Club GeoGebra Iberoamericano

6

MOSAICOS E ISOMETRÍAS

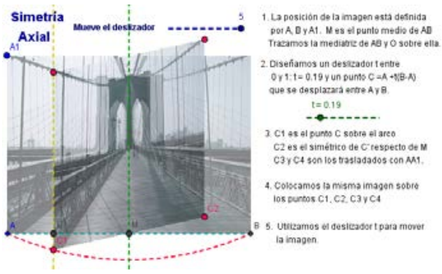
MOSAICOS E ISOMETRÍAS

ISOMETRÍAS. LOS MOVIMIENTOS EN EL PLANO QUE MANTIENEN LAS DISTANCIAS

Presentación

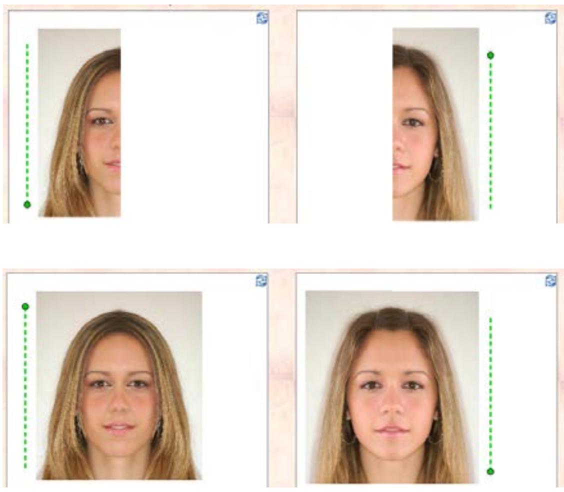
Encontramos simetría en el rostro humano y en muchos seres vivos. También aparecen objetos simétricos en situaciones de nuestra vida diaria: edificios y construcciones, logotipos, banderas, baldosas y en la decoración de las paredes.

Una imagen reconocible por su simetría es la del puente de Brooklyn (fotografía de Pilar Moreno), si "damos la vuelta a la imagen" -hacemos una simetría axial respecto de la recta vertical-, la mayor parte de los elementos del puente coinciden con los del otro lado. En esta dirección http://jmora7.com/Mosaicos/5130simetria.html se encuentra un applet que muestra la forma de hacer esa simulación con GeoGebra.



Las personas también tenemos un tipo de simetría llamado bilateral, las dos mitades de la cara son casi idénticas, al menos eso nos parece al ver la fotografía de Alicia.

Para ver si los dos lados de la cara son exactamente iguales, tomaremos las dos mitades de la fotografía: se ha recortado la parte izquierda por un lado y la derecha por otro, después se realiza la simetría axial a cada una de ellas. El resultado es que, mientras antes nos parecían idénticas, ahora se revelan diferencias según se tome la parte izquierda o derecha de la cara para reconstruirla completa

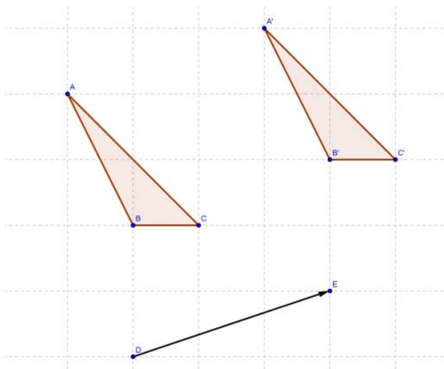


Se ha creado un applet con una animación de este proceso en la siguiente dirección http://jmora7.com/Mosaicos/2220caras.html

Actividad 1. Los movimientos en GeoGebra

Hay una sección de herramientas de GeoGebra dedicada a los movimientos en el plano:

- **Traslación** (traslada objeto por un vector)
- **Simetría axial** (refleja objeto respecto de recta),
- **Simetría central** (refleja objeto respecto de punto)
- **Rotación** (rota objeto respecto de punto)
- Hay otros movimientos en GeoGebra, como la homotecia, esta transformación mantiene la forma de los objetos, pero no lo vamos a utilizar porque no conserva las distancias, es decir, no es una isometría.

