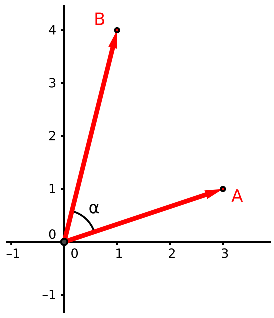
Come posssiamo calcolare l'angolo tra due vettori?

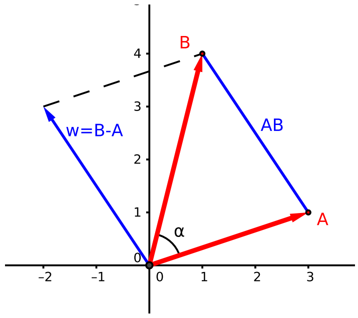
Facciamo di nuovo un passo indietro in $\mathbb{R}^2$ e consideriamo due vettori $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Come possiamo misurare l'angolo $\alpha = A\widehat{O}B$, minore di un angolo piatto, che essi formano?



Consideriamo il triangolo AOB e utilizziamo il teorema di Carnot per calcolare la misura di α:

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OA} \cdot \overline{OB} \cos(\alpha) \\ &= \parallel A \parallel^2 + \parallel B \parallel^2 - 2 \parallel A \parallel \parallel B \parallel \cos(\alpha)\end{aligned}$$

D'altra parte possiamo considerare il vettore $\mathbf{w} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A)$, corrispondente al segmento orientato **AB**.



Osserviamo che il quadrato della lunghezza o norma del vettore $\mathbf{w}$, corrispondente al quadrato della lunghezza del segmento AB, è

$$\begin{aligned}\parallel \mathbf{w} \parallel^2 = \overline{AB}^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = x_B^2 - 2x_Ax_B + x_A^2 + y_B^2 - 2y_Ay_B + y_A^2 \\ &= \parallel A \parallel^2 + \parallel B \parallel^2 - 2(x_Ax_B + y_Ay_B)\end{aligned}$$

Uguagliando quanto ottenuto con i due differenti procedimenti, otteniamo che

$$\begin{aligned}&\parallel A \parallel^2 + \parallel B \parallel^2 - 2(x_Ax_B + y_Ay_B) = \parallel A \parallel^2 + \parallel B \parallel^2 - 2 \parallel A \parallel \parallel B \parallel \cos(\alpha) \\ &\Rightarrow \\ &x_Ax_B + y_Ay_B = \parallel A \parallel \parallel B \parallel \cos(\alpha)\end{aligned}$$

Tale quantità è detta **prodotto scalare** tra i vettori A e B (il risultato è infatti uno scalare, ovvero un numero):

$$\boxed{\text{PRODOTTO SCALARE tra } A \text{ e } B: \quad A \cdot B = x_Ax_B + y_Ay_B = \parallel A \parallel \parallel B \parallel \cos(\alpha)}$$

dove α è l'angolo tra essi.

In particolare l'angolo α formato dai due vettori A e B è dato da

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{A \cdot B}{\parallel A \parallel \parallel B \parallel}}$$

Osserviamo inoltre che due vettori A e B sono **perpendicolari** se e solo se il loro prodotto scalare si annulla: $A \cdot B = 0$

Esercizio 1. Calcolare l'angolo formato dai vettori $A = (3, 1)$ e $B = (1, 4)$.

Soluzione:

Il prodotto scalare tra i due vettori è

$$A \cdot B = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 7$$

mentre la lunghezza o norma è

$$\| A \| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}\ , \qquad \| B \| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

Di conseguenza l'angolo α tra le due rette è dato da

$$\cos(\alpha) = \frac{A \cdot B}{\| A \| \| B \|} = \frac{7}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{17}} = \frac{7\sqrt{170}}{170} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 57°$$

□

Esercizio 2. Considera i vettori $\mathbf{u}(1, -3)$ e $\mathbf{v}(4, a)$, dove a è un parametro reale. Stabilisci per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ i due vettori sono tra loro ortogonali.

Soluzione:
Sappiamo che due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è zero. Poiché

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot a = 4 - 3a$$

i due vettori sono ortogonali se $4 - 3a = 0$, ovvero $a = \frac{4}{3}$.

□

Analogamente, ripetendo i calcoli fatti in $\mathbb{R}^2$, otteniamo il prodotto scalare tra due vettori A e B di $\mathbb{R}^3$:

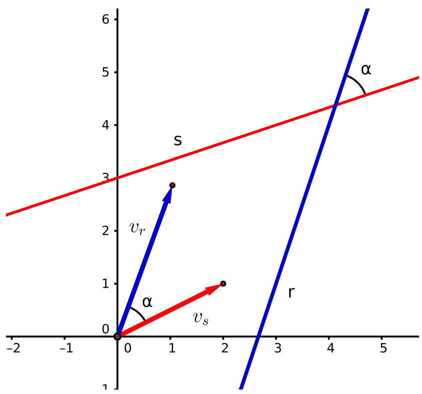
$$\boxed{\text{PRODOTTO SCALARE tra } A \text{ e } B\text{:} \quad A \cdot B = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B = \| A \| \| B \| \cos(\alpha)}$$

dove α è l'angolo compreso tra essi.
Di conseguenza

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{A \cdot B}{\| A \| \| B \|}}$$

e, in particolare, due vettori A e B sono perpendicolari se e solo se $A \cdot B = 0$.

Naturalmente il prodotto scalare può essere utilizzato per calcolare l'angolo tra due rette. Infatti l'angolo formato tra due qualsiasi rette r e s , del piano o dello spazio, è l'angolo formato dalle rette r' e s' passanti per l'origine e rispettivamente parallele a r e s. Notiamo che questa definizione ci permette anche di calcolare l'angolo tra rette sghembe. Di conseguenza se i vettori direzione di r e s sono rispettivamente $\mathbf{v_r}$ e $\mathbf{v_s}$, l'angolo α tra r e s è l'angolo tra $\mathbf{v_r}$ e $\mathbf{v_s}$:



Infine, l'angolo α formato dalle rette r e s è dato da:

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{v_r} \cdot \mathbf{v_s}}{\| \mathbf{v_r} \| \| \mathbf{v_s} \|}$$

Osserviamo che in particolare due rette r e s sono perpendicolari se e solo se si annulla il prodotto scalare dei loro vettori direzione: $\mathbf{v_r} \cdot \mathbf{v_s} = 0$.

Esercizio 3. Determinare l'angolo formato dai vettori $\mathbf{u}(1, -1, 0)$ e $\mathbf{v}(-2, 0, 2)$.

Soluzione:
Detto α l'angolo tra i due vettori, sappiamo che

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \|}$$

Poiché

$$\| \mathbf{u} \| = \sqrt{2}$$
$$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = -2$$

otteniamo

$$\cos(\alpha) = \frac{-2}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3}\pi = 120^\circ$$

□

Esercizio 4. Determinare per quale valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ i vettori $\mathbf{u}(1, -2, a)$ e $\mathbf{v}(3, 3, -1)$ sono tra loro ortogonali.

Soluzione:
Due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è zero. Poiché

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3 - 6 - a = -3 - a$$

i due vettori sono ortogonali se $-3 - a = 0$, ovvero se $a = -3$.

□

Esercizio 5. Dato il vettore $\mathbf{v}(1, 3)$ di $\mathbb{R}^2$ determinare:

a) Un vettore $\mathbf{u}$ di $\mathbb{R}^2$ ortogonale a $\mathbf{v}$
b) Un secondo vettore $\mathbf{w}$ di $\mathbb{R}^2$ ortogonale a $\mathbf{v}$
c) Che relazione c'è tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$?
d) Che forma devono avere tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ ortogonali a $\mathbf{u}$? Cosa descrivono?

Esercizio 6. Dato il vettore $\mathbf{v}(1, 3, 1)$ di $\mathbb{R}^3$ determinare:

a) Un vettore $\mathbf{u}$ di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a $\mathbf{v}$
b) Un secondo vettore $\mathbf{w}$ di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a $\mathbf{v}$
c) Un terzo vettore $\mathbf{w}'$ di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a $\mathbf{v}$ che abbia direzione differente da $\mathbf{u}$ e da $\mathbf{w}$.

Esercizio 7. Determinare un vettore di $\mathbb{R}^3$ ortogonale ad entrambi i vettori $\mathbf{v}(1, 3, 1)$ e $\mathbf{w}(2, 0, -1)$.

Soluzione:
Si vede facilmente che tutti i vettori $\mathbf{u}(1, a, 2)$ sono ortogonali a $\mathbf{w}$. Imponendo l'ortogonalità tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ otteniamo $1 + 3a + 2 = 0$, ovvero $a = -1$. Di conseguenza il vettore $(1, -1, 2)$ è ortogonale a $\mathbf{v}$ e a $\mathbf{w}$.

□

Esercizio 8. Determinare un vettore di $\mathbb{R}^3$ ortogonale ad entrambi i vettori $\mathbf{v}(1, 3, 1)$ e $\mathbf{w}(2, 1, -1)$.

Soluzione:
Supponendo che esista un vettore ortogonale ad entrambi i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ con terza componente diversa da zero, possiamo cercare un vettore $\mathbf{u}$ del tipo $\mathbf{u} = (a, b, 1)$. Imponendo l'ortogonalità con $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ otteniamo

$$\begin{cases} a + 3b + 1 = 0 \\ 2a + b - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -3b - 1 \\ -6b - 2 + b - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Un vettore ortogonale ad entrambi i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è quindi $\mathbf{u_1} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 1\right)$. Naturalmente ogni vettore multiplo di $\mathbf{u_1}$ è ancora ortogonale ad entrambi i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, quindi un secondo vettore ortogonale a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è per esempio $\mathbf{u_2}(4, -3, 5)$.

□