área de $138{,}93\ cm^2$.

PARA PENSAR 1. ¿Cómo obtendrías el error absoluto de tu experimento sobre el área del círculo? ¿Tiene sentido obtener la media de las áreas de toda la clase para reducir el error experimental?

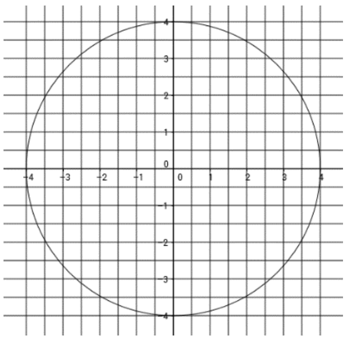
Actividad manipulativa para relacionar el área de un cuadrado con el área del círculo inscrito

Ya sabemos y "hemos visto" que el área de un círculo es igual a:

$$\text{Área del círculo} = \pi \cdot \text{radio}^2$$

Vamos a seguir trabajando con esta fórmula y vamos a calcular la relación que existe entre el área de un cuadrado y el área de un círculo contenido en su interior (y que corta una sola vez a cada lado del cuadrado).

Imagina un círculo de radio 4 unidades y con el centro en el origen de coordenadas formado por dos ejes perpendiculares entre sí. Trazamos líneas verticales y horizontales separadas una misma distancia. La separación entre líneas paralelas va a ser de 0,5 unidades.

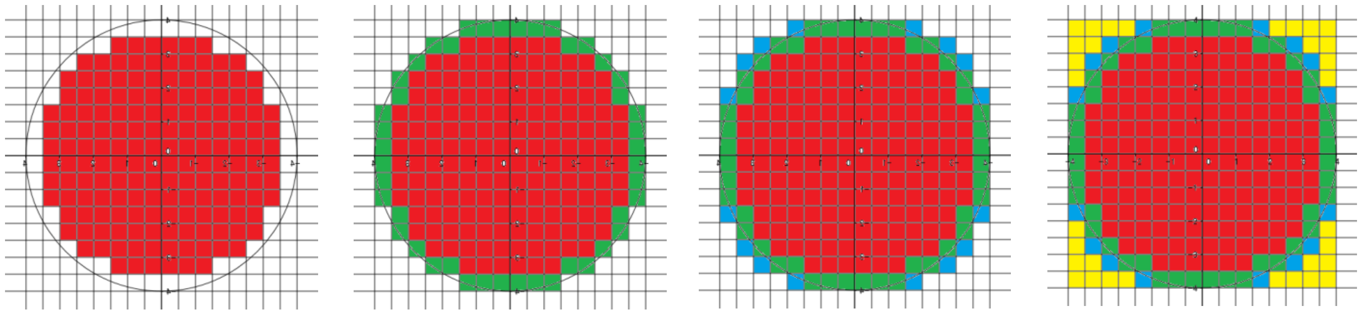


Vamos a colorear en rojo todos los cuadraditos que estén contenidos por completo dentro del círculo.

Coloreamos en verde aquellos cuadraditos que tienen partes dentro y fuera del círculo, pero que la mayor parte queda dentro del círculo.

En azul indicamos los cuadraditos que tienen partes dentro y fuera del círculo, pero que la mayor parte queda fuera del círculo.

Y en amarillo coloreamos los cuadraditos que están por completo fuera del círculo, hasta completar un gran cuadrado exterior que tenga 8 unidades de base y 8 unidades de altura.



PARA PENSAR 2. ¿Cuántos cuadraditos hay de cada color? Fíjate que la figura posee simetría, lo cual facilita el cálculo final de cuadraditos de cada color.

En las imágenes vemos claramente que el radio del círculo es igual a 4 unidades. Por lo tanto, el diámetro es de 8 unidades (dos veces el radio).

El lado del cuadrado exterior coincide con el diámetro del círculo. Por lo tanto:

$$lado\ del\ cuadrado = 2 \cdot radio$$

Sabemos bien que el área de un cuadrado es el producto de sus lados:

$$\acute{A}rea\ del\ cuadrado = (2 \cdot radio) \cdot (2 \cdot radio)$$

$$\acute{A}rea\ del\ cuadrado = 4 \cdot radio^2$$

Si dividimos el área del cuadrado entre el área del círculo, nos queda:

$$\frac{\acute{A}rea\ del\ cuadrado}{\acute{A}rea\ del\ c\acute{\imath}rculo} = \frac{4 \cdot radio^2}{\pi \cdot radio^2}$$

Como en el numerador hay un producto y en el denominador también hay un producto, podemos simplificar lo que se repite (factor común). Y llegamos a la relación:

$$\frac{\acute{A}rea\ del\ cuadrado}{\acute{A}rea\ del\ c\acute{\imath}rculo} = \frac{4}{\pi}$$

Si consideramos el valor teórico del número pi con cuadro decimales igual a 3,1416, el cociente quedará:

$$\frac{\acute{A}rea\ del\ cuadrado}{\acute{A}rea\ del\ c\acute{\imath}rculo} = \frac{4}{3{,}1416} \approx 1{,}27 \ldots$$

PARA PENSAR 3. Si en el numerador y en el denominador hubiésemos tenido una suma del tipo $\frac{4 + radio^2}{\pi + radio^2}$, ¿podríamos haber simplificado, eliminando arriba y abajo lo que se repite?

El área del cuadrado exterior es igual a la suma de las áreas de todos los cuadraditos coloreados: 16 x 16 = 256 cuadraditos. El área del círculo se puede aproximar de dos formas:

- Sumar las áreas de los cuadraditos rojos y verdes: 208 cuadraditos
- Sumar las áreas de los cuadraditos rojos, verdes y azules: 224 cuadraditos

Así podremos realizar dos divisiones entre áreas para poder aproximar el valor teórico 1,27. Como el área de cada cuadradito es la misma, independientemente de su color, la división entre áreas se reduce a dividir simplemente número de cuadraditos.

$$\frac{Número\ de\ cuadraditos\ totales}{Número\ de\ cuadraditos\ rojos\ y\ verdes} = \frac{256}{208}$$

$$Aproximación\ del\ valor\ \frac{4}{\pi} \approx 1{,}23\ldots$$

$$Error\ absoluto = |1{,}27 - 1{,}23| = 0{,}04$$

$$error\ relativo = \frac{0{,}04}{1{,}27} \times 100\% = 3{,}15\%$$

$$\frac{Número\ de\ cuadraditos\ totales}{Nº\ de\ cuadraditos\ rojos, verdes\ y\ azules} = \frac{256}{224}$$

$$Aproximación\ del\ valor\ \frac{4}{\pi} \approx 1{,}14\ldots$$

$$Error\ absoluto = |1{,}27 - 1{,}14| = 0{,}13$$

$$error\ relativo = \frac{0{,}13}{1{,}27} \times 100\% = 10{,}24\%$$

PARA PENSAR 4. Viendo los errores, la aproximación con los cuadraditos rojos y verdes es más exacta que la aproximación con los cuadraditos rojos, verdes y azules. ¿Cómo podríamos mejorar este método para conseguir una menor tasa de error y obtener así resultados más exactos?

2.7. Divisores de un número. Concepto de máximo común divisor

Piensa en dos números naturales. Al primero lo llamamos D y al segundo lo llamamos d.

Si al dividir $\frac{D}{d}$ el resto es 0, decimos que d es un divisor de D. No sacamos decimales en la división.

Si tenemos D=10 y d=2, decimos que 2 es un divisor de 10 porque la división $\frac{10}{2}$ es exacta (cociente 5 y resto 0).

Si tenemos D=11 y d=4, el número 4 no es un divisor de 11 porque la división $\frac{11}{4}$ no es exacta (cociente 2 y resto 3).

Desde Primaria conocemos muchas reglas de divisibilidad:

- Un número siempre es divisible por sí mismo y por 1.
- Todos los números pares son divisibles por 2.
- Todos los números cuyas cifras sumen un múltiplo de 3 son divisibles por 3.
- Todos los números que terminan en 0 o en 5 son divisibles por 5.

En el siguiente recurso online encontrarás una sencilla animación para visualizar el concepto de divisibilidad.

Debes repartir los vasos entre los camareros, de tal forma que todos los camareros lleven el mismo número de vasos.

Si al final no quedan vasos en la estantería, significará que la división es exacta.

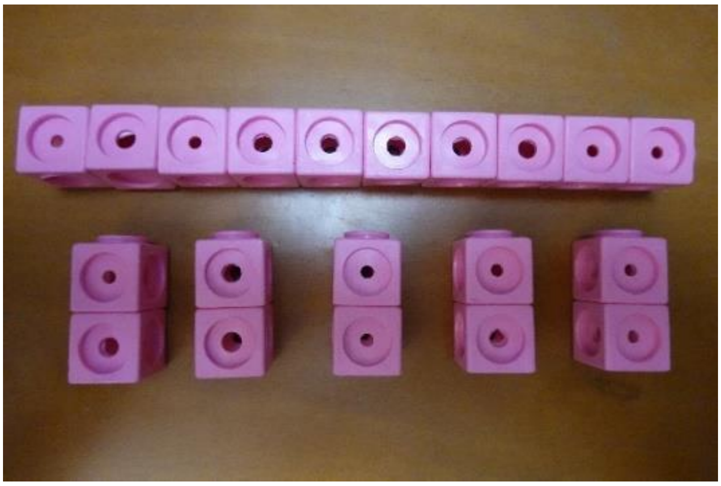
https://www.geogebra.org/m/GvFnhxVG

Si, por ejemplo, hay 10 vasos, verás que los divisores de 10 son $\{1, 2, 5, 10\}$.

Actividad manipulativa para comprender el concepto de divisor: policubos

Con policubos es muy sencillo visualizar el concepto de divisor. Si simbolizas un número “D” como una torre con “D” policubos, los divisores de “D” coincidirán con aquellos números “d” en los que se pueda separar en partes iguales los policubos.

Por ejemplo: el número 10 se representa por una torre de 10 policubos, como muestra la siguiente imagen.



Esa torre se puede “romper” en 5 trozos iguales (cada trozo, formado por 2 policubos). Por lo tanto, el número 5 es un divisor del número 10.

¿Por qué 6 no es divisor de 10? Porque es imposible separar los 10 policubos en 6 grupos con el mismo número de policubos.

¿Por qué 4 no es divisor de 10? Porque es imposible separar los 10 policubos en 4 grupos con el mismo número de policubos.

Concepto de M.C.D. de dos o más números

El máximo común divisor (M.C.D.) de un conjunto de números es el divisor más grande que sea común a todos los números.

Por ejemplo, si tenemos los números 8, 16 y 20, los divisores de cada uno serán:

$$divisores\ de\ 8: \{1, 2, \mathbf{4}, 8\}$$

$$divisores\ de\ 16: \{1, 2, \mathbf{4}, 8, 16\}$$

$$divisores\ de\ 20: \{1, 2, \mathbf{4}, 5, 10, 20\}$$

Tal y como aparece resaltado en rojo, el número 4 es el divisor común más grande. Conclusión: 4 es el M.C.D. de la terna de valores 8, 16 y 20.

Factorizar con números primos y obtener M.C.D. con policubos

¿Qué era un número primo? Aquel que solo tiene dos divisores: el 1 y el propio número. ¡Ojo! El número 1 no es primo porque no tiene dos divisores distintos.

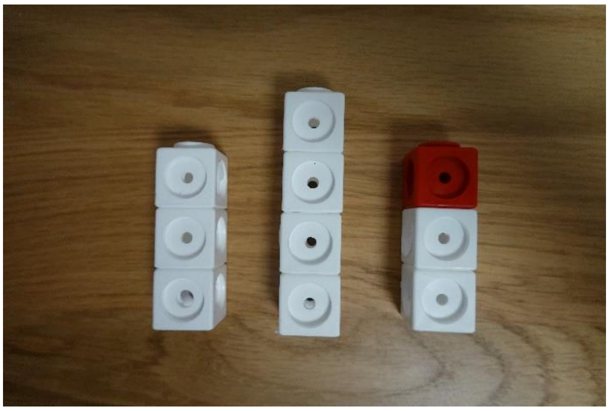
Cualquier número entero que no sea primo, salvo el 1, puede escribirse como un producto de factores primos. Podemos usar policubos para expresar estos factores primos. Y con policubos podemos obtener, también, el M.C.D. de un conjunto de números.

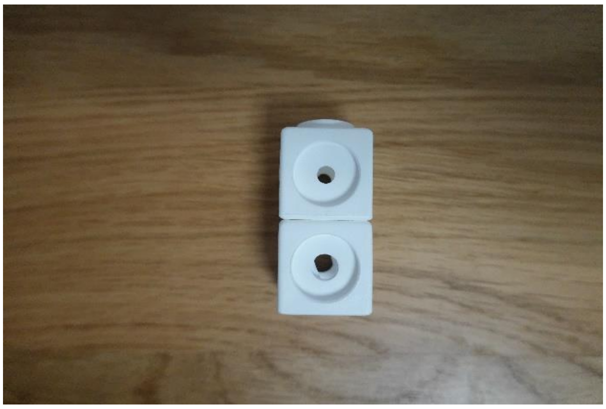
Los policubos que tenemos en clase están organizados en 10 colores. Estos 10 colores los vamos a relacionar con los 10 primeros números primos.

Blanco	Rosa	Rojo	Naranja	Amarillo	Verde claro	Verde oscuro	Azul	Marrón	Negro
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29

Así, los números 8, 16 y 20 pueden "expresarse" de la siguiente forma:

- 8 = Blanco x Blanco x Blanco (2 x 2 x 2)
- 16 = Blanco x Blanco x Blanco x Blanco (2 x 2 x 2 x 2)
- 20 = Blanco x Blanco x Rojo (2 x 2 x 5)





EL M.C.D. es el divisor común más grande. Con policubos el M.C.D. significa escoger solo los colores que se repitan en todos los números y con la menor repetición posible (para que esa cantidad sea común a todos los números). En las imágenes superiores tenemos la representación, con policubos, de los números 8, 16 y 20:

- El color blanco se repite en las tres torres y aparece dos veces en la primera torre (número 8), cuatro veces en la segunda torre (número 16) y dos veces en la tercera torre (número 20).
- El color rojo no se repite en las tres torres.

$$M.C.D.(8, 16, 20) = Blanco\ x\ Blanco$$

$$M.C.D.(8, 16, 20) = 2 \times 2$$

$$M.C.D.(8, 16, 20) = 4$$

Solo cuando ya tengas claro cómo razonar con policubos para sacar el valor del M.C.D., utiliza la "receta" que te permite acortar tiempo en el cálculo del máximo común divisor, usando factores primos: el M.C.D. de un conjunto de números es igual al producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente.

Es decir, volviendo a nuestro ejemplo anterior:

$$8 = 2^3$$

$$16 = 2^4$$

$$20 = 2^2 \times 5$$

¿Qué factores primos aparecen en la descomposición de los tres números? Solo el número 2 aparece en todas las descomposiciones. El 5 solo aparece en el tercer número.

¿Mínima potencia en la que aparece el factor 2? Al cuadrado.

¿Valor del máximo común divisor? $M.C.D.(8, 16, 20) = 2^2 = 4$

PARA PENSAR 5. ¿Qué ocurre si no hay factores primos comunes a todos los números? Con otras palabras, ¿qué ocurre si no hay un color que sea común a todos los números? ¿Valdría 0 el M.C.D.?

Para un conjunto grande de números, o para cantidades muy altas, el proceso puede ser algo tedioso. Por lo que siempre es bueno tener a mano una calculadora online de M.C.D. para comprobar nuestras operaciones:

https://es.calcuworld.com/calculadoras-matematicas/mcd

¡Ojo! Estos recursos online son una herramienta rápida para comprobar resultados. Pero nunca, nunca, nunca, nunca, pueden sustituir al proceso personal de comprender lo que se está estudiando.

De nada serve pulsar un botón para calcular el M.C.D. si no sabemos que significa verdaderamente el M.C.D.

2.8. Múltiplos de un número. Concepto de mínimo común múltiplo

Piensa nuevamente en dos números naturales. Al primero lo llamamos "m" y al segundo lo llamamos "M".

Decimos que "M" es múltiplo de "m" si el número "m" está contenido un número exacto de veces dentro de "M".

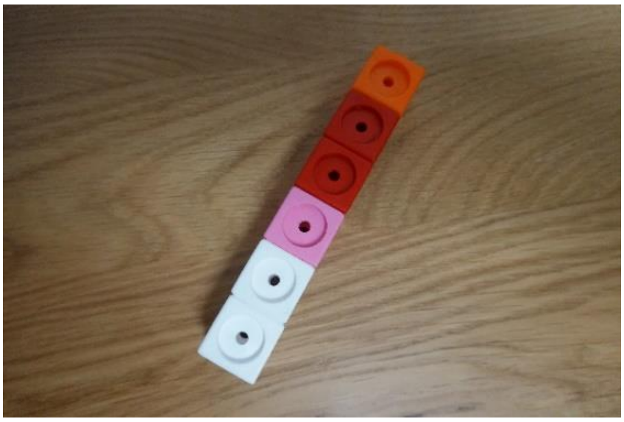
Los múltiplos son como las tablas de multiplicar.

Por ejemplo, los múltiplos de m=3 son los números 3, 6, 9, 12, 15, 18, etc. porque si hacemos "una vez tres" obtenemos 3, si hacemos "dos veces tres" obtenemos 6, si hacemos "tres veces tres" obtenemos 9, si hacemos "cuatro veces tres" obtenemos 12, si hacemos "cinco veces tres" obtenemos 15, etc.

Factorizar con números primos y obtener m.c.m. con policubos

Por ejemplo, los números 12, 25 y 70 pueden "expresarse" con nuestro código de colores de policubos:

- 12 = Blanco x Blanco x Rosa (2 x 2 x 3)
- 25 = Rojo x Rojo (5 x 5)
- 70 = Blanco x Rojo x Naranja (2 x 5 x 7)



El mínimo común múltiplo de un conjunto de números es el múltiplo más pequeño que sea común a todos los números.

Mirando los policubos de colores de la imagen superior, podemos obtener el m.c.m. de los números 12, 25 y 70 quedándonos con todos los colores y con la mayor repetición que aparezca en alguna torre. De esta forma todos los números de partida estarán contenidos en el m.c.m.

- El blanco aparece hasta dos veces en la primera torre y una sola vez en la tercera torre.
- El rosa aparece una sola vez en la primera torre.
- El rojo aparece hasta dos veces en la segunda torre y una sola vez en la tercera torre.
- El naranja aparece una sola vez en la tercera torre.

$$m.c.m.(12, 25, 70) = Blanco\ x\ Blanco\ x\ Rosa\ x\ Rojo\ x\ Rojo\ x\ Naranja$$

$$m.c.m.(12, 25, 70) = 2\ \times\ 2\ \times\ 3\ \times\ 5\ \times\ 5\ \times\ 7$$

$$m.c.m.(12, 25, 70) = 2.100$$

PARA PENSAR 6. ¿Qué pasaría, en el ejemplo anterior, si el color blanco lo cogemos tres veces en vez de dos (dos veces de la primera torre y una vez de la tercera torre) y el color rojo lo cogemos tres veces en vez de dos (dos veces de la segunda torre y una vez de la tercera torre)? ¿El resultado final seguiría siendo un múltiplo de 12, 25 y 70?

Y ahora sí, **una vez que hemos "visualizado" con colores y policubos el significado del múltiplo común más pequeño posible, podemos dar el paso a la típica "receta" para acortar tiempo: el m.c.m. es igual al producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente**. Es decir:

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$25 = 5^2$$

$$70 = 2 \times 5 \times 7$$

¿Factores primos que aparecen en la descomposición de los tres números? Ninguno.

¿Factores primos que no son comunes a la descomposición de los tres números? 2, 3, 5 y 7.

¿Máxima potencia en la que aparece el factor 2? Al cuadrado.

¿Máxima potencia en la que aparece el factor 3? Elevado a uno.

¿Máxima potencia en la que aparece el factor 5? Al cuadrado.

¿Máxima potencia en la que aparece el factor 7? Elevado a uno.

¿Valor del mínimo común múltiplo? $m.c.m.(12, 25, 70) = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 2.100$

Con el tiempo, nos acostumbraremos a razonar rápido con números primos. Mientras llega ese momento, sigamos razonando con los policubos de colores el tiempo que necesitemos.

Puedes practicar con los números (y policubos) que desees. Sabiendo que los diez colores de los policubos "solo" llegan hasta el número primo 29. Para números grandes, puedes usar la siguiente calculadora online de m.c.m:

https://es.calcuworld.com/calculadoras-matematicas/mcm

UNIDAD 3. Posición y tiempo: el Camino de Santiago (Way of Saint James)

Evaluación: Primera

Temporalidad: 3 semanas

Número de sesiones: 9 horas

Actividades de evaluación:

- Cuaderno
- Informe técnico de laboratorio
- Respuesta oral a preguntas
- Producto final de PBL
- Trabajo diario

Breve resumen de la situación: Somos peregrinos del Camino de Santiago. Debemos diseñar nuestras etapas caminando, cumpliendo las condiciones descritas en la situación de aprendizaje.

Alternamos trabajo individual con trabajo grupal a lo largo de las distintas sesiones.

El producto final es presentado por grupos de 2-3 personas en formato A3, donde se resume de manera atractiva y visual cada una de las etapas elegidas que cumplan los requisitos de la descripción. El profesor evaluará uno a uno los productos finales en presencia de los creadores, pudiendo preguntar cualquier cuestión sobre el planteamiento y diseño de la solución presentada.

El producto final es calificado, además, como actividad evaluable de otras asignaturas del currículo, formando así un proyecto de trabajo (PBL).

No hay solución única al reto que se plantea. Pero sí hay propuestas que equilibran mejor la distancia a caminar cada día, el tiempo empleado y el dinero a invertir.

3. ¿Qué necesitamos saber previamente?

3.1. Movimiento rectilíneo

Moverse en línea recta significa moverse en una dimensión. Piensa en un tren que pasa delante de ti y que se mueve a lo largo de una vía recta. O bien se mueve hacia la derecha o bien se mueve hacia la izquierda. No hay más opciones. La línea recta del movimiento del tren es una línea horizontal (paralela al suelo).

Piensa en una pelota que bota contra el suelo. O bien se mueve hacia arriba o bien se mueve hacia abajo. La línea recta del movimiento de la pelota es una línea vertical (perpendicular al suelo).

Tanto el tren como la pelota son ejemplos de movimientos en una dimensión. Cuando un objeto se mueve en línea recta decimos que su movimiento es rectilíneo.

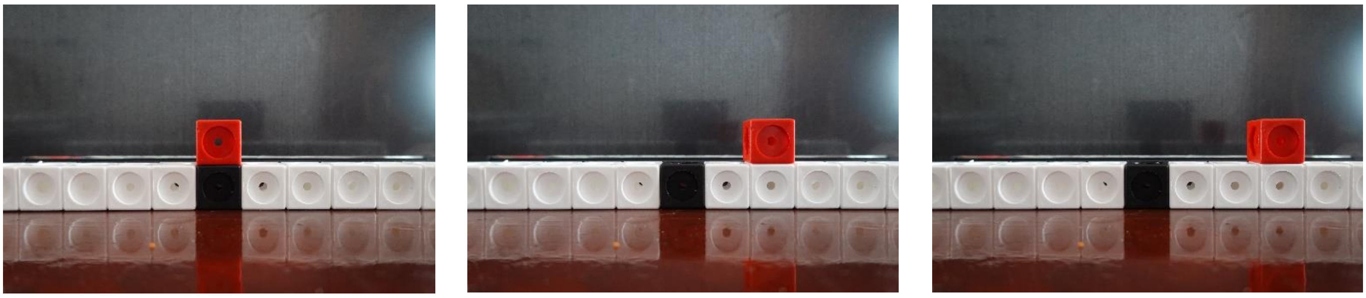
3.2. Sistema de referencia en una dimensión

¿Qué significa moverse? Respuesta intuitiva: cambiar de posición.

Pero ¿qué es la posición? Para entender esa palabra, recurrimos nuevamente a los policubos.

Movimiento en línea recta con policubos

En las siguientes imágenes los policubos blancos marcan la línea recta del movimiento, como si fuesen la vía del tren que antes comentábamos. El policubo de color negro marca la estación de donde sale el tren. El policubo rojo simboliza el tren.



El tren sale de la estación y se desplaza hacia la derecha. El tamaño del policubo es la unidad de longitud.

En la primera imagen, el tren está en la estación.

En la segunda imagen, el tren se ha desplazado dos unidades a la derecha de la estación.

En la tercera imagen, el tren se ha desplazado tres unidades a la derecha de la estación.

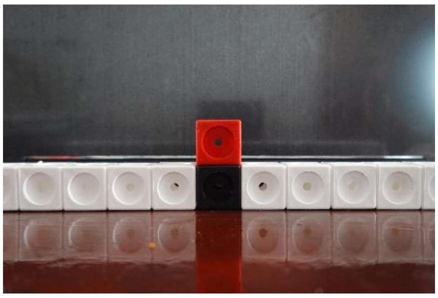
Fíjate en las frases anteriores. Hablamos tomando como referencia “la estación” (el término “referencia” es sinónimo de “sistema de referencia”).

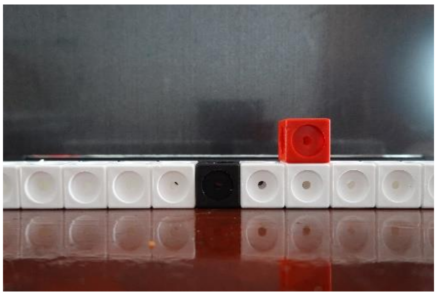
La posición de un objeto indica el lugar que ocupa el objeto respecto de la referencia. Si la posición vale 0 unidades, significa que el objeto está situado en el origen de coordenadas del sistema de referencia.

3.3. ¿Es lo mismo posición que distancia?

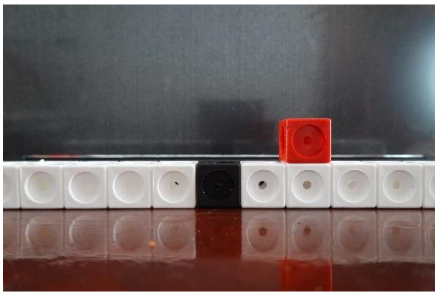
La distancia es la diferencia entre dos posiciones en un sistema de referencia.

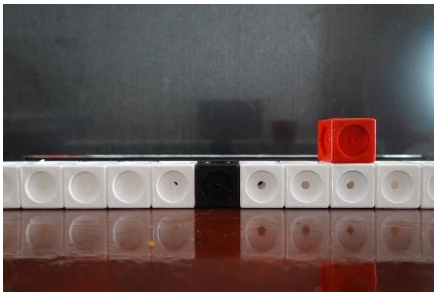
En las dos imágenes de la derecha el origen de coordenadas es la estación marcada en negro.
En la primera, el tren tiene posición 0 unidades. En la segunda, el tren tiene posición 2 unidades.
La distancia entre las dos posiciones es: 2 – 0 = 2 unidades.





Fíjate ahora en estas dos imágenes. El origen de coordenadas vuelve a ser la estación marcada en negro.
En la primera, el tren tiene posición 2 unidades. En la segunda, el tren tiene posición 3 unidades.
La distancia entre las dos posiciones es: 3 – 2 = 1 unidad.





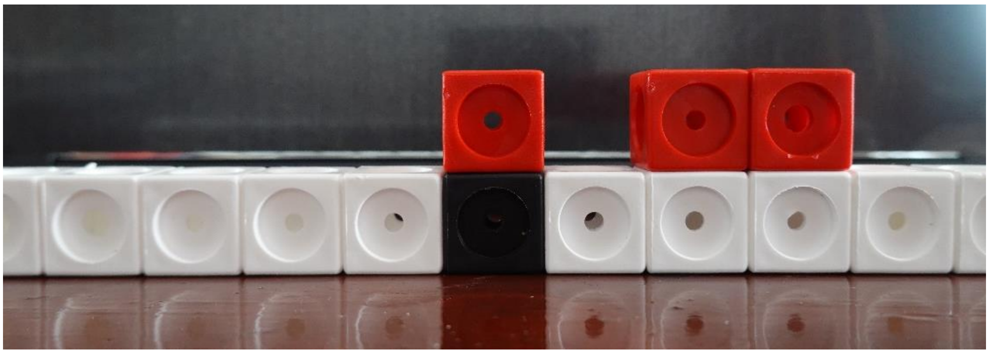
Conclusión: para hablar de distancia, en primer lugar, necesitamos fijar un sistema de referencia para obtener el valor de las posiciones. Es muy práctico tomar como 0 unidades la posición del origen de coordenadas de la referencia.

Cuando decimos que Málaga está a 125 km de distancia es porque estamos hablando desde Granada (donde vivimos). La posición de Granada sería 0 km (origen de coordenadas) y la posición de Málaga sería 125 km. Pero si viviéramos en Madrid, cambiaríamos el origen de coordenadas y la distancia a Málaga sería en referencia a Madrid.

Todas las magnitudes físicas necesitan de un sistema de referencia para poder ser medidas.

3.4. ¿Qué significa moverse rápido o moverse lento?

En la siguiente fotografía vamos a visualizar, en una sola imagen, tres posiciones distintas del tren (policubo rojo).



PARA PENSAR 1. Viendo únicamente la fotografía superior ¿podemos afirmar cuándo el tren fue más rápido en su movimiento? ¿Qué dato o datos nos faltan para poder hablar de rapidez?

La siguiente imagen muestra una barra de descarga de un archivo por internet. La barra de progreso de la imagen muestra cómo va la descarga tras 20 segundos.

PARA PENSAR 2. ¿Se te ocurre alguna forma de poder aproximar el tiempo que debemos esperar a que se descargue todo el archivo? ¿Qué hipótesis debemos asumir para poder hacer esta aproximación? ¿Qué significa el término "velocidad de descarga"?

Ser rápido o lento haciendo algo es relativo. Depende con quien nos comparemos. Normalmente nos encontraremos con personas más rápidas que nosotros y con personas más lentas. Pero si es claro que para hablar de rapidez (ya sea rapidez corriendo, rapidez haciendo deberes o rapidez fregando platos) necesitamos una magnitud física fundamental: el tiempo. **Sin tiempo no podemos comparar cómo de rápido somos ni cómo de lentos somos.**

Mira la siguiente tabla. Muestra la distancia caminada, en una etapa, por distintos peregrinos del Camino de Santiago y el tiempo empleado. El mapa muestra los nombres de varias poblaciones del Camino de Santiago.

Peregrino	Distancia	Tiempo
Antonio	20 km	4 horas
María	25 km	5 horas
Clara	23 km	4 horas y 15 minutos
Pepe	30 km	6 horas y 30 minutos

PARA PENSAR 3. ¿Quién ha caminado más distancia? ¿Quién ha tardado más tiempo? ¿Es lo mismo 4 horas y 15 minutos que 4,15 horas? ¿Es lo mismo 6 horas y 30 minutos que 6,30 horas? ¿Quién ha sido más rápido caminando? ¿Qué hipótesis debemos plantear para saber quién es más rápido?

PARA PENSAR 4. En el mapa superior, los pueblos Frómista y Carrión de los Condes (provincia de Palencia) están separados por 21 km. Usando este dato y el mapa, ¿se te ocurre cómo aproximar la distancia de Burgos a Logroño en la ruta del Camino de Santiago?

3.5. ¿Qué significa la palabra velocidad?

Con longitud y tiempo formamos la palabra velocidad. La velocidad es una magnitud física derivada que depende de la longitud y del tiempo.

La velocidad mide cómo de rápido cambia la posición de un objeto en función del tiempo.

Si la posición se mide en metros y el tiempo en segundos, la unidad de la velocidad es m/s. Si la posición se mide en kilómetros y el tiempo en horas, la unidad de la velocidad es km/h. **La unidad de velocidad en el S.I. es m/s**.

Velocidad constante (M.R.U.)

Si el movimiento es en línea recta y siempre con la misma velocidad, hablamos de Movimiento Rectilíneo Uniforme (M.R.U.). Uniforme es sinónimo de que no cambia, es decir, siempre vale lo mismo.

Estar en reposo es un tipo de M.R.U. porque la velocidad siempre vale 0: el objeto no cambia su posición.

El récord del mundo de los 100 metros lisos masculinos es de 9,58 segundos. Logrado por el atleta jamaicano Usain Bolt en Berlín, en 2009. Algunas calles de Granada tienen radares para controlar la velocidad máxima a la que circulan los vehículos. En muchas calles del centro, la velocidad máxima permitida es de 30 km/h. ¿Podría multar un radar a Usain Bolt si hubiese corrido, por el centro de Granada, al ritmo de su récord del mundo?

Los datos de Bolt están en metros y en segundos. Debemos pasarlos a kilómetros y a horas para poder compararlos con la velocidad permitida de 30 km/h. Podemos ayudarnos de la siguiente tabla para realizar la conversión de unidades. Recuerda que 1 hora equivale a 3.600 segundos (más adelante en el curso aprenderemos a realizar directamente el cambio de unidades sin necesidad de aproximar con una tabla).

Tiempo	Distancia
9,58 s	100 m
2 x 9,58 = 19,16 s	2 x 100 = 200 m
…	…
10 x 9,58 = 95,8 s	10 x 100 = 1.000 m (1 km)
…	…
100 x 9,58 = 958 s	100 x 100 = 10.000 m (10 km)
…	…
300 x 9,58 = 2.874 s	300 x 100 = 30.000 m (30 km)
…	…
375 x 9,58 = 3592,5 s	375 x 100 = 37.500 m (37,5 km)
376 x 9,58 = 3.602,08 s (aproximadamente igual a 1 hora)	376 x 100 = 37.600 m (37,6 km)
Conclusión: La velocidad de Bolt sería de aproximadamente 37,6 km/h. El radar del centro de Granada podría multarle por viajar a más de 30 km/h.	

PARA PENSAR 5. ¿Piensas que Usain Bolt corrió, durante los 100 metros de Berlín 2009, siempre a la misma velocidad? ¿Qué significado crees que tiene hablar de "la velocidad de Usain Bolt" durante los 100 metros? ¿Es lo mismo "velocidad uniforme" que "velocidad media"?

La Ciencia crea modelos para comprender la realidad. Un modelo no es igual a la realidad, pero permite obtener información importante. En muchos movimientos en línea recta es frecuente suponer que los objetos se mueven con la misma velocidad todo el tiempo. Y esa velocidad se aproxima al valor de la velocidad media. Esto no suele ser verdad, pero es una "buena mentirijilla" de la que podemos sacar muchas aplicaciones. Aunque, como todo modelo, tiene sus limitaciones.

PARA PENSAR 6. Si admitimos la hipótesis de que Usain Bolt es capaz de mantener de manera indefinida el ritmo de su récord del mundo de los 100 metros lisos, ¿cuánto tiempo tardaría en recorrer 200 m? ¿Y 500 m? ¿Y 1.500 m? ¿Crees que esta hipótesis es un buen modelo para describir la realidad? ¿Puedes comparar tu estimación con el récord del mundo de 1.500 metros masculino del marroquí Hicham El Guerrouj, conseguido en Roma en 1998? (en internet encontrarás rápidamente la marca de El Guerrouj).

3.6. Concepto de proporcionalidad

Los movimientos con velocidad constante son un ejemplo de proporcionalidad directa.

La proporcionalidad (o razón) es una comparación entre dos magnitudes. Esta comparación se realiza con una división, donde la primera magnitud va al numerador y la segunda magnitud va al denominador.

La proporcionalidad es directa cuando al multiplicar o dividir una magnitud por un número, la otra magnitud también queda multiplicada o dividida por ese mismo número.

La velocidad constante de los M.R.U. es una proporcionalidad directa entre la distancia recorrida (numerador) y el intervalo de tiempo empleado (denominador).

Ejemplo de proporcionalidad directa: dimensiones de una imagen que se amplía

Otro ejemplo de proporcionalidad es la relación entre el ancho y el alto de una fotografía. Fíjate en la siguiente tabla.

4 cm de ancho 3 cm de alto	**6 cm de ancho 4,5 cm de alto**	**6 cm de ancho 2 cm de alto**
		

PARA PENSAR 7. ¿Crees que la segunda imagen mantiene la misma proporción ancho/alto que la primera? ¿Cuál es la razón numérica de proporción? ¿Qué le pasa a la tercera imagen respecto de las dos primeras?

Ejemplo de proporcionalidad directa: puntos obtenidos por los partidos ganados en la liga de fútbol

Otro ejemplo de proporcionalidad directa es el número de puntos que se obtienen por los partidos ganados en la liga de fútbol española. Mira la siguiente tabla.

Año 1980 Liga española de fútbol		Año 2023 Liga española de fútbol	
Partidos ganados	**Puntos por las victorias**	**Partidos Ganados**	**Puntos por las victorias**
1	2	1	3
2	4	2	6
3	6	3	9
4	8	4	12
5	10	5	15

PARA PENSAR 8. ¿Qué diferencias aprecias entre 1980 y 2023? ¿Cuál es la razón numérica de puntos obtenidos por los partidos ganados cada año? Si la liga la juegan 20 equipos, con dos vueltas completas, y un equipo gana todos los partidos del campeonato, ¿cuántos puntos obtendría en 1980 y cuántos en 2023? ¿Cómo has obtenido la puntuación final? ¿Has ido sumando uno a uno los puntos de cada partido ganado o has aplicado alguna razón de proporción?

Ejemplo de proporcionalidad directa: ritmo de carrera en los maratonianos

Los atletas profesionales de maratón poseen gran facilidad para correr a un ritmo constante durante muchos kilómetros. La siguiente tabla muestra los datos de entrenamiento de un día de la atleta española Marta Galimany, que posee el récord de España de maratón (conseguido en Valencia, en 2022).

Distancia	Tiempo de paso (minutos : segundos)
0 km	00:00
5 km	17:30
10 km	35:00
15 km	¿¿??

PARA PENSAR 9. Si admitimos la hipótesis de que Marta Galimany corre a la misma velocidad durante todo su entrenamiento, ¿cuál será su tiempo de paso a los 15 km? ¿Cuál es la razón numérica entre el tiempo de paso y la distancia recorrida? ¿Tiene esa razón numérica las unidades de una velocidad? ¿Por qué crees que los “runners” de todo el mundo hablan de ritmo y no de velocidad?

Ejemplo de proporcionalidad directa: la escala de un mapa

Ya hemos trabajado este curso con escalas. Haciendo tablas o series hemos resuelto varios problemas, gracias a que la escala de un mapa es un ejemplo de proporcionalidad directa que relaciona la distancia del mapa con la distancia de la realidad.

Cuando leemos que un mapa, por ejemplo, tiene escala 1/100.000 significa que una unidad de longitud del mapa (numerador) se corresponde con 100.000 unidades de longitud de la realidad (denominador). Si hablásemos de centímetros, significaría que 1 cm del mapa indica 100.000 cm de la realidad.

Aplicando la proporcionalidad directa a este ejemplo, podríamos razonar de la siguiente forma:

- 1 cm del mapa equivale a 100.000 cm de la realidad.
- 2 cm del mapa equivalen a 200.000 cm de la realidad.

Cada vez que multipliquemos la longitud del mapa por un número, deberemos hacer lo mismo con la longitud de la realidad. Y la escala también se cumple si dividimos en vez de multiplicar:

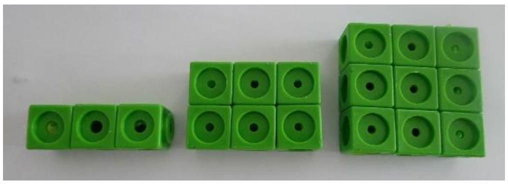
- 1 cm del mapa equivale a 100.000 cm de la realidad.
- 0,5 cm del mapa equivalen a 50.000 cm de la realidad.

Estos razonamiento proporcionales también los podemos realizar con fracciones, lo cual es muy útil para resolver problemas (como veremos más adelante).

$$\frac{1\ cm}{2\ cm} = \frac{100.000\ cm}{200.000\ cm}$$

Ejemplo de proporcionalidad directa: número de policubos y tiempo de crecimiento

En las siguientes tablas verás un número de policubos que va creciendo con el tiempo. El origen de coordenadas se toma para un tiempo igual a 0 s. ¿En qué serie se mantiene una proporcionalidad directa en el crecimiento de los policubos?

	Tiempo 0 s	Tiempo 1 s	Tiempo 2 s
Serie Blanca			
Serie Verde			
Serie Roja			

La serie blanca es 2, 4 y 6. Es decir, cuando pasa una unidad de tiempo el número de policubos crece en dos unidades. Esta relación se mantiene de 0 a 1 segundo, y de 1 a 2 segundos. El crecimiento es constante. Hay una razón de proporción entre el número de policubos y el tiempo. Esta razón vale 2 policubos/segundo.

La serie verde es 3, 6 y 9. Es decir, cuando pasa una unidad de tiempo el número de policubos crece en tres unidades. Esta relación se mantiene de 0 a 1 segundo, y de 1 a 2 segundos. El crecimiento es constante. Hay una razón de proporción entre el número de policubos y el tiempo. Esta razón vale 3 policubos/segundo.

La serie roja es 4, 7 y 9. Es decir, de 0 a 1 segundo aparecen 3 policubos nuevos. Pero de 1 a 2 segundos aparecen solo 2 policubos nuevos. No hay un crecimiento constante. No hay una razón de proporción.

PARA PENSAR 10. Si la relación de proporción se mantiene constante en el tiempo, ¿cuántos policubos blancos tendremos para un tiempo de 10 segundos? ¿Y policubos verdes? ¿Cómo has hecho los cálculos? ¿Qué crees que significa la expresión “velocidad de crecimiento de una población”? ¿En qué unidades expresarías la velocidad de crecimiento de la población de un país? ¿Puede un país tener una velocidad de crecimiento negativa? ¿Qué consecuencias tendría para ese país? ¿Qué factores pueden provocar que un país pase de velocidad de crecimiento positiva a negativa?

El M.R.U. es un ejemplo de proporcionalidad directa

El Movimiento Rectilíneo Uniforme (M.R.U.) es un ejemplo de proporcionalidad directa entre la distancia recorrida y el intervalo de tiempo en que se produce el movimiento.

Trabajemos ahora con la siguiente tabla, con los datos de tiempo y distancia respecto al origen del sistema de referencia para un objeto cualquiera que se mueve en línea recta.

Tiempo	Distancia al origen de referencia
0 s	4 m
0,5 s	6,5 m
1 s	9 m
1,5 s	11,5 m
2 s	14 m
2,5 s	16,5 m
3 s	19 m

¿Podemos afirmar, mirando los datos, que la velocidad es uniforme desde los 0 s hasta los 3 s?

Cada 0,5 s la distancia aumenta en 2,5 m. O lo que es lo mismo, cada 1 s la distancia aumenta en 5 m.

¿Cuánto aumenta la distancia entre 0 s y 1 s? 5 metros.

¿Cuánto aumenta la distancia entre 1 s y 2 s? 5 metros.

¿Cuánto aumenta la distancia entre 2 s y 3 s? 5 metros.

En esta tabla, la velocidad uniforme es la razón entre la distancia y el tiempo. La velocidad es igual a 5 m/s. Muy importante el orden: cada 5 metros pasa 1 segundo de tiempo. Si operamos al revés (tiempo dividido entre distancia), no tendremos unidades de velocidad.

PARA PENSAR 11. Si el objeto mantiene su velocidad uniforme de 5 m/s durante 10 minutos, ¿qué distancia habrá recorrido tras esos 10 minutos? ¿Es lo mismo la distancia recorrida en esos 10 minutos que la distancia a la que se encuentre del origen tras esos 10 minutos?

3.7. ¿Por qué usar una fórmula para calcular la velocidad uniforme?

Para hacer cálculos rápidos en situaciones reales con velocidad uniforme, es muy cómodo tener una fórmula a mano que nos permita operar sin tener que hacer tablas de estimación. Es por este motivo por el que vamos a explicar una fórmula matemática que relaciona la velocidad con la distancia y con el tiempo.

Para hablar de velocidad necesitamos conocer dos posiciones de un objeto para dos tiempos distintos:

- A la posición inicial la llamaremos s_0.
- Al tiempo inicial lo llamaremos t_0.
- A la posición final la llamaremos s_f.
- Al tiempo final lo llamaremos t_f.

La velocidad uniforme en M.R.U. se calcula con la fórmula:

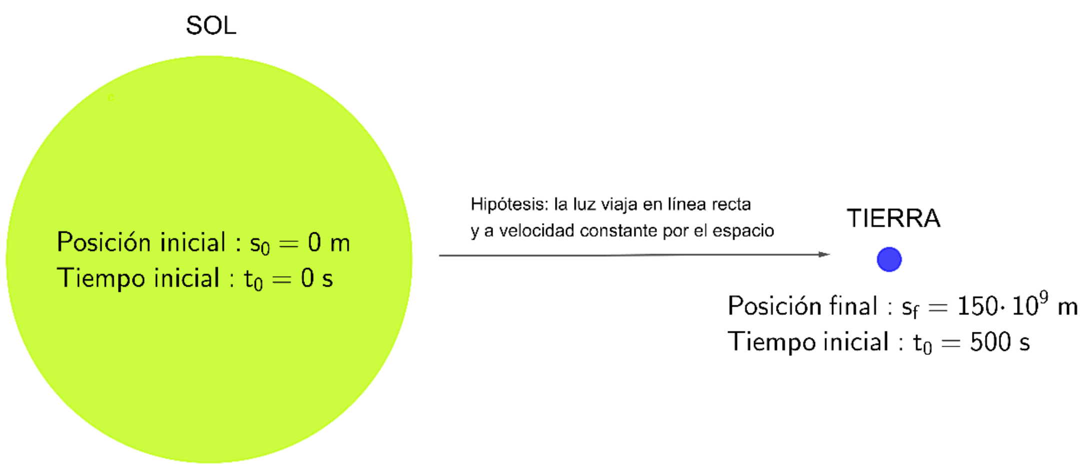
Fórmula de la velocidad en M.R.U.
$v = \dfrac{s_f - s_0}{t_f - t_0}$

Apliquemos esta fórmula en la resolución del siguiente problema.

La distancia del Sol a la Tierra es de aproximadamente 150 millones de kilómetros. La luz que sale del Sol tarda, aproximadamente, 500 segundos en llegar a la Tierra. Calcula la velocidad a la que viaja la luz por el espacio, asumiendo que estamos en un caso de M.R.U.

Para trabajar en unidades del S.I. pasamos la distancia de kilómetros a metros, multiplicando por 1.000.

$$150 \; millones \; de \; km = 150 \cdot 10^6 \; km \; \times 1.000 = 150 \cdot 10^9 \; m$$



La imagen superior es un modelo para comprender el problema. No estamos teniendo en cuenta ni el tamaño real del Sol ni el tamaño real de la Tierra. Como cualquier modelo, tiene sus limitaciones. Pero es una buen esquema para aproximar la velocidad de la luz en el vacío.

$$v = \frac{150 \cdot 10^9 - 0}{500 - 0}$$

$$v = 0{,}3 \cdot 10^9\ m/s$$

Pasamos al convenio de notación científica.

$$v = 3 \cdot 10^8\ m/s$$

Conclusión: en 1 segundo, la luz recorre 300.000.000 metros. O lo que es lo mismo (y este es un valor de culturilla general que hay que memorizar), la luz viaja por el espacio a una velocidad de 300.000 km/s.

3.8. ¿Puede ser la velocidad negativa?

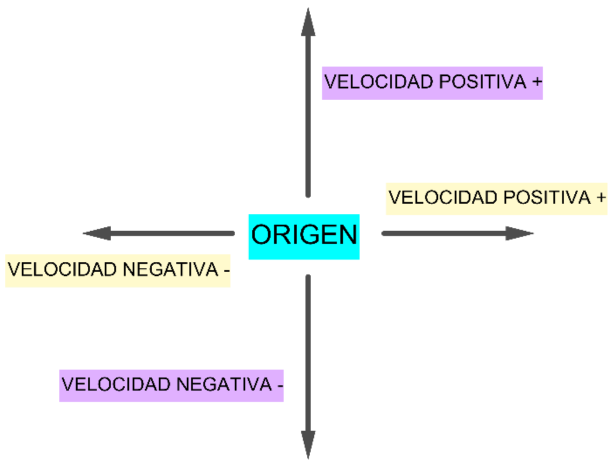
El movimiento rectilíneo se realiza a lo largo de una línea recta. Al fijar un origen de coordenadas en 0 unidades es costumbre seguir el siguiente convenio de signos:

- Movimiento horizontal: las posiciones a la derecha del origen de coordenadas son positivas y las posiciones a la izquierda del origen de coordenadas son negativas.
- Movimiento vertical: las posiciones por encima del origen de coordenadas son positivas y las posiciones por debajo del origen de coordenadas son negativas.

Piensa en un objeto situado en una posición a 10 m del origen de coordenadas.

Si se mueve con velocidad uniforme positiva, su distancia respecto al origen de coordenadas irá aumentando, ¿verdad? Cada vez estará más lejos del lugar que hace de referencia. ¿Qué pasará si ese mismo objeto se mueve con velocidad negativa? Muy sencillo. En vez de alejarse del origen, se acercará.

- En un movimiento horizontal, la velocidad positiva indica que el objeto se mueve hacia la derecha y la velocidad negativa indica que el objeto se desplaza hacia la izquierda.
- En un movimiento vertical, la velocidad positiva indica que el objeto se mueve hacia arriba y la velocidad negativa indica que el objeto se desplaza hacia abajo.



La recta que guía el movimiento en un objeto se llama dirección. Y una dirección siempre tiene dos sentidos.

En el ejemplo de la carretera que une Granada con Málaga, la carretera sería la dirección del movimiento (suponiendo una carretera siempre recta).

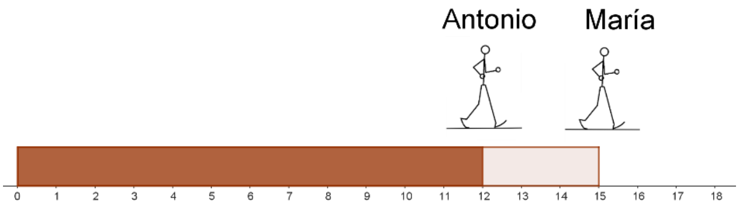
Y el sentido es doble: podemos viajar de Granada a Málaga, o bien viajar en sentido contrario de Málaga a Granada.

3.9. Porcentajes para medir el aumento o la disminución de una magnitud

El concepto de porcentaje está muy relacionado con el concepto de proporcionalidad directa, gracias a las fracciones.

En un porcentaje consideramos una cantidad como unidad de referencia. Y el resto de las cantidades se escriben con relación a esa unidad de referencia.

Pongamos un ejemplo. María camina 15 km en un día. Esa cantidad es la unidad de referencia. Antonio camina 12 km ese mismo día, y queremos saber qué relación hay entre la distancia caminada por Antonio y la distancia caminada por María.



La unidad de referencia la ponemos en el denominador y quedaría la siguiente fracción:

$$\frac{distancia\ Antonio}{distancia\ María} = \frac{12\ km}{15\ km} = 0{,}8$$

La cantidad 0,8 está en tanto por uno.

¿Qué significa tanto por uno? Significa que si lo que ha caminado María es la unidad de referencia, Antonio ha andado 0,8 de esa unidad de referencia.

Si la cantidad en tanto por uno la multiplicamos por 100, obtendremos el porcentaje en tanto por ciento.

En el tanto por ciento, la unidad de referencia vale 100. En el ejemplo de Antonio y María quedaría:

$$0{,}8\ \times 100 = 80\ \%$$

Es decir, Antonio ha caminado el 80% de la distancia recorrida por María.

¿Qué pasaría si tomáramos la distancia de Antonio como unidad de referencia? Muy sencillo. Pondríamos la distancia de Antonio en el denominador:

$$\frac{distancia\ María}{distancia\ Antonio} = \frac{15\ km}{12\ km} = 1{,}25$$

María ha caminado 1,25 veces la distancia de referencia de Antonio.

Si hablamos en tanto por ciento, diríamos:

$$1{,}25\ \times 100 = 125\ \%$$

Es decir, María ha caminado el 125% de la cantidad de Antonio.

Tan correcto es decir que Antonio ha caminado el 80% de la distancia de María, como afirmar que María ha recorrido el 125% de la distancia de Antonio. Todo depende de la cantidad que consideremos como unidad de referencia.

PARA PENSAR 12. Si a una cantidad A le aplicamos el 80%, obtenemos una cantidad B. Si ahora a esa cantidad B le aplicamos el 120%, ¿volveríamos a obtener el valor de A?

$$A \xrightarrow{\text{APLICAMOS EL 80\%}} B$$

$$B \xrightarrow[\text{APLICAMOS EL 120\%}]{} ¿A?$$

Los porcentajes son muy utilizados cuando hablamos de dinero. Si lees la palabra "rebajas" en una tienda, significa que se aplica un porcentaje de descuento al precio de los productos. Y cuando escuchas una noticia sobre "aumento en el salario" quiere decir que el sueldo mensual se aumenta en un porcentaje.

El siguiente problema es un ejemplo de cómo aplicar porcentajes.

Un artículo de una tienda de muebles se rebaja de 2.700 euros a 2.376 euros. ¿Cuál es el porcentaje de rebaja?

$$2.700\ € \xrightarrow{\text{¿CUÁL ES EL PORCENTAJE DE DESCUENTO?}} 2.376\ €$$

La unidad de referencia es el precio inicial de 2.700 euros. Recuerda que, para calcular el porcentaje, realizamos una división donde la unidad de referencia va en el denominador.

$$\frac{2.376\ €}{2.700\ €} = 0{,}88$$

$$0{,}88 \times 100 = 88\%$$

¿Qué significa el valor 88%?

Significa que la cantidad 2.376 € es el 88% del precio inicial de 2.700 €.

Si la cantidad 2.700 € es el 100% por ser la unidad de referencia, el porcentaje de rebaja será:

$$100\% - 88\% = 12\%$$

Conclusión: el precio del artículo se ha rebajado en un 12%.

UNIDAD 4. Fracciones, factores de conversión y economía doméstica

Evaluación: Primera

Temporalidad: 3 semanas

Número de sesiones: 9 horas

Actividades de evaluación:

- T.E.C.A. (Trabajo Escrito Con Apuntes)
- Cuaderno
- Programación robótica
- Simulación con software matemático
- Respuesta oral a preguntas
- Trabajo diario

Breve resumen de la situación: Si comparamos los ingresos económicos de diferentes lugares del mundo, y establecemos una unidad de referencia monetario, podríamos comparar las vidas de familias de todo el mundo en función del dinero que mensualmente entra en los hogares.

De esta forma, en fechas próximas a la Navidad, podemos reflexionar sobre nuestros gastos personales y familiares. Y utilizar las fracciones para obtener datos objetivos durante las comparaciones.

Por otro lado, en robótica y en Geogebra, terminamos la primera evaluación poniendo en práctica los conceptos y fórmulas estudiadas en M.R.U.

4. ¿Qué necesitamos saber previamente?

4.1. ¿Qué es una fracción?

Una fracción es una división entre números.

El dividendo de la división recibe el nombre de numerador en la fracción. Y el divisor de la división recibe el nombre de denominador en la fracción.

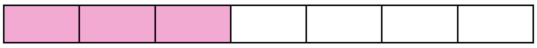
Las fracciones tienen muchas aplicaciones en Física y Química. Y por eso las vamos a estudiar en esta unidad.

$$\frac{numerador}{denominador}$$

Fracción propia e impropia

Una fracción es propia cuando el valor del numerador es menor que el valor del denominador. Por ejemplo, dividimos una unidad de referencia en 7 partes iguales y elegimos 3:

$$\frac{3}{7}$$

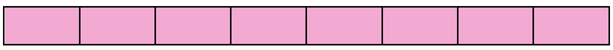


Una fracción es impropia cuando el valor del numerador es mayor que el valor del denominador. Por ejemplo, dividimos una unidad de referencia en 5 partes iguales y elegimos 9. En este caso, la cantidad final es mayor que la unidad.

$$\frac{9}{5}=\frac{5+4}{5}=\frac{5}{5}+\frac{4}{5}=1+\frac{4}{5}$$

Si el valor del numerador coincide con el valor del denominador, estamos dividiendo un número por sí mismo y el resultado final es la unidad. Por ejemplo, dividimos una unidad de referencia en 8 partes iguales y elegimos las 8 partes.

$$\frac{8}{8}=1$$



Fracciones equivalentes

Dos fracciones son equivalentes si representan la misma cantidad, es decir, si el cociente entre numerador y denominador da lugar a la misma razón de proporcionalidad.

$$\frac{3}{7}\ y\ \frac{6}{14}\ sí\ son\ equivalentes$$

Es el mismo concepto que vimos en M.R.U. al hablar de proporcionalidad. Si el numerador se multiplica (o se divide) por una cantidad, el denominador también queda multiplicado (o dividido) por esa misma cantidad.

En el ejemplo anterior, con las fracciones 3/7 y 6/14, podemos afirmar:

- Numerador: 6 es dos veces 3
- Denominador: 14 es dos veces 7

Siempre que se mantenga esta razón de proporcionalidad entre numerador y denominador, las fracciones serán equivalentes. En caso contrario, las fracciones no serán equivalentes.

$$\frac{3}{7}\ y\ \frac{9}{14}\ no\ son\ equivalentes$$

- Numerador: 9 es tres veces 3
- Denominador: 14 no es tres veces 7

Las fracciones equivalentes también se consiguen dividiendo numerador y denominador por un mismo número.

$$\frac{10}{8}\ y\ \frac{5}{4}\ sí\ son\ equivalentes$$

- Numerador: 5 es la mitad de 10
- Denominador: 4 es la mitad de 8

Fracción irreducible

Si el numerador y el denominador no comparten ningún divisor común (salvo el 1), diremos que la fracción no se puede simplificar en coeficientes más sencillos y la llamaremos fracción irreducible.

$$\frac{10}{8}\ no\ es\ irreducible$$

El numerador 10 y el denominador 8 comparten el 2 como divisor común. Por lo que podemos obtener una fracción equivalente, con coeficientes más pequeños, dividiendo 10 entre 2 y dividiendo 8 entre 2.

$$\frac{5}{4}\ sí\ es\ irreducible$$

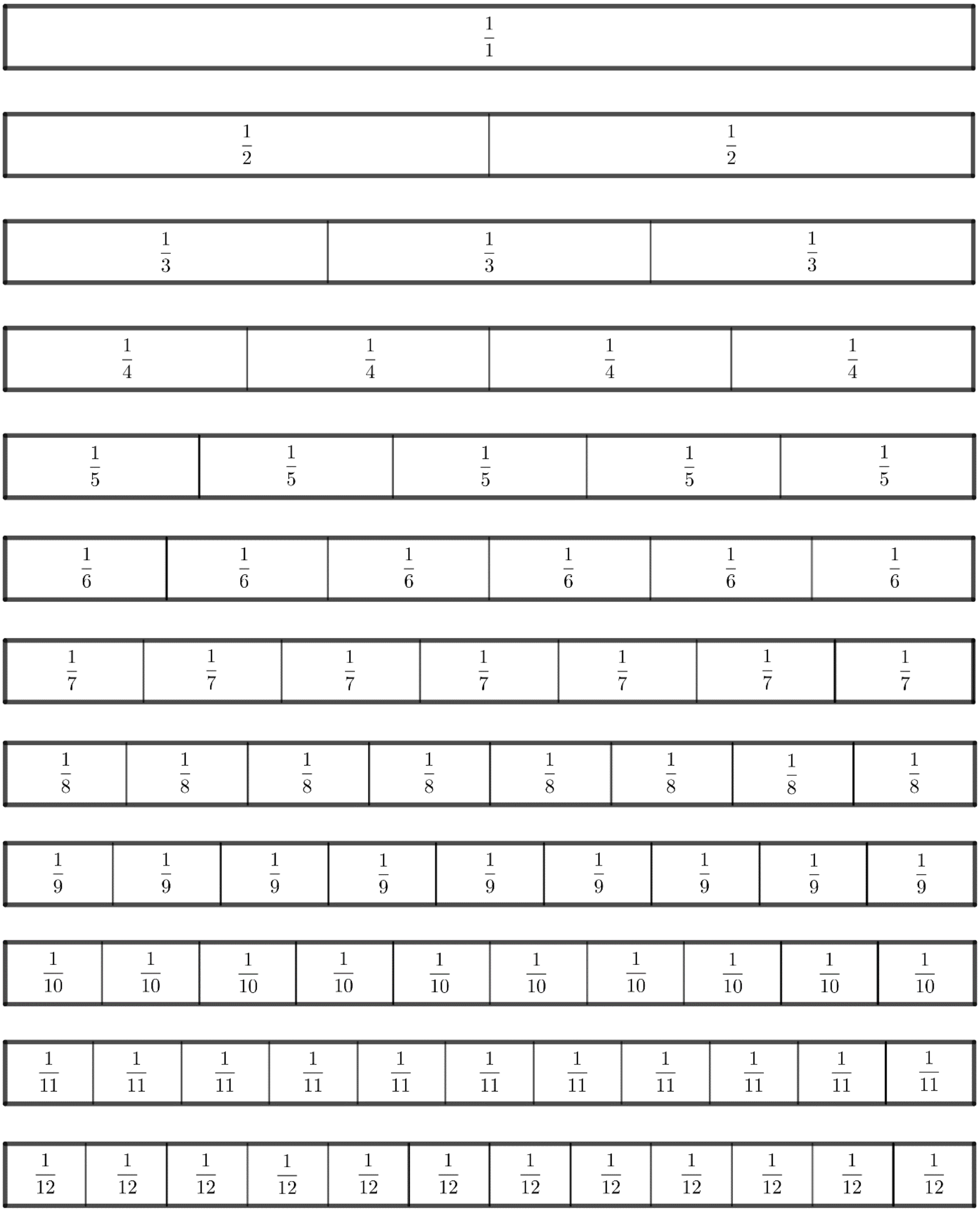
El numerador 5 y el denominador 4 no comparten ningún divisor (salvo el 1). Forman una fracción irreducible.

Material manipulativo: fracciones de la unidad con regletas

La primera de las siguientes imágenes es un gran rectángulo, cuya longitud consideramos como la unidad de referencia. Ese gran rectángulo podemos dividirlo en partes iguales, obteniendo así fracciones de la unidad.

Si dividimos el gran rectángulo en dos partes iguales, tendremos dos fracciones de 1/2. Si dividimos el gran rectángulo en tres partes iguales, tendremos tres fracciones de 1/3. Si dividimos el gran rectángulo en cuatro partes iguales, tendremos cuatro fracciones de 1/4. Y así sucesivamente, hasta llegar a doces fracciones de 1/12 en la última imagen.

¿Cómo podemos practicar con las regletas? Si la unión de dos fracciones de 1/4 coinciden exactamente con una fracción de 1/2, significa que la suma de 1/4 más 1/4 es igual a 1/2. O si la unión de tres fracciones de 1/9 coinciden exactamente con una fracción de 1/3, significa que la suma de 1/9 más 1/9 más 1/9 es igual a 1/3.



PARA PENSAR 1. ¿Cuántas fracciones de 1/6 son necesarias para igualar la suma 1/2 + 1/3?¿Cuántas fracciones de 1/8 son necesarias para igualar la suma 1/2 + 1/4? ¿Por qué no puedes igualar 1/2 a una suma de fracciones de 1/11? Si sumas las fracciones 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + …. hasta el infinito y más allá, ¿crees que la suma final será superior a 2? ¿Y superior a 3? ¿Y superior a 4? ¿Crece el resultado de la suma de manera indefinida?

Fracciones para comprender datos globales de un país en función del tamaño de su población

Piensa en el número de coches que hay en un país, o en el número de restaurantes, o en el número de aeropuertos o en el número de personas federadas que juegan al bádminton.

- ¿Podemos comparar dos países para decidir cuál de los dos tiene más cantidad?
- ¿Tiene lógica comparar un país tan grande como China con un país tan pequeño como Andorra?
- ¿Cómo podemos responder a estas preguntas de manera objetiva y razonable?

Las respuestas las tienen las fracciones.

La siguiente tabla muestra la población de un grupo de países y el número de teléfonos móviles en uso. Los datos aparecen siguiendo el convenio de notación científica (un número no nulo en la parte entera, dos cifras decimales redondeadas y potencias de base 10) para que puedas practicar con los saberes trabajados en unidades anteriores.

Datos 2021 – Fuente: https://www.gapminder.org		
País	**Población (número de habitantes)**	**Número de teléfonos móviles con línea operativa**
China	$1{,}43 \times 10^9$	$1{,}73 \times 10^9$
India	$1{,}41 \times 10^9$	$1{,}15 \times 10^9$
Estados Unidos	$3{,}37 \times 10^8$	$3{,}62 \times 10^8$
Brasil	$2{,}14 \times 10^8$	$2{,}2 \times 10^8$
Nigeria	$2{,}13 \times 10^8$	$1{,}95 \times 10^8$
México	$1{,}27 \times 10^8$	$1{,}24 \times 10^8$
Etiopía	$1{,}20 \times 10^8$	$4{,}45 \times 10^7$
Alemania	$8{,}34 \times 10^7$	$1{,}06 \times 10^8$
España	$4{,}75 \times 10^7$	$5{,}65 \times 10^7$
Australia	$2{,}59 \times 10^7$	$2{,}71 \times 10^7$
Portugal	$1{,}03 \times 10^7$	$1{,}25 \times 10^7$
Suiza	$8{,}69 \times 10^6$	$1{,}11 \times 10^7$
Qatar	$2{,}69 \times 10^6$	$3{,}88 \times 10^6$
Andorra	$7{,}9 \times 10^4$	$9{,}4 \times 10^4$

PARA PENSAR 2. Ante la pregunta ¿en qué país hay más teléfonos móviles? ¿Admite una respuesta única? ¿O se puede matizar mejor la pregunta? ¿Son necesarias las fracciones para responder a esa pregunta? ¿Qué diferencia habrá entre las comparaciones absolutas y las comparaciones relativas? ¿Tiene sentido hacer la división número de personas entre número de teléfonos? ¿Siempre ocurre en la tabla que el país con más población tiene también un mayor número de teléfonos móviles operativos?

Si el número de teléfonos supera al tamaño de la población, la relación número de teléfonos por habitante ¿será mayor que 1 o menor que 1? ¿Qué significa una comparación de magnitudes que sea igual a 1?

¿Si en un país hay más teléfonos que persona, significa seguro que todos los habitantes de ese país tienen al menos un teléfono móvil? ¿O estamos hablando de un valor medio, que no es real pero sí es práctico para comparar países?

PARA PENSAR 3. Calcular en la clase el número de teléfonos móviles operativos que hay entre todos los miembros de las familias de los alumnos. Sacar la relación de número de teléfonos por persona. ¿Estáis por encima o por debajo de la media en España?

Completa la siguiente tabla haciendo uso de los datos de 2019 publicados en:

https://www.gapminder.org/tools/#$chart-type=bubbles&url=v1

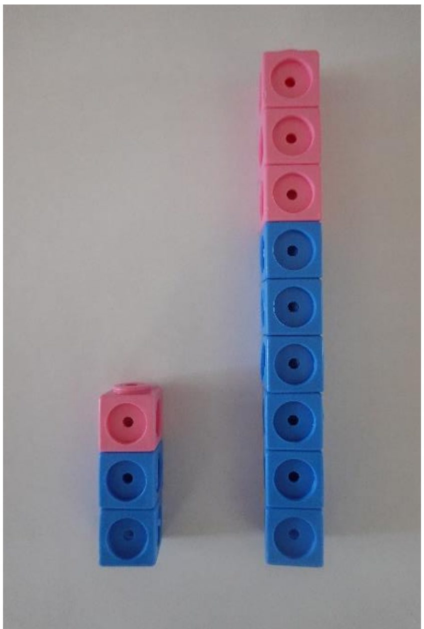
Los datos de asesinatos totales en 2019 los puedes obtener directamente de la web. Para completar las dos últimas columnas, es necesaria operar matemáticamente con fracciones.

Datos 2019 – Fuente: https://www.gapminder.org				
País	**Población (número de habitantes)**	**Murders (asesinatos: muertes por violencia entre personas)**	**Número de asesinatos por habitante**	**Número de asesinatos cada cien mil habitantes**
China	$1{,}43 \times 10^9$			
India	$1{,}41 \times 10^9$			
Estados Unidos	$3{,}37 \times 10^8$			
Brasil	$2{,}14 \times 10^8$			
Nigeria	$2{,}13 \times 10^8$			
México	$1{,}27 \times 10^8$			
Etiopía	$1{,}20 \times 10^8$			
Alemania	$8{,}34 \times 10^7$			
España	$4{,}75 \times 10^7$			

PARA PENSAR 4. ¿El país con mayor número de asesinatos será siempre el país con mayor índice de mortalidad por acciones violentas? ¿Por qué crees que es más práctico hablar de asesinatos cada cien mil habitantes en vez de asesinatos por unidad de habitante, para valorar la seguridad de un país?

Material manipulativo: fracciones propias con policubos y simplificación

Si el numerador es inferior al denominador, vamos a trabajar con los policubos para entender el concepto de fracción propia.



Elige dos colores, uno claro y otro oscuro. Por ejemplo: blanco y negro, rosa y azul, o rojo y verde oscuro. Da igual los colores que elijas para trabajar con los policubos. Lo importante es que sean colores que se distingan claramente entre sí.

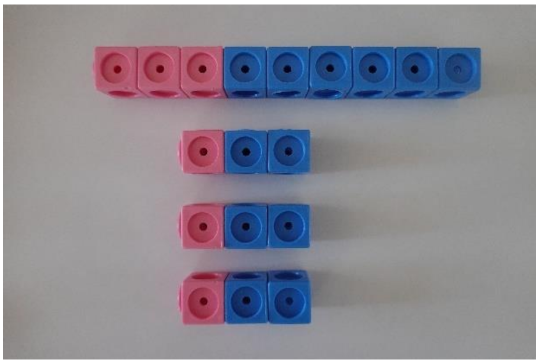
La fracción 1/3 significa que un todo lo dividimos en 3 partes y cogemos 1. En la primera columna de la imagen de la derecha, vemos 1 policubo rosa (numerador) unido a 2 policubos azules. El total de policubos es 3 (denominador).

La fracción 3/9 significa que un todo lo dividimos en 9 partes y cogemos 3. En la segunda columna de la derecha, vemos 3 policubos rosas (numerador) unidos a 6 policubos azules. El total de policubos es 9 (denominador).

Ambas fracciones son equivalente, por lo que representan la misma razón de proporcionalidad: por cada 1 policubo rosa hay 2 policubos azules.

¿Cómo podemos simplificar una fracción propia con policubos?

Fíjate en los policubos que representan la fracción 3/9: 3 policubos rosas y 6 policubos azules. Podemos descomponerlos en tres estructuras idénticas más pequeñas: cada una de ellas con 1 policubo rosa y 2 policubos azules. Eso significa que podemos eliminar dos estructuras y quedarnos con una sola, que será la fracción irreducible 1/3.



4.2. Operaciones elementales con fracciones

Las fracciones admiten las mismas operaciones matemáticas que los números enteros.

Sumar y restar fracciones

Podemos sumar (o restar) directamente fracciones que vengan expresadas con el mismo denominador. Dejamos el mismo denominador (mismo todo) y sumamos (o restamos) los numeradores (las partes).

Si no están con el mismo denominador, podemos hacer m.c.m. de los distintos denominadores y escribir fracciones equivalentes que tengan como denominador el valor del m.c.m.

Haciendo el m.c.m. garantizamos que los números que salen al operar con las fracciones sean los más pequeños posibles. Fíjate en el siguiente ejemplo.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{2}{5}$$

Factorizamos los denominadores en números primos.

$$4 = 2^2$$

$$6 = 2 \times 3$$

$$5 = 5$$

El común múltiplo más pequeño lo obtenemos con los comunes y no comunes elevados al mayor exponente en que aparezcan en la descomposición.

$$m.c.m.(4,5,6) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

De cada fracción de partida obtenemos su fracción equivalente que tenga por denominador el número 60.

$$\frac{1}{4}=\frac{15}{60} \qquad \frac{1}{6}=\frac{10}{60} \qquad \frac{2}{5}=\frac{24}{60}$$

Operamos con la fracciones con el mismo denominador.

$$\frac{15}{60}+\frac{10}{60}-\frac{24}{60}$$

Al tener el mismo denominador (el mismo todo) podemos sumar y restar los numeradores (las distintas partes).

$$\frac{15+10-24}{60}$$

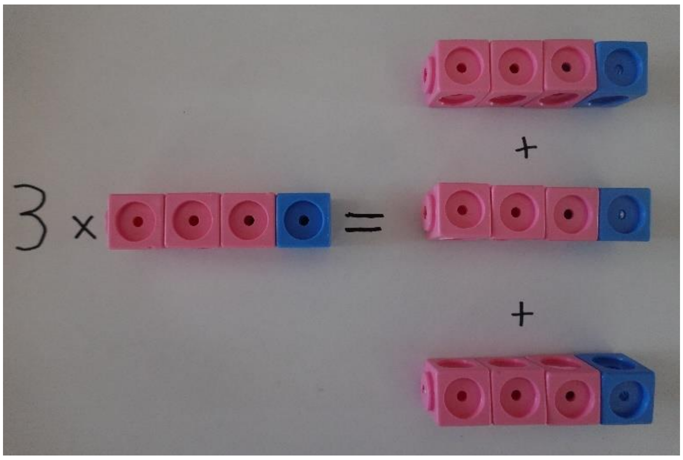
Operamos en el numerador y obtenemos el resultado final.

$$\frac{1}{60}$$

Multiplicar una fracción por un número entero

Multiplicar es repetir una cantidad una serie de veces. Si deseamos multiplicar un número entero por una fracción, significa que debemos repetir la fracción tantas veces como indique el número entero.

$$3\times\frac{3}{4}\ significa\ hacer\ 3\ veces\ la\ fracción\ \frac{3}{4}$$



Sabemos sumar fracciones con el mismo denominador.

$$3\times\frac{3}{4}=3\ veces\ \frac{3}{4}=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

Llegando a una fracción irreducible, porque 9 y 4 no poseen ningún divisor común (salvo el 1).

Fíjate que el resultado final de $3\times\frac{3}{4}$ coincide con multiplicar directamente el numerador por 3 y dejar el mismo denominador.

Conclusión: el producto $n\times\frac{a}{b}$ da como resultado una nueva fracción $\frac{n\times a}{b}$.

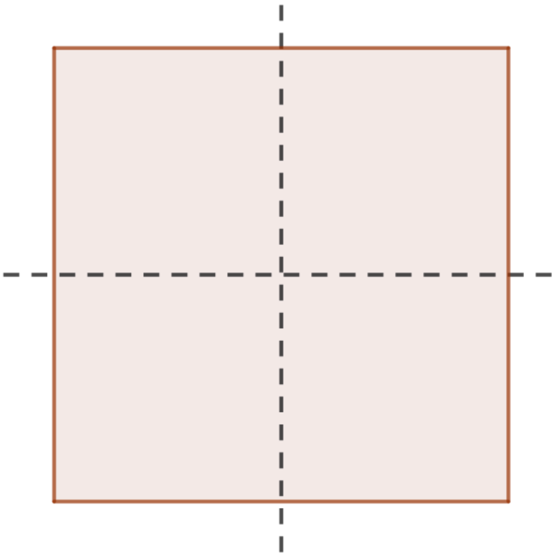
Multiplicar dos fracciones

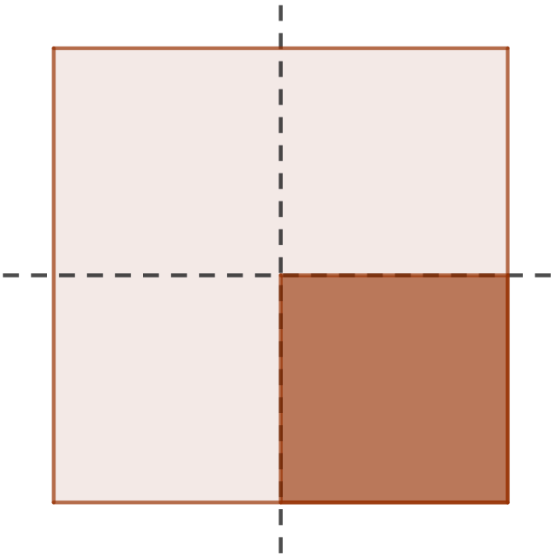
Acabamos de explicar que multiplicar un número entero por una fracción es lo mismo que sumar la fracción tantas veces como indique el número entero. Pero si tenemos dos fracciones multiplicando, ¿cómo entender "un número de veces" que sea igual a una fracción? Imagina que tenemos la siguiente operación.

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$$

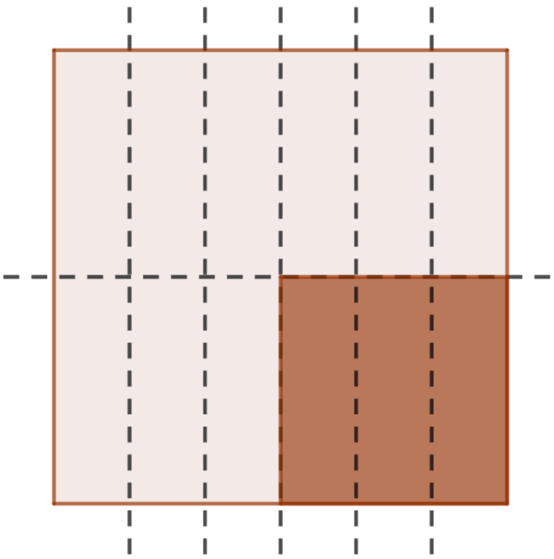
Significa que de 1/4 debemos coger 2/3. ¿Cómo podemos visualizar esta operación?

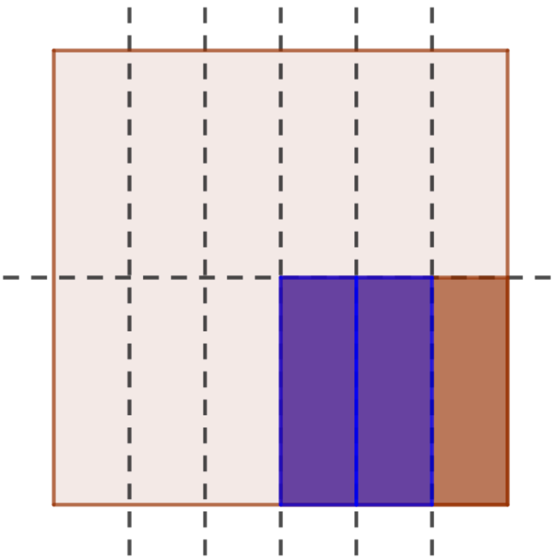
Si la unidad es igual a un cuadrado, podemos dividir ese cuadrado en cuatro partes iguales. Y de esas cuatro partes, elegimos una. Así tendremos 1/4 de la unidad.





Cada una de las cuatro partes del cuadrado de partida podemos dividirlas en tres partes iguales. Y solo en el cuarto del cuadrado que hemos elegido anteriormente, tomamos dos de sus tres partes.





¿En cuántas partes iguales hemos dividido el gran cuadrado de partida?

En 12 partes, simbolizadas por 12 pequeños rectángulos.

¿Cuántas partes hemos seleccionado de esas 12?

2 partes, simbolizadas por los pequeños rectángulos sombrados en azul.

¿Cuál es la fracción resultante?

2 partes de 12 genera la fracción 2/12. Esta fracción se puede simplificar a 1/6.

¿Cómo operar de manera rápida, para no tener que estar dibujando cuadrados y rectángulos constantemente?

Fíjate que la operación inicial es:

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$$

Y el resultado final, sin simplificar es:

$$\frac{2}{12}$$

Conclusión: En un producto de fracciones, el numerador del resultado final coincide con el producto de los numeradores de partida. Y el denominador del resultado final coincide con el producto de los denominadores de partida.

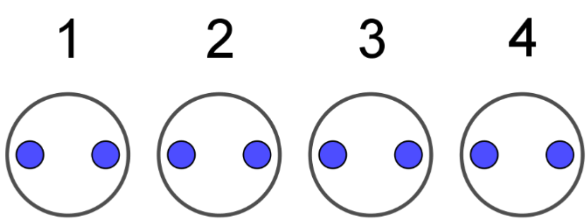
$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Dividir dos números enteros

Dividir significa hacer grupos. Si dividimos un número “D” entre un número “d”, el resultado de la división es el número de grupos de “d” unidades que podemos hacer en “D”.

Por ejemplo: 8/2 es igual a 4 porque podemos hacer cuatro grupos de dos unidades dentro del número 8.

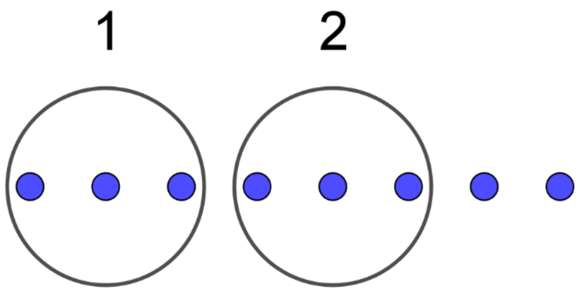
$$\frac{8}{2} = 4$$



La división puede no ser exacta. Así aparecen los números racionales.

Por ejemplo: 8/3 es igual a 2 unidades más 2/3 porque podemos hacer dos grupos de tres unidades dentro del número 8, y sobran dos unidades que forman la fracción 2/3.

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$$



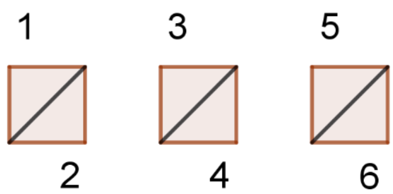
Dividir un número entre una fracción

Si dividimos un número entre una fracción, el razonamiento es el mismo: hacer grupos.

Por ejemplo: 3/(1/2) es igual a 6 porque podemos encontrar seis grupos de 1/2 dentro del número 3. ¿Cómo se comprende un grupo de 1/2? Como la mitad de la unidad.

En la siguiente imagen, el cuadrado es la unidad. Medio cuadrado es media unidad, es decir, simboliza a 1/2.

$$\frac{3}{1/2} = 6$$



Dividir fracciones

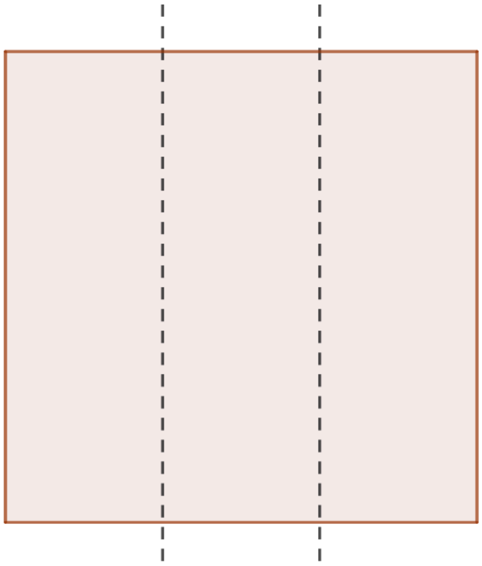
Para dividir fracciones nuevamente hacemos grupos. Aunque es más difícil de visualizar porque tanto numerador como denominador son fracciones. Vamos a intuir una forma general a partir de un ejemplo particular.

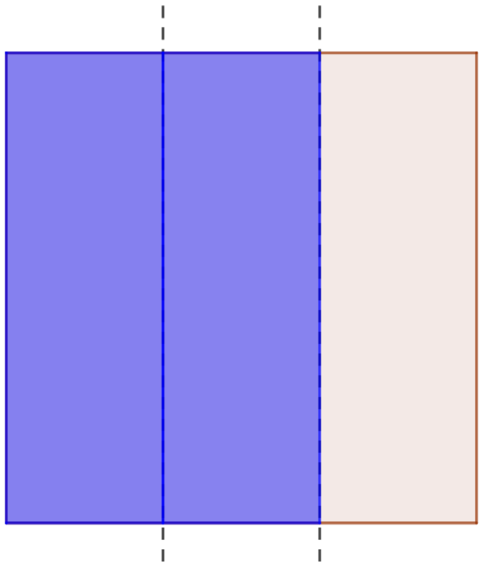
Imagina que debemos realizar la siguiente división de fracciones:

$$\frac{2/3}{1/4}$$

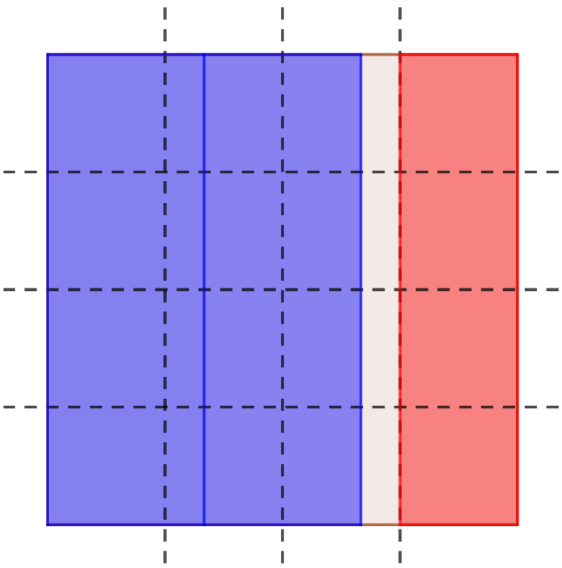
¿Cómo comprender 2/3 dividido entre 1/4?

Tenemos que encontrar cuántos grupos de 1/4 de unidad hay dentro de 2/3 de unidad. Fíjate en las siguientes imágenes. El gran cuadrado es la unidad. Lo dividimos en tres partes. Elegimos dos de esas tres partes, que son los rectángulos resaltados en azul. Esos rectángulos azules simbolizan 2/3 de unidad.

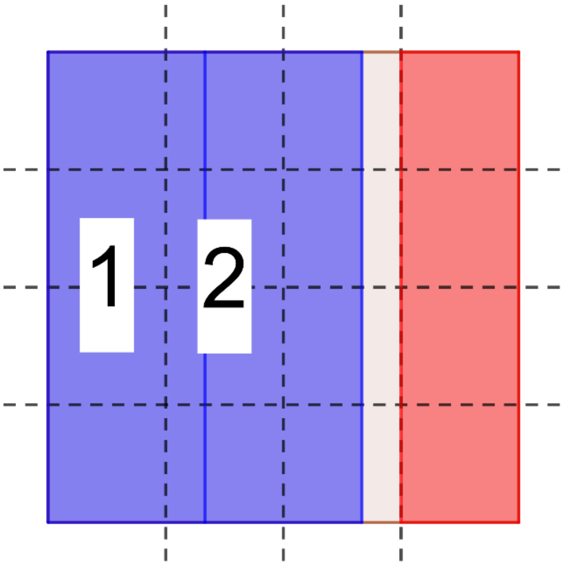




Ahora dividimos el gran cuadrado en 16 cuadraditos pequeños. Si escogemos 4 de esos 16 cuadraditos, tendremos 1/4 de la unidad. Resaltamos en rojo esos 4 cuadraditos, que forman un gran rectángulo vertical de color rojo.



¿Cuántas veces encontramos el rectángulo rojo (1/4) dentro de los dos rectángulos azules (2/3)? Esta pregunta es la que refleja el significado de la división de las dos fracciones.



El rectángulo rojo vertical aparece dos veces completas dentro de los dos rectángulos azules. Pero no llegamos a completar una tercera vez. Queda una franja que es 2/3 del rectángulo rojo. Es decir:

$$\frac{2/3}{1/4} = 2 + \frac{2}{3}$$

El número entero 2 lo podemos escribir como 6/3. Y la expresión queda:

$$\frac{2/3}{1/4} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3}$$

Sabemos sumar fracciones con el mismo denominador. Dejamos el denominador y sumamos los numeradores.

$$\frac{2/3}{1/4} = \frac{8}{3}$$

La solución fraccionaria de nuestra división es 8/3. Fíjate que el numerador 8 coincide con el producto 2×4. Mientras que el denominador 2 coincide con el producto 1×3. Por lo que podemos concluir la siguiente regla.

Conclusión: En una división de fracciones $\frac{a/b}{c/d}$ el resultado final coincide con $\frac{a \times d}{b \times c}$.

Y ya estamos en condiciones de comprender el motivo de una regla que aprendimos en Primaria, al usar el operador ":" para representar la división.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = multiplicar\ en\ cruz = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Potencia de una fracción

La potencia es repetir varias veces una multiplicación. Por ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$$

Y ya sabemos multiplicar fracciones. Simplemente multiplicar los numeradores por un lado y los denominadores por otro.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{2^4}{3^4}$$

Conclusión: La potencia de una fracción coincide con la potencia del numerador dividido por la potencia del denominador.

4.3. Cambiar unidades con fracciones: factores de conversión

Desde el inicio de curso hemos repasado los múltiplos y submúltiplos del metro, del kilogramo, del segundo, del metro cuadrado, del metro cúbico y hemos realizado cambios de unidades.

Cuando las unidades son algo más complejas, porque aparece el producto y/o la división de otras unidades, es bastante práctico aplicar fracciones para realizar la conversión de manera rápida.

Por ejemplo: un vehículo avanza a 90 km/h y deseamos saber su velocidad en m/s. ¿Cómo razonar?

Tenemos una fracción en las unidades:

$$90\frac{km}{h}$$

Debemos convertir kilómetros en metros, y debemos convertir horas en segundos. Como son dos las unidades a convertir, vamos a multiplicar por dos fracciones:

$$90\frac{km}{h} \times \frac{¿?}{¿?} \times \frac{¿?}{¿?}$$

¿Qué escribimos en los numeradores y denominadores de esas fracciones?

Debemos escribir alguna relación de equivalencia entre unidades. Por ejemplo: 1 km son 1.000 m, o bien 1 hora son 3.600 s.

Empecemos con la equivalencia entre 1 km y 1.000 m. Inicialmente tenemos kilómetros en el numerador, y deseamos convertirlos a metros. Por lo tanto, situamos metros en el numerador.

$$90\frac{km}{h} \times \frac{m}{¿?} \times \frac{¿?}{¿?}$$

Como la relación que vamos a utilizar es 1 km igual a 1.000 m, situamos el coeficiente 1.000 junto a los metros.

$$90\frac{km}{h} \times \frac{1.000\ m}{¿?} \times \frac{¿?}{¿?}$$

Y si deseamos que la fracción muestre una relación de equivalencia, debajo de 1.000 m deberemos colocar 1 km.

$$90\frac{km}{h} \times \frac{1.000\ m}{1\ km} \times \frac{¿?}{¿?}$$

Repetimos el razonamiento, pero ahora con las horas. Sabemos que 1 h son 3.600 s. Deseamos cambiar horas por segundos. Por lo tanto, si horas está inicialmente en el denominador, deberemos situar segundos en el denominador de la última fracción.

$$90\frac{km}{h}\times\frac{1.000\ m}{1\ km}\times\frac{¿?}{s}$$

La relación que vamos a utilizar es que 1 h son 3.600 s. Por lo que colocamos el coeficiente 3.600 junto a los segundos.

$$90\frac{km}{h}\times\frac{1.000\ m}{1\ km}\times\frac{¿?}{3.600\ s}$$

Y para garantizar que la fracción representa una relación de equivalencia, colocamos 1 h en el numerador de la última fracción.

$$90\frac{km}{h}\times\frac{1.000\ m}{1\ km}\times\frac{1\ h}{3.600\ s}$$

Fíjate que 90 lo podemos escribir como 90/1, por lo que tendríamos:

$$\frac{90\ km}{1\ h}\times\frac{1.000\ m}{1\ km}\times\frac{1\ h}{3.600\ s}$$

Ya podemos operar con las fracciones. En el producto de fracciones los numeradores se multiplican entre sí y los denominadores se multiplican entre sí. Aplicamos esta regla tanto a los números como a las unidades.

$$\frac{90\ km\times 1.000\ m\times 1\ h}{1\ h\times 1\ km\times 3.600\ s}$$

$$\frac{90\ \times 1.000\ \times 1\times km\times m\times\ h}{1\ \times 1\times 3.600\ \times h\times km\times s}$$

$$\frac{90.000\times km\times m\times\ h}{3.600\ \times h\times km\times s}$$

Al igual que podemos simplificar con los números que se repiten en multiplicaciones del numerador y del denominador, también podemos simplificar con las unidades que se repiten.

- 90.000 dividido entre 3.600 es igual a 25.
- Los kilómetros del numerador cancelan con los kilómetros del denominador.
- Las horas del numerador cancelan con las horas del denominador.

Quedando la siguiente velocidad en unidades del Sistema Internacional:

$$25\frac{m}{s}$$

Otro ejemplo. Ya hemos nombrado en unidades anteriores la magnitud densidad. La densidad es la cantidad de materia por unidad de volumen. Su unidad en el S.I. es kilogramo dividido por metro cúbico. Vamos a aprender a pasar esta unidad a gramo dividido por centímetro cúbico.

$$2.700\frac{kg}{m^3}$$

Debemos convertir kilogramo en gramo y metro cúbico en centímetro cúbico.

$$2.700\frac{kg}{m^3}\times\frac{¿?}{¿?}\times\frac{¿?}{¿?}$$

En primer lugar, vamos a pasar de kilogramo a gramo. Como kilogramo aparece en el numerador, situamos a gramo en el numerador de la primera fracción.

$$2.700\frac{kg}{m^3}\times\frac{g}{¿?}\times\frac{¿?}{¿?}$$

La relación de equivalencia entre masas es la siguiente: 1 kg son 1.000 g. Por lo tanto, situamos el número 1.000 junto a la unidad de gramos.

$$2.700\frac{kg}{m^3}\times\frac{1.000\ g}{¿?}\times\frac{¿?}{¿?}$$

Y como la equivalencia es: 1 kg = 1.000 g, situamos en el denominador de la primera fracción la magnitud 1.000 g.

$$2.700\frac{kg}{m^3}\times\frac{1.000\ g}{1\ kg}\times\frac{¿?}{¿?}$$

Convertimos metro cúbico en centímetro cúbico. Como metro cúbico aparece en el denominador, situamos centímetro cúbico en el denominador de la última fracción.

$$2.700\frac{kg}{m^3}\times\frac{1.000\ g}{1\ kg}\times\frac{¿?}{cm^3}$$

La relación de equivalencia entre volúmenes es la siguiente: 1 metro cúbico son 10^6 centímetros cúbicos. Por lo que situamos el número 10^6 junto a la unidad del centímetro cúbico.

$$2.700\frac{kg}{m^3}\times\frac{1.000\ g}{1\ kg}\times\frac{¿?}{10^6 cm^3}$$

Completamos el numerador que nos falta con la magnitud 1 metro cúbico.

$$2.700\frac{kg}{m^3}\times\frac{1.000\ g}{1\ kg}\times\frac{1\ m^3}{10^6 cm^3}$$

Expresamos la cantidad inicial 2.700 como una fracción.

$$\frac{2.700\ kg}{1\ m^3}\times\frac{1.000\ g}{1\ kg}\times\frac{1\ m^3}{10^6 cm^3}$$

Multiplicamos en horizontal todos los numeradores, y multiplicamos en horizontal todos los denominadores.

$$\frac{2.700\ kg\times 1.000\ g\times 1\ m^3}{1\ m^3\times 1\ kg\times 10^6 cm^3}$$

$$\frac{2.700\times 1.000\times 1\ \times kg\times\ g\times m^3}{1\times 1\times 10^6\times\ m^3\times\ kg\times cm^3}$$

$$\frac{2.700.000 \times kg \times \ g \times m^3}{10^6 \times \ m^3 \times \ kg \times cm^3}$$

Simplificamos números y unidades.

$$2{,}7 \frac{g}{cm^3}$$

PARA PENSAR 2. Practica los factores de conversión con los siguientes cambios de unidades. Pasa a las unidades de referencia del S.I.

a) $1{,}23 \ hm/min$ *(m/s)*

b) $6{,}02 \ cg/mm^2$ *(kg/m²)*

c) $7{,}01 \cdot 10^2 \ kg/h$ *(kg/s)*

4.4. Representar M.R.U. en una gráfica

¿Cómo unir, de manera visual, el tiempo y la posición de un objeto que se mueve en M.R.U.?

Con una representación en el plano de unas coordenadas que se unen mediante líneas. Es lo que en Ciencia se llama gráfica.

La gráfica necesita de un sistema de representación. Si este sistema está formado por dos líneas perpendiculares que se cortan, el sistema se conoce como sistema cartesiano (en honor al filósofo y matemático francés René Descartes, del siglo XVII)

Coordenadas en un plano: ejemplo del tablero de ajedrez

El tablero de ajedrez es un ejemplo de sistema cartesiano. Las columnas del tablero se representan por letras y las filas por números. Cada casilla del tablero está definida de manera única por una letra y por un número.

Practiquemos con las coordenadas del ajedrez. En el siguiente tablero tienes distribuidas letras. Con esas letras se pueden formar palabras. Y con las palabras, una frase.

Descubre la frase oculta comenzado en la casilla marcada como "inicio" y terminando en la casilla marcada como "fin". Para pasar de casilla a casilla debes hacerlo con el movimiento del caballo: dos casillas de avance en línea recta más una tercera casilla la derecha o a la izquierda (el movimiento del caballo forma una letra L mayúscula).

No puedes pasar por las casillas que no tengan letra. Y no puedes pasar más de una vez por una misma casilla.

Debajo del tablero tienes una tabla que te puede ser útil para señalar las coordenadas de cada casilla de paso.

Como pista, aquí tienes la frase… aunque de forma incompleta.

EL _ _ _ _ _ _ _ D_ _ _ _ _ _ _ _ E_ _N _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _O

8		S	T		A	Z		
7			C	E	L		M	E
6	U	A		L			A	
5		A		E inicio	I	E	R	E
4		N	B	R				N
3	D	T	I	S	R	J	T	D
2	S		O	A	S		O fin	
1		E	E				E	
	A	B	C	D	E	F	G	H

LETRA	CASILLA	LETRA	CASILLA	LETRA	CASILLA	LETRA	CASILLA
E	D5						
L	E7						

PARA PENSAR 5. ¿Qué fracción del total de casillas del tablero están cubiertas por letras de la frase oculta? ¿Crees que se puede pasar por todas las casillas del tablero una sola vez, sin repetición, usando solo el movimiento del caballo? ¿Existe alguna figura del ajedrez que consiga hacerlo fácilmente?

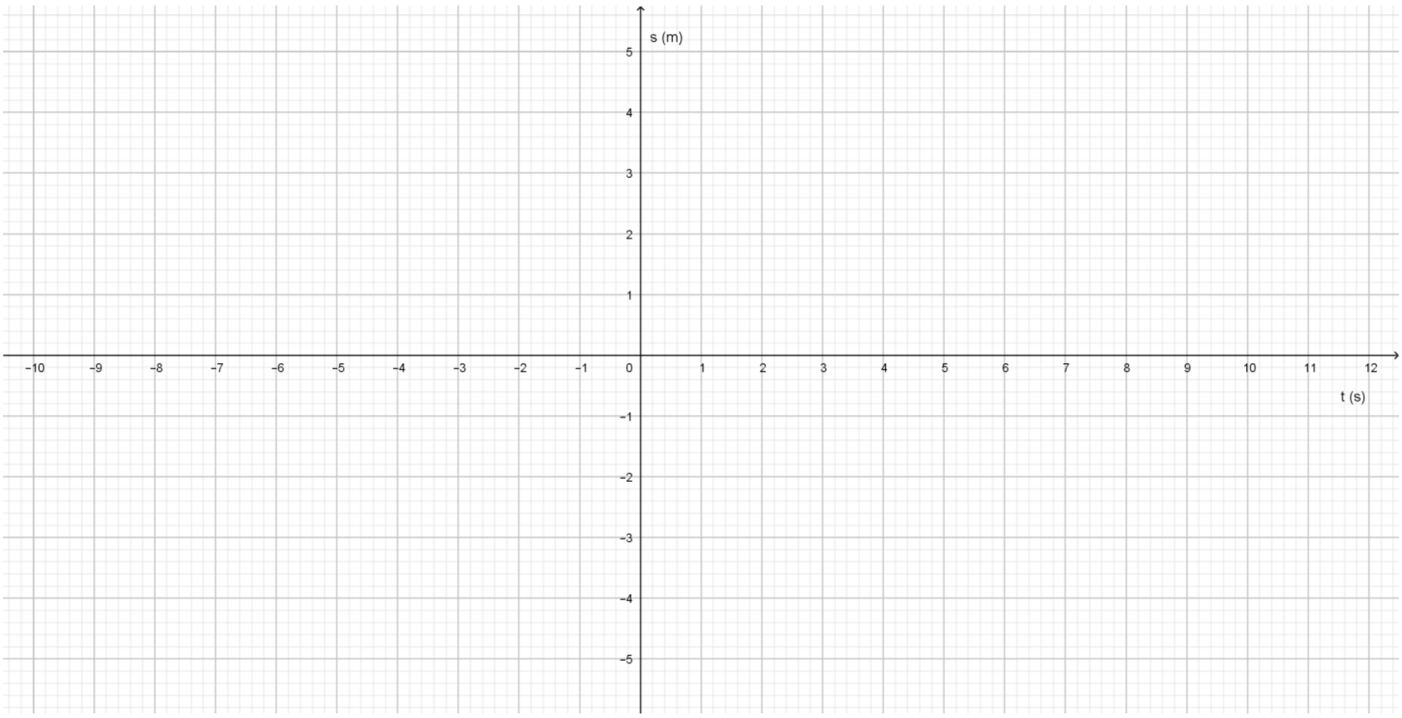
Coordenadas en un gráfica espacio-tiempo de M.R.U.

En ajedrez, el desplazamiento horizontal lo marcan las letras (A, B, C, ...) y el desplazamiento vertical lo marcan los números (1, 2, 3, ...). La unión de una letra y de un número indica una casilla.

En una gráfica espacio-tiempo, el desplazamiento horizontal lo señala el tiempo y el desplazamiento vertical lo señala la posición. La unión de un valor del tiempo y de un valor de la posición indica un punto.

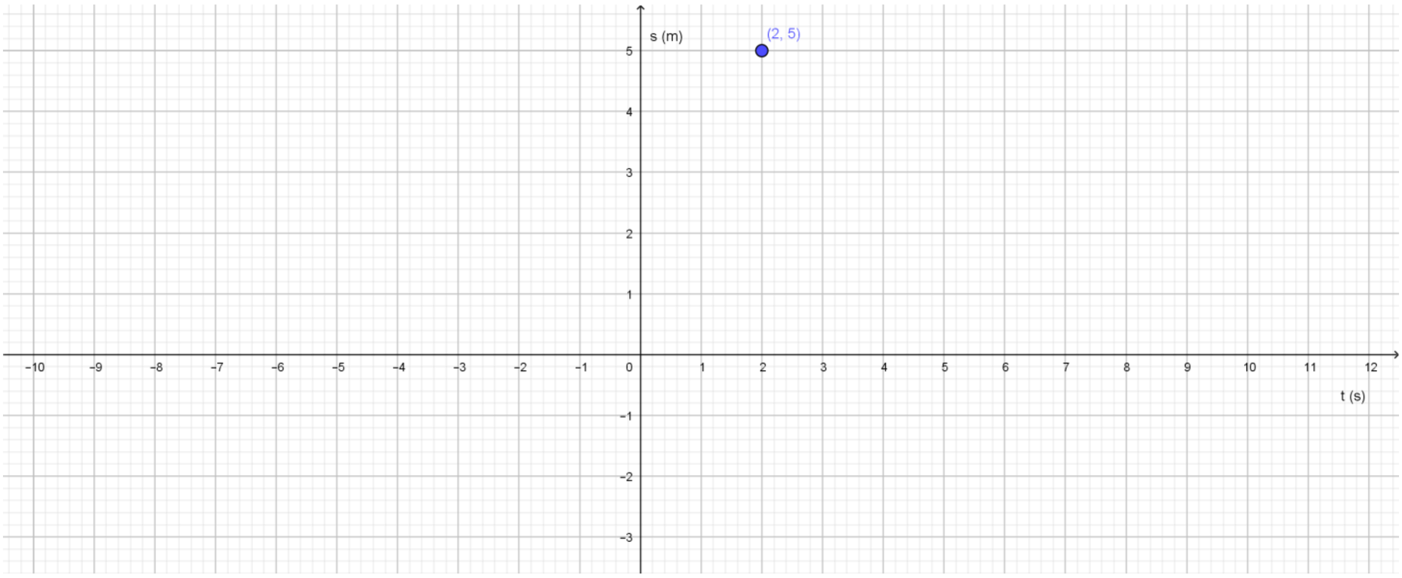
Si trabajamos en unidades del S.I., cada unidad de referencia del eje horizontal será un segundo y cada unidad de referencia del eje vertical será un metro.

El corte del eje horizontal con el eje vertical señala el origen de coordenadas, donde el tiempo vale 0 segundos y la posición vale 0 metros.



PARA PENSAR 6. ¿Qué es un punto en la realidad? ¿Tiene tamaño un punto? ¿Cuántos puntos hay en un plano? ¿Existen puntos en el espacio tridimensional?

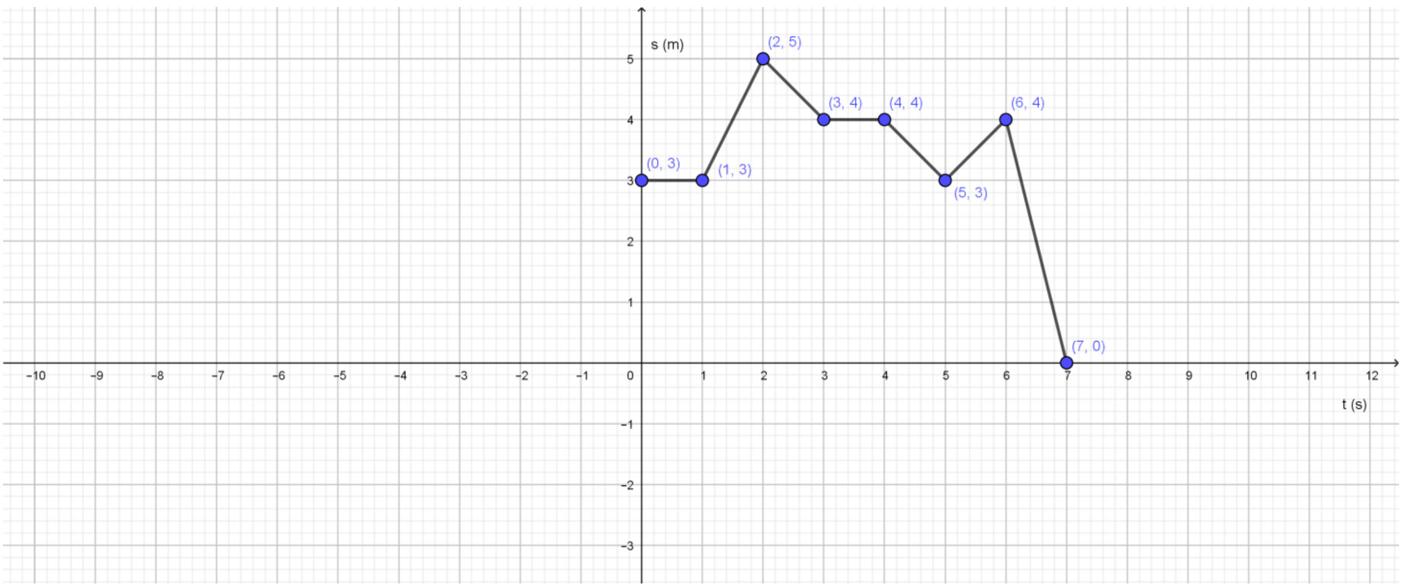
Imagina que un objeto se mueve con velocidad constante. Si a los 2 segundos de comenzar a moverse se encuentra a 5 metros del origen de distancias, sus coordenadas cartesianas serán (2, 5). Fíjate cómo queda representado el punto en el sistema de referencia cartesiano.



Si tenemos un conjunto de puntos, y los unimos con segmentos, dibujaremos la gráfica del movimiento. En movimientos M.R.U. supondremos que entre dos puntos el movimiento siempre se realiza con velocidad constante. Por eso, las gráficas M.R.U. son líneas rectas.

En la siguiente gráfica, se cumplen las siguientes condiciones:

- (0,3) significa que a los 0 s la posición es 3 m.
- (1,3) significa que para 1 s la posición sigue siendo 3 m.
- (2,5) significa que a los 2 s la posición es 5 m.
- (3,4) significa que a los 3 s la posición es 4 m.
- (4,4) significa que a los 4 s la posición es 4 m.
- (5,3) significa que a los 5 s la posición es 3 m.
- (6,4) significa que a los 6 s la posición es 4 m.
- (7,0) significa que a los 7 s la posición es 0 m.



PARA PENSAR 7. ¿Cómo entender las gráficas que son segmentos crecientes? ¿Y los decrecientes? ¿Y los segmentos completamente horizontales? ¿Cómo es posible que el objeto se encuentre en el origen de coordenadas tras pasar 7 segundos de movimiento? ¿Tiene sentido ir hacia atrás en el tiempo?

Obtener velocidad a partir de dos puntos de una gráfica espacio-tiempo en M.R.U.

Tomemos dos puntos de la gráfica anterior unidos por un segmento. Por ejemplo (1,3) y (2,5).

El primer valor del paréntesis es el tiempo. Y el segundo valor es la posición.

Si consideramos que el objeto inicia su movimiento en (1,3) y lo termina en (2,5) podemos afirmar:

- Tiempo inicial $t_0 = 1\ s$
- Posición inicial $s_0 = 3\ s$
- Tiempo final $t_f = 2\ s$
- Posición final $s_f = 5\ s$

Con estos datos podemos aplicar la fórmula de la velocidad en M.R.U.

$$v = \frac{s_f - s_0}{t_f - t_0}$$

$$v = \frac{5 - 3}{2 - 1} = 2\ m/s$$

Es decir: viendo la gráfica de un M.R.U. siempre podemos obtener los valores de la velocidad uniforme en cada tramo del movimiento.

PARA PENSAR 8. ¿Puede una velocidad salir negativa? ¿Cómo sería su representación gráfica?

4.5. Ecuación general del M.R.U. para obtener la posición final de un objeto

En la unidad anterior trabajamos con la expresión para obtener la velocidad en M.R.U.

$$v = \frac{s_f - s_0}{t_f - t_0}$$

En el numerador aparece la diferencia entra la posición final e inicial. Y en el denominador aparece la diferencia entre el tiempo final e inicial.

Las igualdades las podemos leer de izquierda a derecha, o bien de derecha a izquierda. Es decir, estas dos expresiones significan exactamente lo mismo:

- A = B (A es igual a B)
- B = A (B es igual a A)

Por lo tanto, vamos a cambiar el orden de los miembros en la expresión de la velocidad.

$$\frac{s_f - s_0}{t_f - t_0} = v$$

Desde Primaria sabemos que, en una igualdad, los términos que están dividiendo en un lado, pasan al otro lado multiplicando. Así hacemos con el denominador que está a la izquierda.

$$s_f - s_0 = v \times (t_f - t_0)$$

Las cantidades que están restando en un miembro, pasan sumando al otro miembro. Y así hacemos con la posición inicial.

$$s_f = v \times (t_f - t_0) + s_0$$

Sabemos que la suma es conmutativa: el orden de los sumandos no altera al resultado final de la suma. Por lo que reordenamos los términos de la suma que está a la derecha de la igualdad. Y llegamos a una expresión para obtener la posición final de un objeto que se mueve con velocidad constante, y que sale de una posición inicial y de un tiempo inicial conocidos.

Fórmula de la posición final en M.R.U.
$s_f = s_0 + v \times (t_f - t_0)$

¿Cómo utilizar esta fórmula?

Si conocemos la posición inicial, la velocidad uniforme y el intervalo de tiempo, la fórmula nos da directamente el valor de la posición final.

Ejemplo resuelto: Sonia avanza en línea recta en un patinete eléctrico. No va por la acera (que está prohibido y es un riesgo para los peatones). Viaja por la calzada. A los 30 segundos de comenzar su movimiento, se encuentra a 80 metros en línea recta del punto de salida. En ese instante, Sonia fija la velocidad del patinete a 20 km/h. ¿A qué distancia del punto de salida se encontrará cuando haya pasado 1 minuto desde que comenzó su movimiento a 20 km/h?

Un error muy típico sería afirmar que como 1 minuto es el doble de tiempo de 30 segundos, la distancia final será el doble de 80 metros. Esto no es correcto porque el enunciado no nos dice nada de cómo ha sido el movimiento de Sonia en los primeros 30 segundos. Por lo que no podemos suponer que estuviese moviéndose con una velocidad de 20 km/h en esos primeros 30 segundos.

¡Es muy importante leer con calma el enunciado y sacar poco a poco la información!

Además, **debemos dejar las magnitudes en las mismas unidades**. Si el enunciado habla de distancias, o las dejamos en metros o las dejamos en kilómetros. Y si el enunciado habla de tiempos, o los dejamos en segundos o los dejamos en horas. No podemos mezclar.

Una tabla puede venir bien para ordenar los datos.

Datos del enunciado
Posición inicial: $s_0 = 80\ m$
Tiempo inicial: $t_0 = 30\ s$
Posición final: $s_f =¿?$
Tiempo final: $t_f = 1\ \text{min} = 60\ s$
Velocidad constante: $v = 20\frac{km}{h} \times \frac{1.000\ m}{1\ km} \times \frac{1\ h}{3.600\ s} = 5{,}56\frac{m}{s}$

En la tabla es fácil visualizar cuál es el dato que no conocemos: la posición final.

Sustituimos los datos en la ecuación de la posición final.

$$s_f = s_0 + v \times (t_f - t_0)$$

$$s_f = 80\ + 5{,}56 \times (60 - 30)$$

Operamos, en primer lugar, dentro del paréntesis.

$$s_f = 80\ + 5{,}56 \times (30)$$

Efectuamos el producto (¡Ojo con las jerarquías de operaciones!).

$$s_f = 80\ + 166{,}8$$

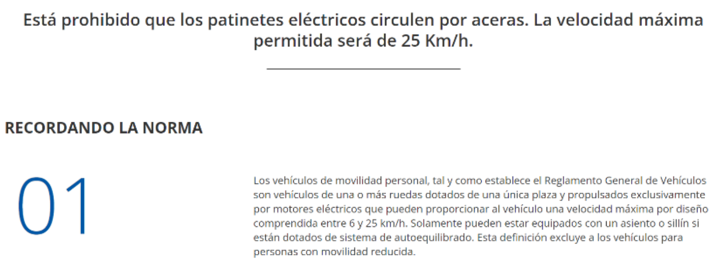
Sumamos.

$$s_f = 246{,}8\ m$$

No olvides situar la unidad al terminar las operaciones. Como hemos dejado todas las magnitudes iniciales en las unidades de referencia del Sistema Internacional, la longitud quedará expresada en metros.

PARA PENSAR 9. ¿Piensas que una velocidad de 20 km/h es suficientemente grande para tener que llevar protección (casco) al usar un patinete? ¿Un coche con un peatón, a esa velocidad, puede ser grave?

En el siguiente enlace tienes información actualizada por la Dirección General de Tráfico sobre las normas en el uso de patinetes por la vía pública:



Está prohibido que los patinetes eléctricos circulen por aceras. La velocidad máxima permitida será de 25 Km/h.

RECORDANDO LA NORMA

01

Los vehículos de movilidad personal, tal y como establece el Reglamento General de Vehículos son vehículos de una o más ruedas dotados de una única plaza y propulsados exclusivamente por motores eléctricos que pueden proporcionar al vehículo una velocidad máxima por diseño comprendida entre 6 y 25 km/h. Solamente pueden estar equipados con un asiento o sillín si están dotados de sistema de autoequilibrado. Esta definición excluye a los vehículos para personas con movilidad reducida.

https://www.dgt.es/muevete-con-seguridad/viaja-seguro/en-patinete

Y como una imagen vale más que 1.000 palabras, aquí tienes enlace a una noticia del periódico El Mundo, sobre un estudio de las consecuencias de los accidentes de un patinete al impactar con un vehículo y al atropellar a un peatón.

Cuidado con los patinetes: chocar a 25 km/h ya causa heridas graves a conductores y peatones

Circular con un patinete por la ciudad no es un juego, es una responsabilidad.

https://www.youtube.com/watch?v=jWz_5VVv8aU

Introducción a la resolución de ecuaciones de primer grado

En el ejercicio que hemos resuelto sobre el monopatín con M.R.U. el valor desconocido era la posición final del movimiento. ¿Qué ocurre si el valor desconocido es la posición inicial? ¿O el tiempo inicial? ¿O el tiempo final? ¿Cómo podemos operar con la fórmula de la posición final?

Ejemplo resuelto: Lucas también tiene un patinete eléctrico. Está parado en un semáforo en rojo en la Calle Camino de Ronda (Granada), que es una gran recta. Cuando el semáforo pasa a verde son exactamente las 11.00 en punto de la mañana. Suponiendo que avanza todo el tiempo con una velocidad constante de 5 m/s y que se detiene pasados 300 metros por otro semáforo que se pone rojo, ¿cuánto tiempo ha estado circulando entre semáforo y semáforo?

Ordenamos los datos del enunciado en una tabla.

Datos del enunciado
Posición inicial: $s_0 = 0\ m$
Tiempo inicial: $t_0 = 0\ s$
Posición final: $s_f = 300\ m$
Tiempo final: $t_f =¿?$
Velocidad constante: $v = 5\ m/s$

Asumimos un tiempo inicial igual a 0, y una posición inicial igual a 0. Esto simplifica bastante los cálculos y es una hipótesis muy utilizada en ejercicios de M.R.U.

Sustituimos los datos en la ecuación de la posición final.

$$s_f = s_0 + v \times (t_f - t_0)$$

$$300 = 0\ + 5 \times (t_f - 0)$$

Operamos en el paréntesis. Y el valor 0 que está sumando, podemos eliminarlo.

$$300 = 0\ + 5 \times (t_f)$$

$$300 = 5 \times (t_f)$$

Y obtenemos una igualdad donde hay un valor desconocido en el miembro de la derecha. Ese valor es el tiempo final. ¿Cuánto vale? No lo sabemos. Ese es nuestro problema: obtener el valor del tiempo final.

Cuando trabajamos con una igualdad donde aparece un valor desconocido, decimos que la igualdad es una **ecuación**. Y al valor desconocido lo llamamos **incógnita** (algo que no conocemos y deseamos descubrir).

Es muy cómodo usar letras para representar las incógnitas. Puedes usar la letra “a”, la letra “b”, la letra “x” o la letra que te de la real gana. Lo importante es que entiendas que el valor de la incógnita es un número que tienes que descubrir.

Como la incógnita es un número, puedes operar con ella como si fuese un número. Por ejemplo: puede hacer el producto “cinco veces la incógnita”. ¿Cuánto vale ese producto? No lo sabemos. Pero podemos escribir la operación matemática en la ecuación.

$$300 = 5 \times t_f$$

Es decir, el valor de la incógnita t_f es un número que multiplicado por 5 da como resultado 300. Puedes ver la ecuación de la siguiente forma, que seguro lo habrás utilizado en Primaria al operar con números.

$$300 = 5 \times \square$$

¿Qué número debes escribir dentro del cuadrado para que el resultado final sea 300?

Resolver una ecuación con una incógnita es simplemente resolver un ejercicio de cuadraditos como los que hacías en Primaria.

Puedes ir probando hasta llegar a 300. 5x1 = 5, 5x2 = 10, 5x3 = 15…. Pero ese método es poco recomendable. Porque tardas mucho y porque puede que el número que buscas sea un número con decimales, y quizás no lo encontrases ni probando durante 2 horas seguidas.

Lo más cómodo es pasar el factor 5 que está multiplicando en el miembro de la derecha, al miembro de la izquierda dividiendo.

$$\frac{300}{5} = \square$$

$$60 = \square$$

El número que va dentro del cuadradito es 60. Nuestra incógnita vale 60. Solo nos falta poner las unidades a la magnitud.

$$t_f = 60\ s$$

Lucas ha avanzado 60 segundos (1 minuto) a velocidad constante, entre semáforo y semáforo.