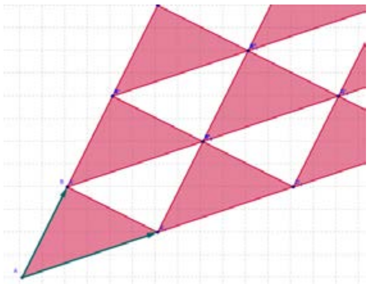


La primera tarea que vamos a realizar consiste en dibujar un triángulo , un vector y la traslación del primer triángulo respecto del vector. **Mueve** los vértices del triángulo, los extremos del vector, el triángulo ABC, inténtalo con el A'B'C' y también mueve el vector agarrándolo por el centro primero y por los extremos más tarde. Al acabar esta fase de exploración, describe con palabras lo que se consigue con la traslación.

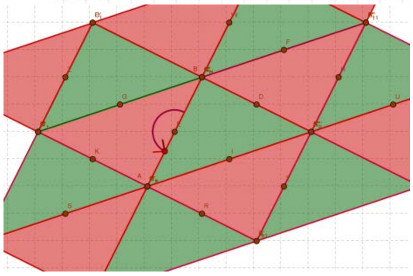
Haz lo mismo con los otros tres movimientos: la simetría axial (un triángulo y una recta), la simetría central (triángulo y punto) y la rotación (triángulo, punto y valor numérico que indica el ángulo)

Actividad 2. Cualquier triángulo rellena el plano.

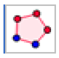
Vamos a comprobar que cualquier triángulo rellena el plano sin dejar huecos y sin solaparse, es decir, tesela el plano. Dibujamos el triángulo ABC y colocamos dos vectores sobre sus vértices: AB y AC. Si trasladamos el triángulo con los vectores, comprobamos que nos podemos mover en dos direcciones e ir rellenando el plano con ellos. Hay que tener en cuenta que los huecos blancos que hay entre los triángulos rojos son el mismo triángulo.



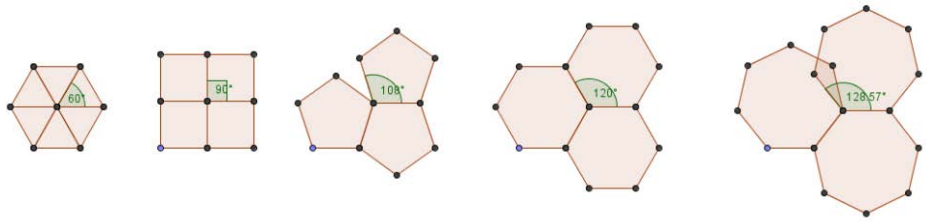
Construiremos el mosaico de triángulos con otro movimiento. Si marcamos los puntos medios de los lados y después hacemos la simetría central (reflexión respecto de punto) de los triángulos respecto de esos puntos medios



Actividad 3. Mosaicos regulares

Dibuja dos puntos que van a ser dos vértices contiguos de un polígono regular, puedes usar la herramienta **Polígono regular**  para construir uno que tenga esa medida por lado. Puede ser un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular o un hexágono regular.

Una vez construido un polígono regular, prueba a construir otro igual (del mismo tamaño y con el mismo número de lados) sobre cada uno de los lados del primero. Estudia con cuáles de ellos se puede formar un mosaico, es decir, se puede rellenar el plano, como si fueran baldosas, sin dejar huecos y sin que haya solapamientos.

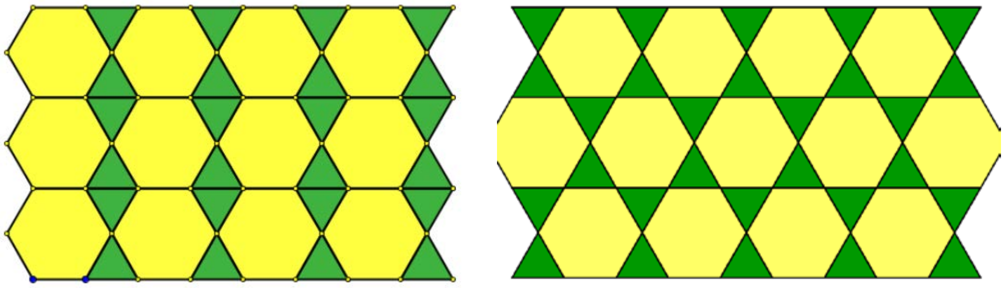


Sólo hay tres baldosas que producen un **mosaico regular**. