Afgeleide: een dynamisch proces

www.karelappeltans.be

March 8, 2024

Contents

1 Inleiding

De vernieuwing van het secundair onderwijs is op 1 september 2023 aanbeland in het 5de middelbaar. Hierbij horen ook nieuwe leerplannen. Ikzelf geef les aan het Virga Jessecollege van Hasselt. Een school die verbonden is aan het KOV, katholiek onderwijs Vlaanderen. Alle voorbeelden komen uit het leerplan dat geschreven is voor 12 graaduren voor verschillende richtingen in de doorstroomfinaliteit. Voor de andere leerplannen gelden uiteraard minder (uitgebreide) leerplandoelen.

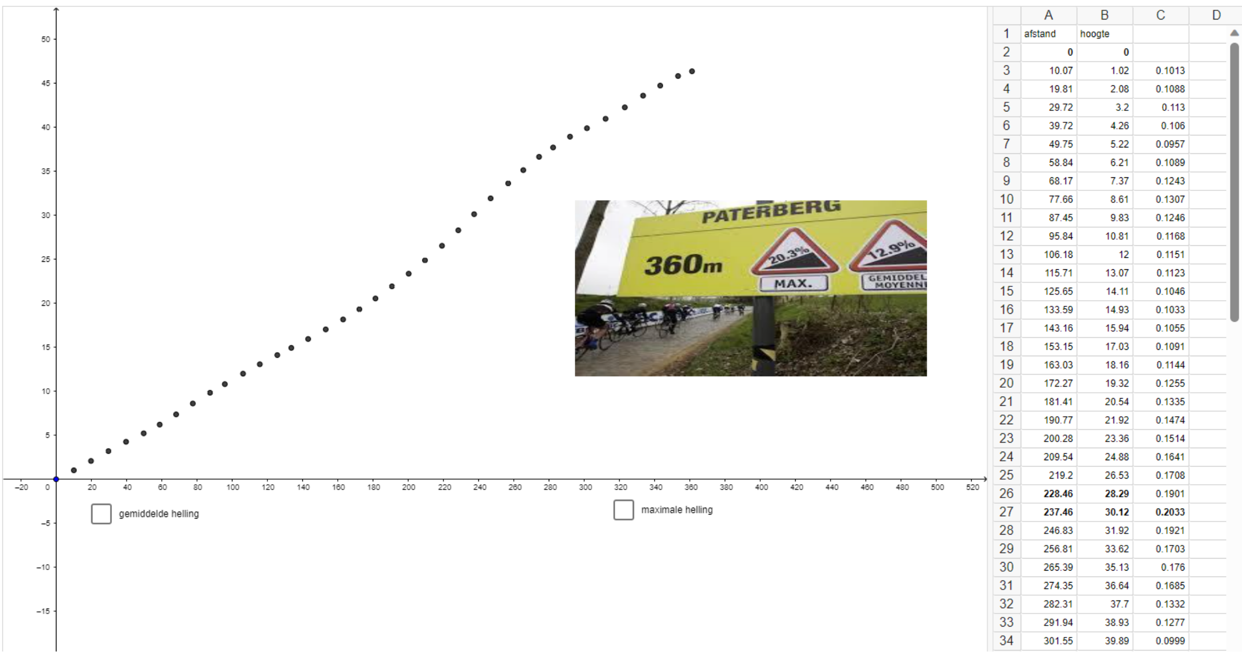
2 Leerplandoelstellingen

2.1 LPD01

LPD·1 → De·leerlingen·beschrijven·fenomenen·uit·de·realiteit·aan·de·hand·van·wiskundige· concepten·uit·de·derde·graad.·¶

Wenk: → Je·kan·aan·dit·doel·werken·door·voldoende·contexten·bij·de·inhoudelijke·doelen· aan·bod·te·laten·komen.·Telkens·wanneer·er·met·een·context·wordt·gewerkt,·zal· een·wiskundig·concept·worden·gebruikt·om·iets·uit·de·realiteit·te·beschrijven.·Je· kan·zowel·werken·met·richtingspecifieke·als·actuele·contexten.¶

Wenk: → Je·kan·via·dit·doel·ook·werken·aan·het·STEM-doel·over·de·wisselwerking·tussen· wetenschappen,·technologie,·wiskunde·en·de·maatschappij.¶



	A	B	C	D
1	afstand	hoogte		
2	0	0		
3	10.07	1.02	0.1013	
4	19.81	2.08	0.1088	
5	29.72	3.2	0.113	
6	39.72	4.26	0.106	
7	49.75	5.22	0.0957	
8	58.84	6.21	0.1089	
9	68.17	7.37	0.1243	
10	77.66	8.61	0.1307	
11	87.45	9.83	0.1246	
12	95.84	10.81	0.1168	
13	106.18	12	0.1151	
14	115.71	13.07	0.1123	
15	125.65	14.11	0.1046	
16	133.59	14.93	0.1033	
17	143.16	15.94	0.1055	
18	153.15	17.03	0.1091	
19	163.03	18.16	0.1144	
20	172.27	19.32	0.1255	
21	181.41	20.54	0.1335	
22	190.77	21.92	0.1474	
23	200.28	23.36	0.1514	
24	209.54	24.88	0.1641	
25	219.2	26.53	0.1708	
26	**228.46**	**28.29**	0.1901	
27	**237.46**	**30.12**	**0.2033**	
28	246.83	31.92	0.1921	
29	256.81	33.62	0.1703	
30	265.39	35.13	0.176	
31	274.35	36.64	0.1685	
32	282.31	37.7	0.1332	
33	291.94	38.93	0.1277	
34	301.55	39.89	0.0999	

Figure 1: https://www.geogebra.org/m/Bt3aCMHz

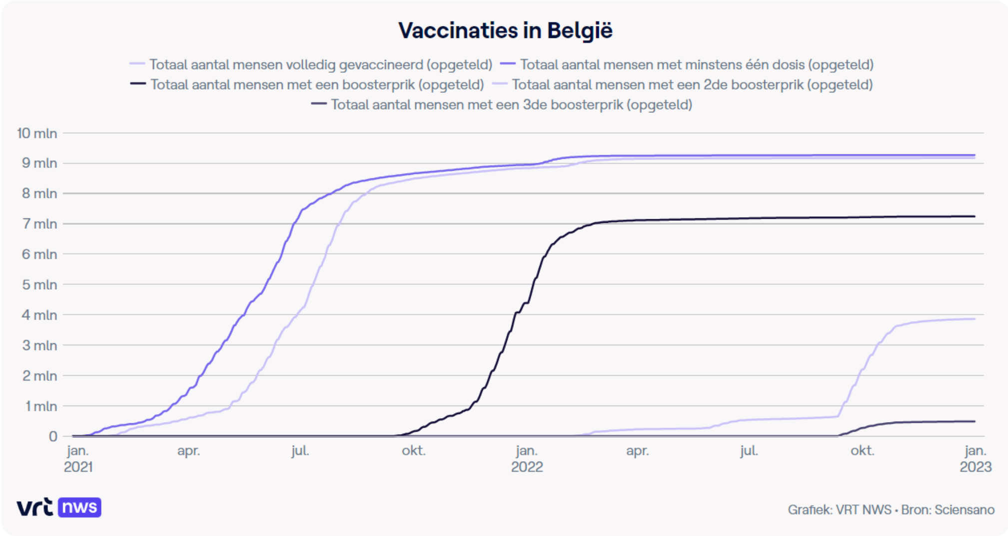


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/VEWmAvhZ

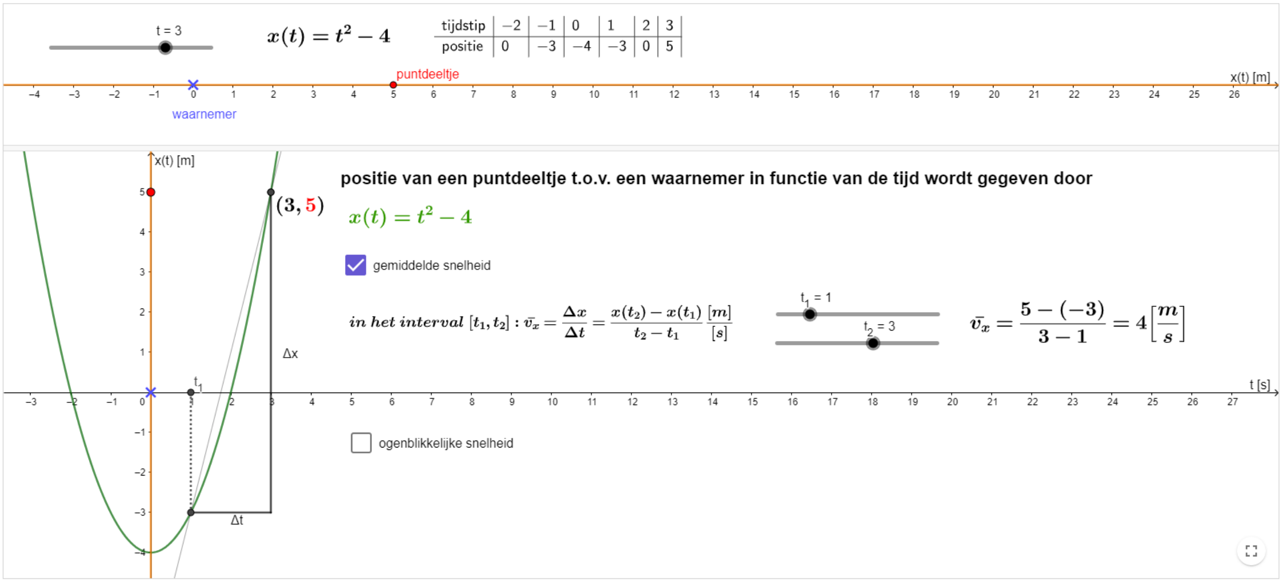


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/nsGgY8T3

2.2 LPD02

LPD·2 → De·leerlingen·lossen·vraagstukken·en·problemen·op·door·te·mathematiseren·en· demathematiseren·en·door·gebruik·te·maken·van·heuristieken.·¶

Duiding: → Bij·vraagstukken·is·de·oplossingsmethode·vaak·aansluitend·bij·de·pas·geziene· leerstof,·terwijl·bij·problemen·oplossen·heuristieken·en·een·oplossingsmethode· moeten·worden·gekozen.¶

Wenk: → Je·kan·het·problemen·oplossen·best·integreren·in·het·normale·lesgebeuren·en· regelmatig·doorheen·het·schooljaar·aan·bod·laten·komen.·De·leerlingen·zullen·die· vaardigheid·maar·verwerven·doorheen·een·actief·leerproces.·Je·kan·bijvoorbeeld· na·een·aantal·leerinhouden·of·hoofdstukken·problemen·laten·oplossen·waarbij· leerlingen·zelf·de·correcte·leerinhoud·moeten·selecteren.·Je·kan·ook·problemen· aan·bod·laten·komen·die·los·staan·van·de·geziene·leerinhouden.¶

Wenk: → Je·kan·leerlingen·zelfstandig·geschikte·heuristieken·laten·kiezen·en·expliciteren.· Voorbeelden·van·heuristieken·die·aan·bod·kunnen·komen:·het·gegeven·en· gevraagde·expliciteren,·het·probleem·herformuleren·of·opdelen·in· deelproblemen,·een·schets·of·tekening·maken,·bijzondere·gevallen·onderzoeken,· tijdelijk·één·van·de·voorwaarden·laten·vallen,·van·achter·naar·voor·werken,·alle· mogelijkheden·opschrijven·en·dan·elimineren.¶

Wenk: → Het·demathematiseren·kan·gebeuren·via·een·antwoordzin.·Controleren·of·een· antwoord·realistisch·kan·zijn,·hoort·ook·bij·deze·stap·van·het·oplossingsproces.¶

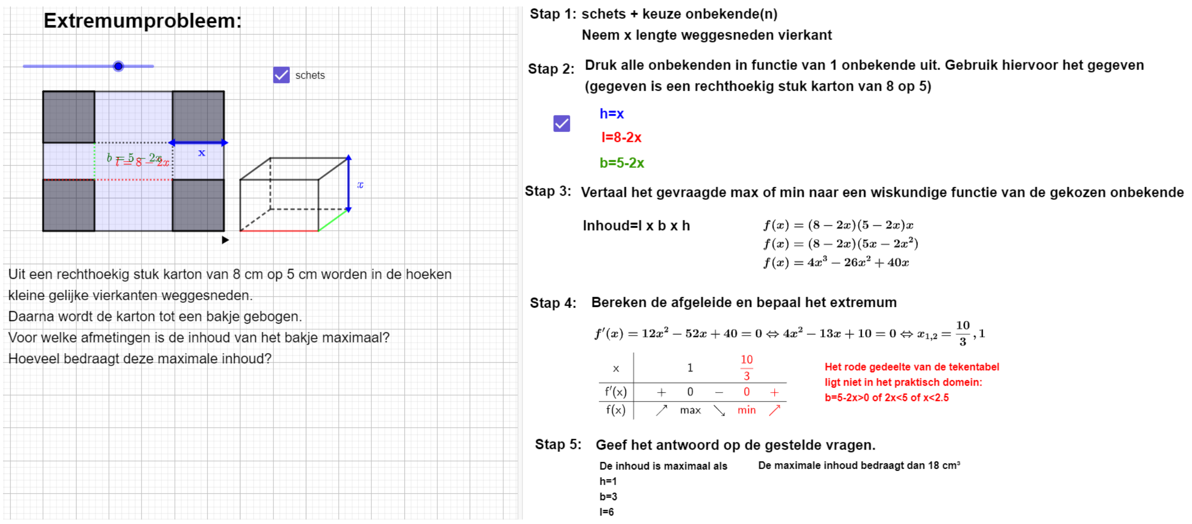


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/gceq8KGM

2.3 LPD03

LPD·3 → De·leerlingen·gebruiken·ICT·om·berekeningen·uit·te·voeren·en·grafische·voorstellingen·te·maken.·¶

Wenk: → Je·kan·ICT·breed·en·strategisch·(laten)·inzetten·en·combineren·met·de·inhoudelijke·doelen.¶

Wenk: → Voorbeelden·van·grafische·voorstellingen:·grafieken·van·functies·of·van·de·normale·verdeling.¶

Wenk: → Je·kan·aandacht·schenken·aan·het·zinvol·gebruik·van·ICT,·bv.·bij·berekeningen.¶

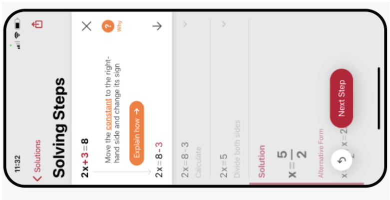


Figure 5: https://photomath.com/en

2.4 LPD04

LPD 4 De leerlingen beargumenteren wiskundige redeneringen en bewijzen wiskundige uitspraken.

★ Bewijstechnieken: rechtstreeks bewijs, bewijs uit het ongerijmde, bewijs door volledige inductie, ontkrachting door tegenvoorbeeld
Kwantoren

Wenk: Je kan dit doel breed inzetten en combineren met de inhoudelijke doelen. Wiskundige redeneringen of argumentaties komen bv. ook aan bod in oefeningen waarbij wiskundige eigenschappen worden toegepast.

Wenk: Je kan aandacht schenken aan het gestructureerd verwoorden en noteren van de gedachtegang bij een redenering met correct gebruik van vakterminologie. Je kan tijdens de les de leerlingen hun redenering mondeling laten uitleggen en de leerlingen evalueren door mogelijke fouten aan te wijzen en te laten verbeteren.

Wenk: De focus ligt bij behandelde bewijzen meer op het beargumenteren dan het zuiver reproduceren. Zo kan je bij een behandeld bewijs de redeneerstappen laten beargumenteren of werken in een gewijzigde situatie (zoals in een specifieke situatie of met andere symbolen). Voorbeelden: rekenregels en eigenschappen van bewerkingen (bv. logaritmen, matrices), formules voor afgeleiden van basisfuncties, hoofdstelling van integraalrekening.

Wenk: Voorbeelden bij ontkrachting door tegenvoorbeeld: voorwaarden controleren in de formulering van eigenschappen, niet-commutativiteit van matrices.

Wenk: Voorbeelden bij de bewijstechniek volledige inductie: formules voor combinaties, binomium van Newton, formule van de Moivre, formule voor de som van eerste n termen bij rijen.

Wenk: Het typevoorbeeld van een bewijs uit het ongerijmde is het bewijs van de irrationaliteit van vierkantswortels zoals $\sqrt{2}$. Je kan de bewijstechniek toepassen of als concept herhalen.

$TB : (x^n)' = n \cdot x^{n-1} \; \forall n \in \mathbb{N}_0$

Bewijs:

Bewijs via het principe van van volledige inductie

Uitspraak : $P(n) : (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Stap 1: $P(1)$ klopt : $(x^1)' = (x)' = 1$ (waarom?) en $1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$

Stap 2: inductiestap Als P(k) juist is, toon dan aan dat P(k+1) ook juist is

$$(x^{k+1})' = (x \cdot x^k)'$$
$$= (x)' \cdot x^k + x \cdot (x^k)' \quad \text{(productregel)}$$
$$= 1 \cdot x^k + x \cdot kx^{k-1} = x^k + k \cdot x^k = (k+1)x^k$$

Figure 6: https://www.geogebra.org/m/yvrncth8

$$TB : \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$$

Bewijs:
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \cdot \left(\frac{1}{g}\right) + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \cdot \left(\frac{1}{g}\right) + f \cdot \left(\frac{-g'}{g^2}\right)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$$

6 / 6

Figure 7: https://www.geogebra.org/m/yvrncth8

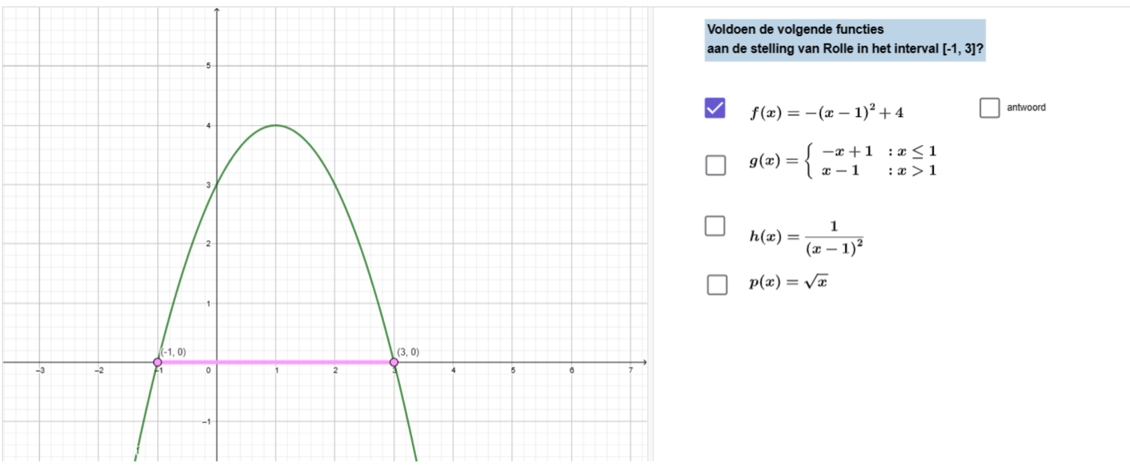


Figure 8: https://www.geogebra.org/m/dKUFet34

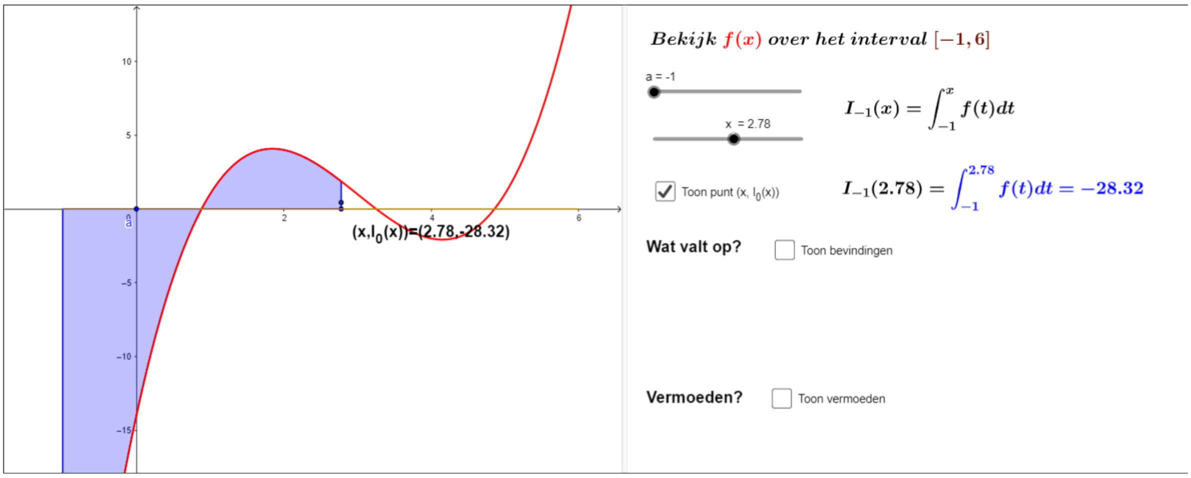


Figure 9: https://www.geogebra.org/m/QzHejD4G

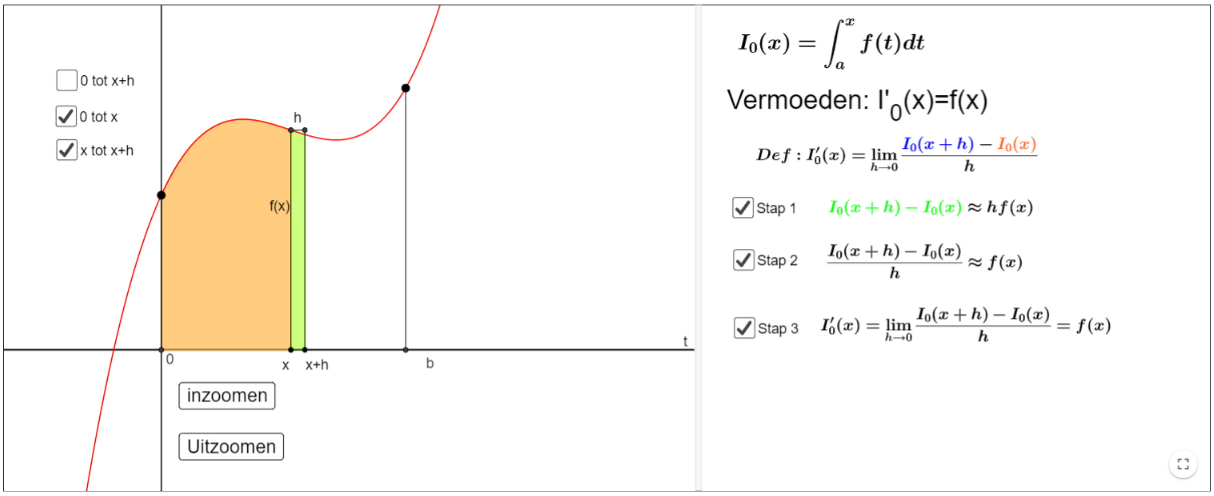


Figure 10: https://www.geogebra.org/m/QzHejD4G

2.5 LPD26

LPD 26 → De leerlingen bepalen grafisch en algebraïsch limieten van functies en analyseren het asymptotisch gedrag.

★ → Continuïteit

Wenk: → Je kan het limietbegrip voor functies formeel invoeren en zo LPD 45 realiseren.

Wenk: → Je kan de Euclidische deling van veeltermen gebruiken om horizontale of schuine asymptoten te bepalen bij rationale functies.

Extra: → Je kan de regel van de l'Hôpital gebruiken bij het bepalen van limieten van functies.

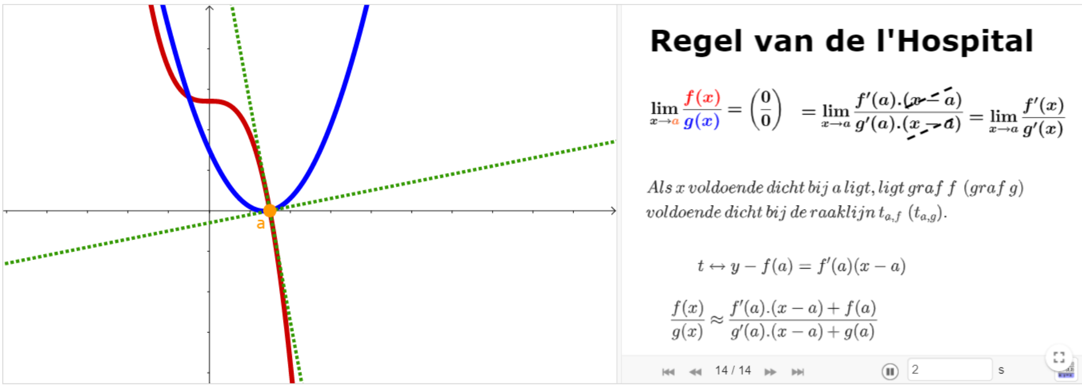


Figure 11: https://www.geogebra.org/m/D8F7EpY4

2.6 LPD27

LPD 27 → De leerlingen interpreteren de afgeleide als limiet van een differentiequotiënt en als richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek.

2de graad: → Richtingscoëfficiënt van een eerstegraadsfunctie

Wenk: → Je kan aandacht schenken aan het verschil tussen gemiddelde verandering versus ogenblikkelijke verandering (bv. trajectcontrole versus flitspaal). Dat verschil kan ook grafisch worden geduid.

Wenk: → Voorbeelden van contexten: snelheid, versnelling, marginale grootheden in de economie, debiet, helling van een berg, elasticiteit in de economie.

Wenk: → Je kan de vergelijking van de raaklijn aan een grafiek in een punt opstellen a.d.h.v. de afgeleide in een punt.

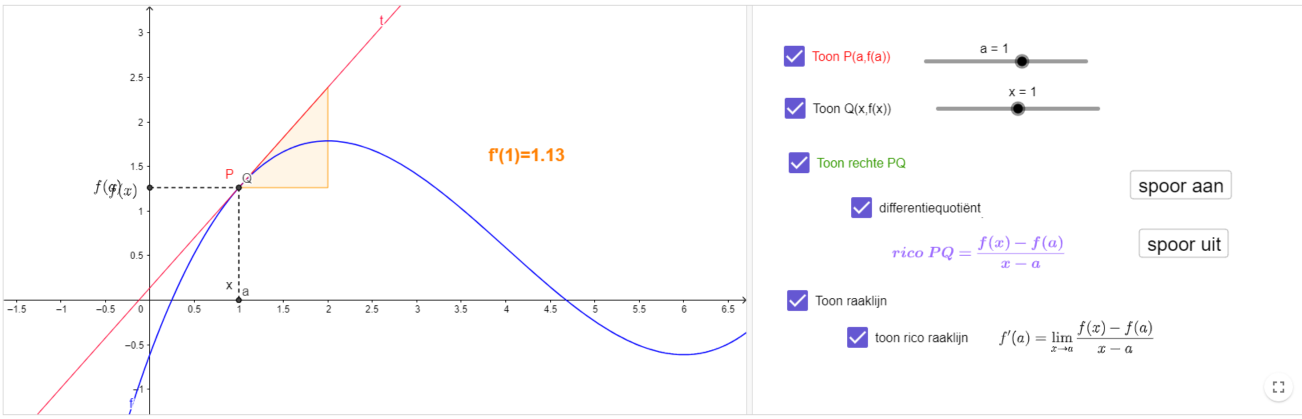


Figure 12: https://www.geogebra.org/m/NGkF3XS6

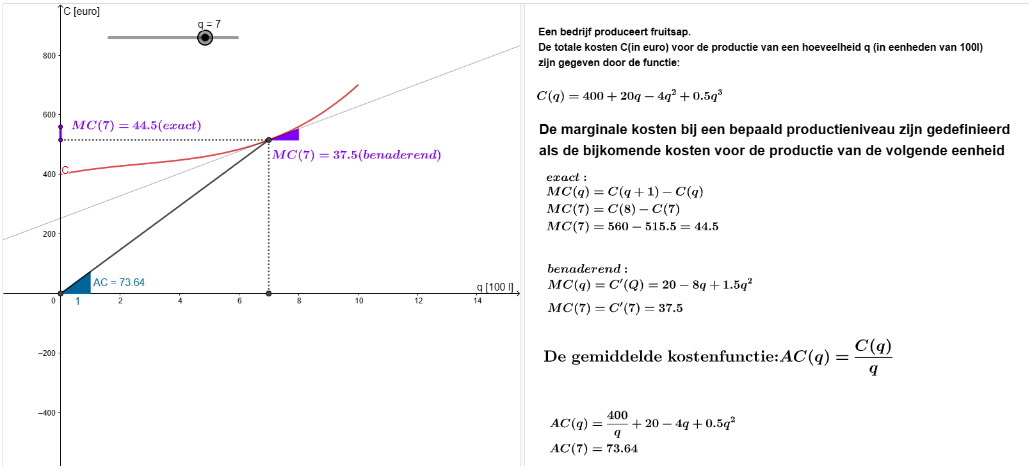


Figure 13: https://www.geogebra.org/m/qVhQfWrd

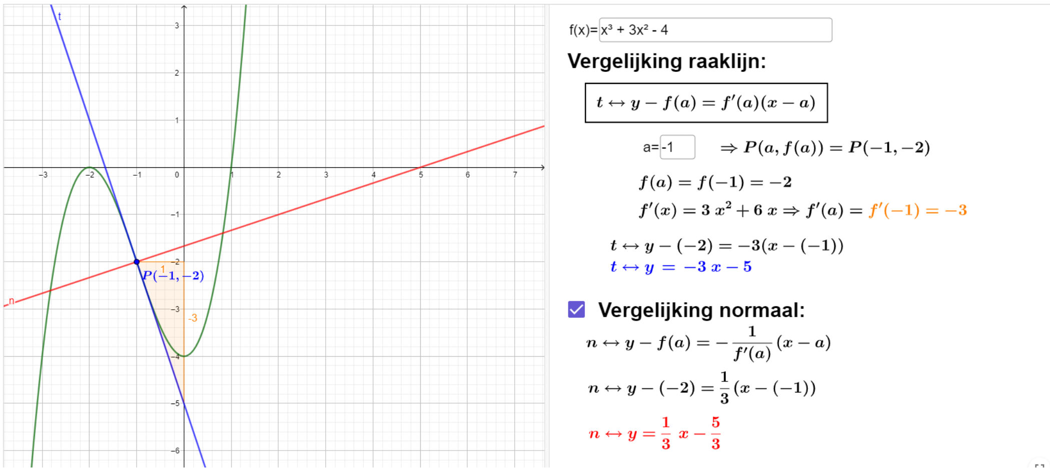


Figure 14: https://www.geogebra.org/m/EscjM2Rh

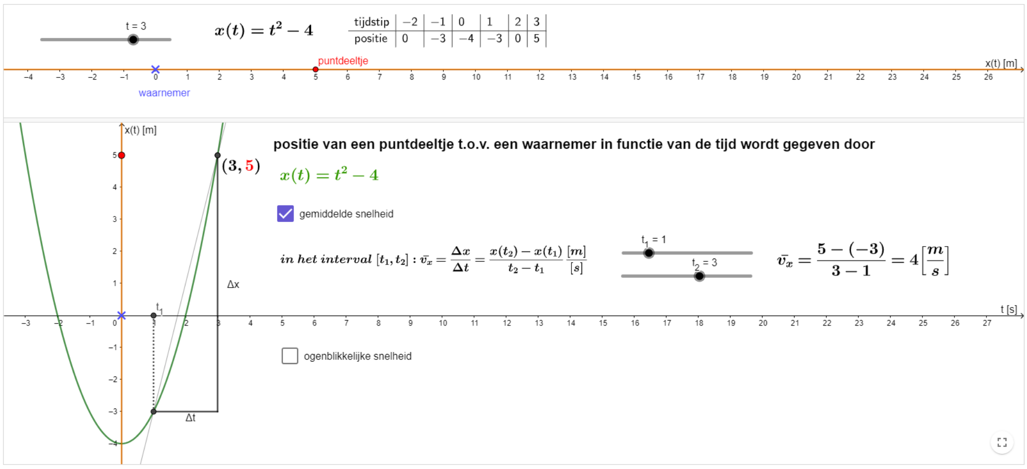


Figure 15: https://www.geogebra.org/m/nsGgY8T3

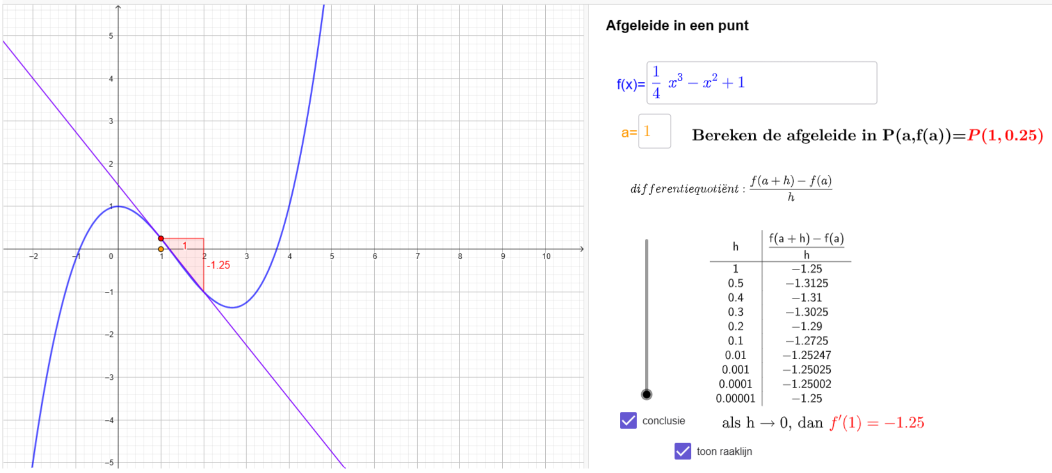


Figure 16: https://www.geogebra.org/m/NGkF3XS6

2.7 LPD28

LPD 28 → De leerlingen leggen grafisch het verband tussen een functie en haar afgeleide functie.

Wenk: → In dit doel wordt de overgang gemaakt van afgeleide in een punt naar afgeleide

Wiskunde B+S''-D-finaliteit → 19
D/2023/13.758/xxx → III-WisS''-d—versie mei 2023

functie. Die overgang kan bijvoorbeeld worden ingeleid via toenamediagrammen. Je kan ook met behulp van ICT de raaklijn aan de grafiek laten variëren en tegelijkertijd de hellingsgrafiek tekenen.

Wenk: → Omdat het verband grafisch moet worden gelegd, kan je werken met willekeurige functies zonder expliciet functievoorschrift. Je kan de grafiek van een functie met de grafiek van haar afgeleide functie laten verbinden of omgekeerd, de grafiek van een afgeleide functie laten verbinden met de grafiek van de originele functie. Je kan ook de grafieken laten schetsen. Als tussenstap kan het aangewezen zijn om de tekentabel van de afgeleide functie te laten opstellen. Je kan zo ook de link leggen met maxima of minima van functies.

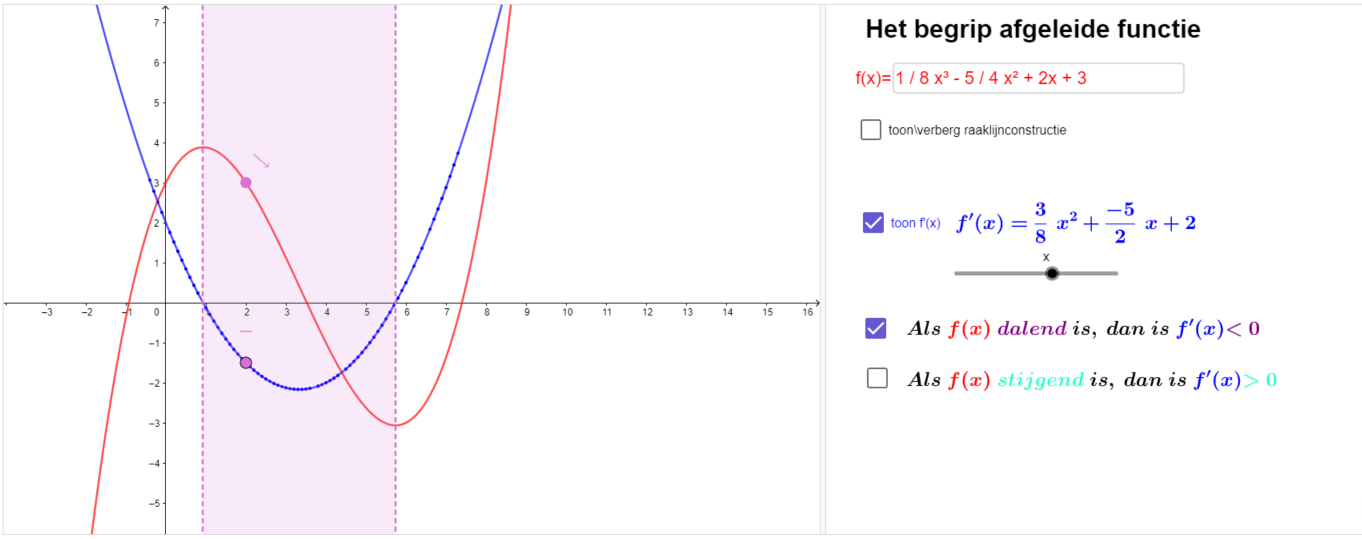


Figure 17: https://www.geogebra.org/m/dWqwC5qd

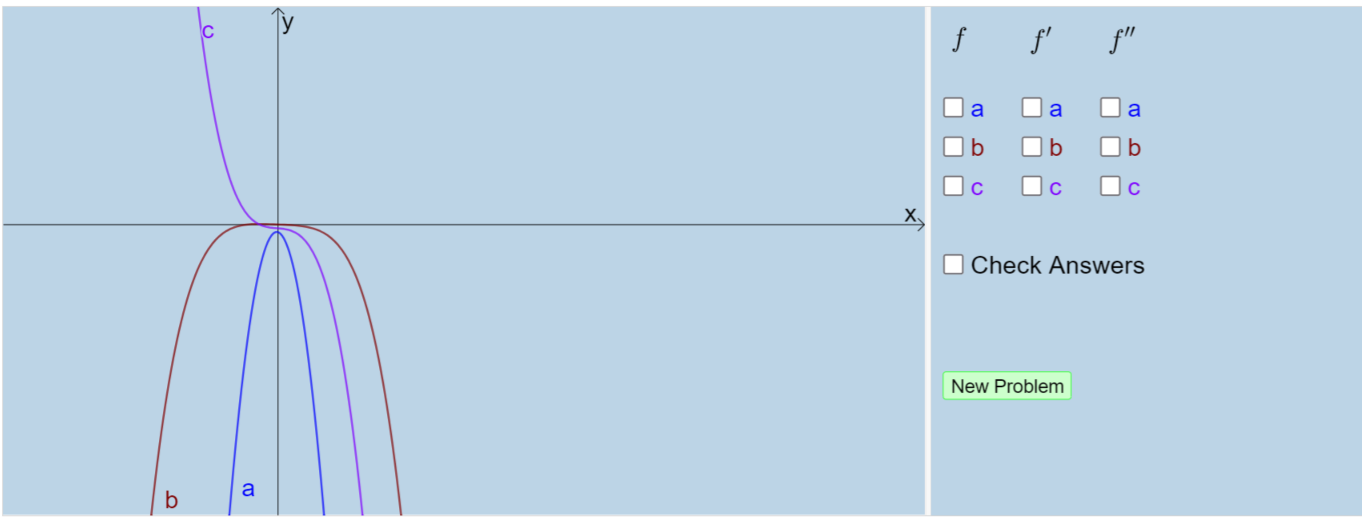


Figure 18: https://www.geogebra.org/m/qt9vwxqv

2.8 LPD29

LPD 29 → **De leerlingen berekenen de afgeleide functie van functies die zijn opgebouwd uit veeltermfuncties, rationale functies, irrationale functies, exponentiële functies, logaritmische functies en goniometrische functies.**

★ → Afleidbaarheid
Rekenregels: afgeleide van een som, product, quotiënt van functies en afgeleide van samengestelde functie (kettingregel)

Extra: → Je kan de afgeleide functie van een inverse functie bepalen via impliciet afleiden.

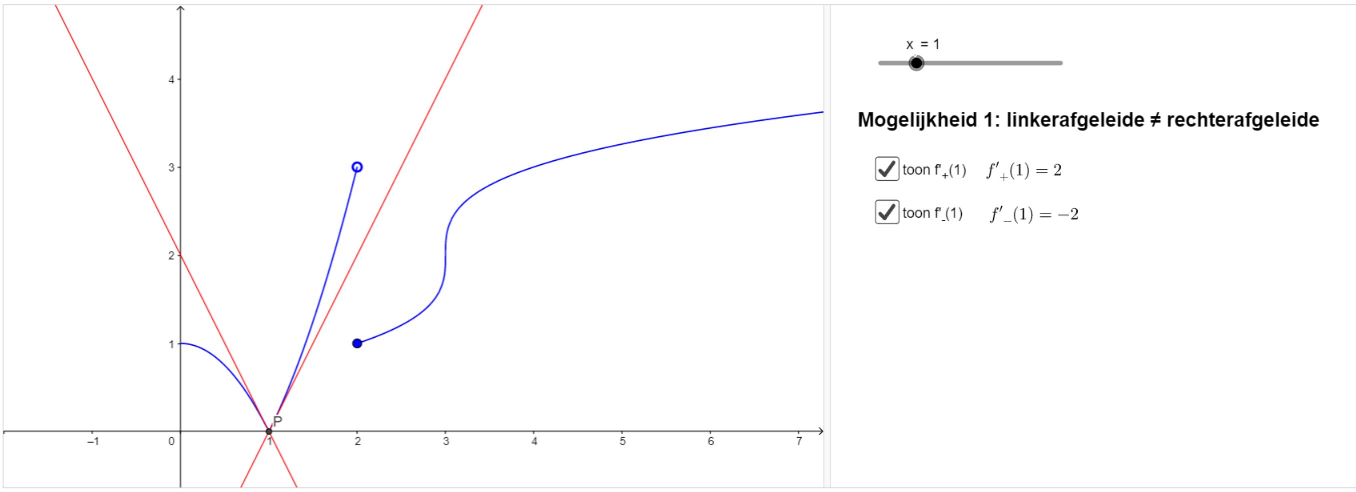


Figure 19: https://www.geogebra.org/m/D8F7EpY4

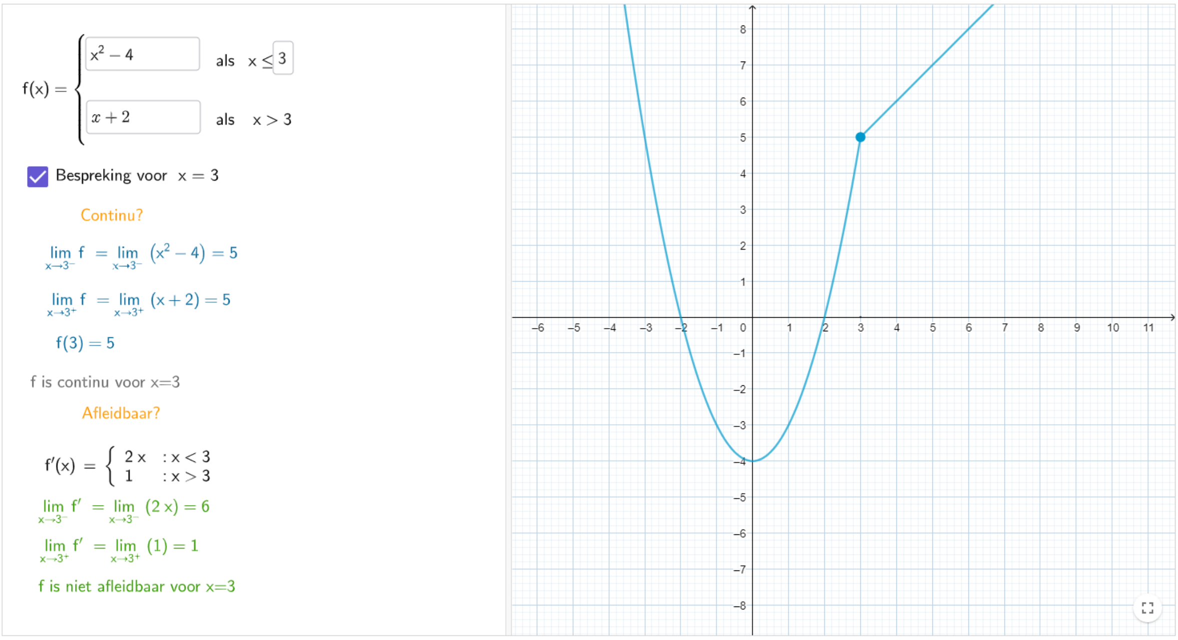


Figure 20: https://www.geogebra.org/m/D8F7EpY4

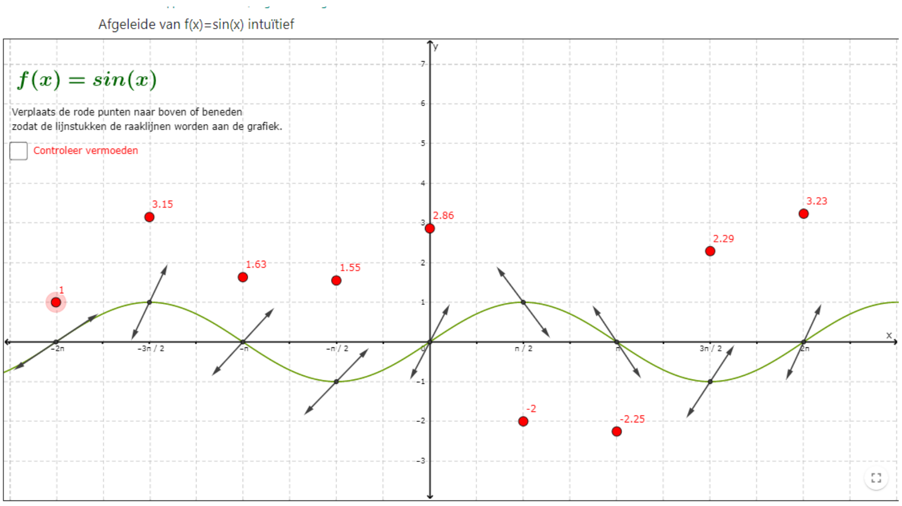


Figure 21: https://www.geogebra.org/m/qkq5rdwr

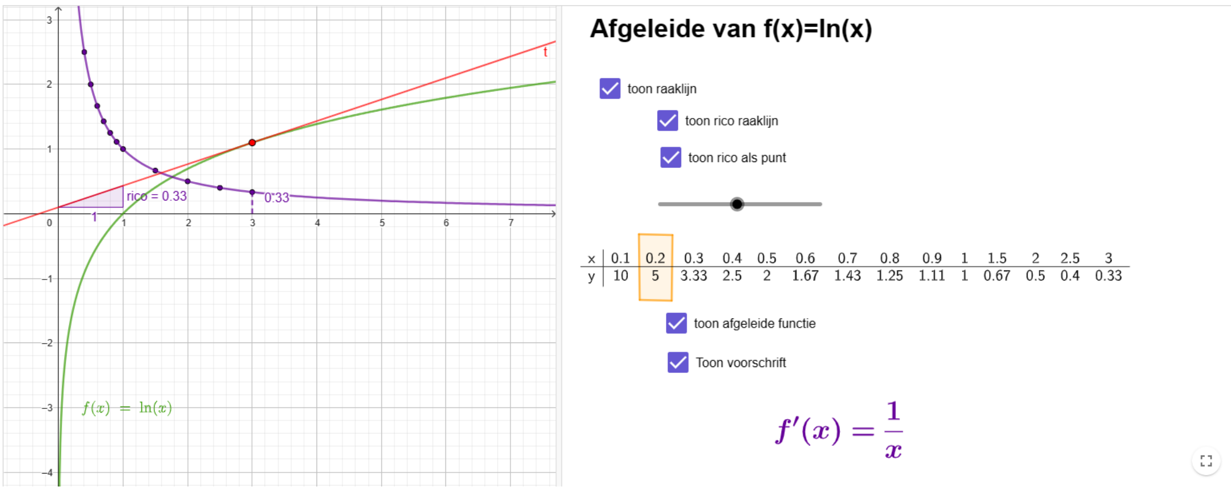


Figure 22: https://www.geogebra.org/m/qy3vtkdb

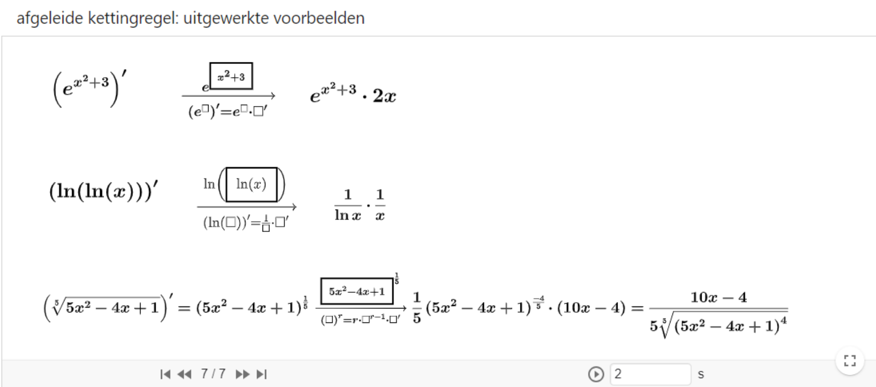


Figure 23: https://www.geogebra.org/m/rkbXbnRv

2.9 LPD30

LPD 30 → De leerlingen analyseren het verloop van functies met behulp van de eerste en tweede afgeleide functie.¶

★ → Stelling van Rolle, middelwaardestelling van Lagrange¶
Extremumproblemen¶

<u>Wenk:</u> → Je kan de functiekenmerken extrema, constant/stijgend/dalend, buigpunten, hol/bol en constante/toenemende/afnemende stijging/daling bepalen. ¶

<u>Wenk:</u> → Je kan bij extremumproblemen aandacht schenken voor het opstellen van het functievoorschrift, het praktisch domein van de functie en een evaluatie van de berekende oplossing.¶

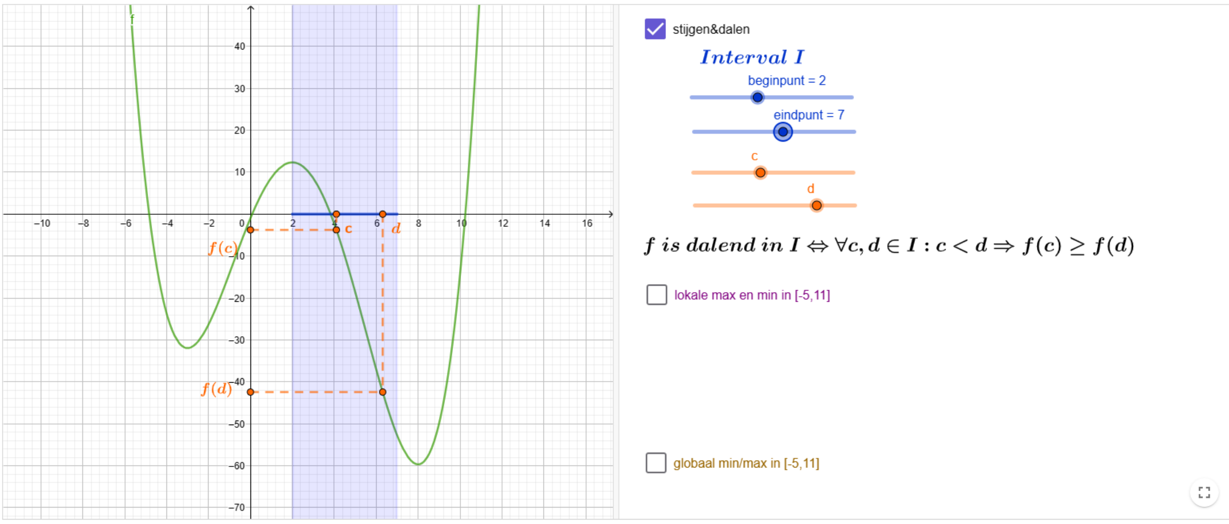


Figure 24: https://www.geogebra.org/m/jsrkdf7v

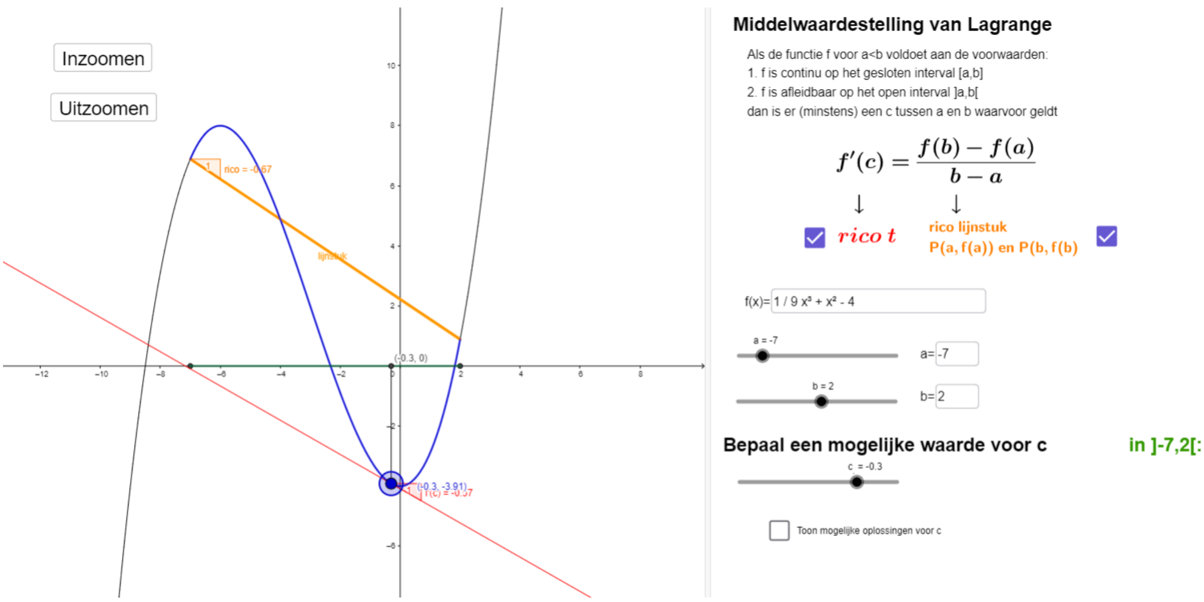


Figure 25: https://www.geogebra.org/m/dKUFet34

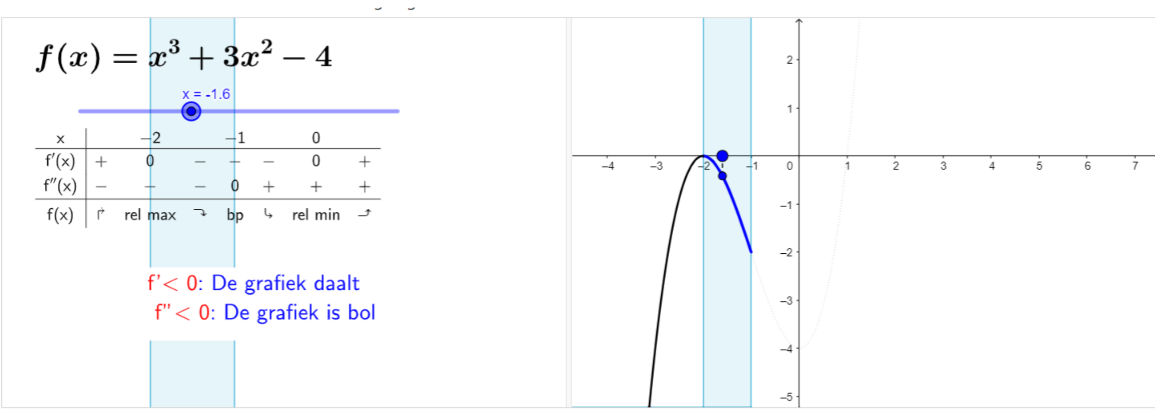


Figure 26: https://www.geogebra.org/m/jsrkdf7v

y

3 Hoe ga ik te werk?

https://www.geogebra.org/m/QtdpYKT3#chapter/504147 Cursussen/Herhalingsoefeningen

4 Waarom ga ik zo te werk?

4.1 10 gouden instructieprincipes

https://didactiefonline.nl/artikel/tien-instructieprincipes

4.1.1 Principe 1

Herhaal dagelijks een deel van wat eerder is geleerd. Herhaling versterkt wat al geleerd is. Het brengt verbindingen tot stand tussen wat we al wisten en nieuwe kennis. Dagelijks herhalen is vooral belangrijk voor informatie die vaak gebruikt moet worden. Herhalen helpt bij het automatiseren: het moeiteloos terughalen uit ons geheugen van woorden, concepten, procedures enzovoorts die we nodig hebben om problemen op te lossen, taken uit te voeren en nieuwe leerstof te begrijpen door ze te automatiseren. Het ontwikkelen van expertise kost duizenden uren oefening (denk aan de concertpianist) en dagelijks herhalen is een begin daarvan.

4.1.2 Principe 2

Presenteer nieuw leermateriaal in kleine stappen en help leerlingen hiermee te oefenen. Ons werkgeheugen is zeer klein: het kan maximaal zo'n vijf nieuwe brokken informatie vasthouden. Die brokken worden verwerkt en in ons langetermijngeheugen opgeslagen als schema's: het is geleerd. Zo is voor iemand die muziek leert spelen elke afzonderlijke noot nieuw. Na oefening en automatisering wordt een reeks noten een loopje en als je de afzonderlijke loopjes vaak genoeg geoefend hebt, wordt dit weer een schema. Komt er te veel nieuwe informatie binnen, dan zal het werkgeheugen dat domweg niet meer verwerken. Bied dus steeds kleine hoeveelheden informatie aan, help leerlingen daarna met het oefenen daarvan en ga pas naar de volgende stap als de vorige wordt beheerst.

4.1.3 Principe 3

Stel veel vragen. Vragen helpen leerlingen om te oefenen wat net gepresenteerd is en om verbindingen te leggen met wat al geleerd was. Vooral hoe- en waarom-vragen, zogeheten epistemische vragen, prikkelen dit. De meest succesvolle leraren blijken meer dan de helft van de les aan doceren, demonstreren en vragen stellen te besteden. Door te vragen kan de leraar ook bepalen hoe goed er geleerd is en of er nog meer instructie nodig is. De meest succesvolle leraren vragen leerlingen ook om uit te leggen hoe ze tot het antwoord zijn gekomen.

4.1.4 Principe 4

Sta model. Leerlingen hebben 'cognitieve' steun nodig om te leren taken uit te voeren en problemen op te lossen. Door als model te fungeren en hardop te vertellen over je denk- en werkstappen kun je laten zien hoe je een probleem oplost of een taak uitvoert.

4.1.5 Principe 5

Bied scaffolds voor moeilijke taken. Naast zelf uitleggen (het vorige principe) kun je leerlingen bij moeilijke taken ook uitgewerkte voorbeelden geven waarin alle deelstappen die ze moeten volgen om tot een oplossing te komen, zijn ingevuld. Zo bied je hen een scaffold (steiger) ofwel een tijdelijke cognitieve ondersteuning. Door steeds meer stappen weg te laten breek je die steiger af en begeleid je leerlingen geleidelijk naar zelfstandige uitvoering.

4.1.6 Principe 6

Begeleid leerlingen in het oefenen met nieuw leermateriaal Het eenmalig aanbieden van nieuwe lesstof is niet voldoende. Naast herhaling (het eerste instructieprincipe) is voldoende en gevarieerde oefening en overhoring nodig. Leerlingen moeten tijd besteden aan het herformuleren, uitbreiden en samenvatten van nieuwe stof om het goed op te slaan in hun langetermijngeheugen. Het is makkelijk om iets in een la op te bergen, maar het kan heel moeilijk zijn je te herinneren waar precies je het ook alweer gelaten hebt. Oefening helpt ons dat te herinneren.

4.1.7 Principe 7

Check of leerlingen het echt begrepen hebben Effectieve leraren gaan heel vaak na of leerlingen de nieuwe leerstof ook daadwerkelijk aan het leren zijn. Ze checken niet alleen het product, maar ook het proces van leren. Ze bevorderen hiermee niet alleen de verwerking van de stof, ze kunnen ook nagaan of leerlingen wel het goede leren en of ze de lesstof wel goed begrepen hebben.

4.1.8 Principe 8

Zorg dat leerlingen succes tonen. Effectieve leerkrachten gaan veel en vaak na of hun leerlingen succesvol zijn. Oefening baart weliswaar kunst, maar alleen als leerlingen geen fouten oefenen. Als het oefenen niet tot succes leidt, is de kans groot dat de leerling het verkeerde aan het oefenen is. En ingeslepen fouten zijn - evenals misvattingen - heel moeilijk uit te wissen.

4.1.9 Principe 9

Eis en monitor zelfstandige oefening. Je kunt je leerlingen niet blijvend aan de hand nemen, uiteindelijk moeten ze het zelf kunnen. Laat ze zelfstandig oefenen en ga na of ze het echt kunnen of dat er nog meer (al dan niet begeleide) oefening nodig is. Door zelfstandige oefening wordt kennis geautomatiseerd.

4.1.10 Principe 10

Activeer geleerde kennis regelmatig. Leerlingen hebben geen eentonige, maar een breed scala aan oefening nodig, verspreid over de tijd om sterke en rijke schema's te ontwikkelen. Hierdoor kunnen ze makkelijker nieuwe dingen leren en eerder geleerde dingen uit het geheugen terughalen. Door vaak op iets dat al geleerd is terug te komen - maar wel met de nodige tijd ertussen om nieuwe kennis in nieuwe situaties op te doen - worden de verbindingen in de schema's verstevigd en worden de schema's uitgebreider en rijker.

4.2 Wijze lessen

https://excel.thomasmore.be/wijze-lessen/.

4.2.1 Activeer relevante voorkennis

"Wat je al weet, bepaalt wat en hoe snel je leert. Nieuwe informatie wordt beter onthouden wanneer ze kleeft aan voorkennis * Herhaal op een actieve wijze de voorkennis die de leerling nodig heeft om de nieuwe leerstof te begrijpen. * Bied een kapstok aan nieuwe stof te verbinden aan de eerder geleerde stof en richting te geven aan het verdere verloop van je les."

4.2.2 Geef duidelijke, gestructureerde en uitdagende instructie

"Besteed voldoende tijd aan duidelijke gestructureerde en uitdagende instructie. Als leerlingen niet begrijpen wat er geleerd moet worden, wordt leren lastig. Afgebakende lesfasen en doelen brengen structuur. Uitdagende doelen en een snel lestempo in een warm leerklimaat motiveren je leerlingen."

4.2.3 Combineer woord en beeld

"Leerlingen slaan informatie die zowel via woorden als beelden wordt gepresenteerd, gemakkelijker op dan wanneer alleen maar woorden worden gebruikt. Dit principe is gebaseerd op het feit dat verbale en visuele informatie volgens twee afzonderlijke (maar gelijktijdig werkende) processen in het werkgeheugen verwerkt worden en vervolgens in het langetermijngeheugen geïntegreerd. Dat maakt het leren minder belastend en effectiever."

4.2.4 Laat leerstof actief verwerken

"Productieve strategieën verplichten de leerling om leerstof te herkneden tot een nieuw product. Een leerling onthoudt meer door productieve strategieën te gebruiken dan wanneer die leerstof op een meer passieve wijze 'consumeert' *Laat leerlingen schema's of mondelinge samenvattingen maken in je les. *Laat leerlingen leerstof verklaren aan zichzelf of anderen. *Leer hun de strategieën zelf ook aan."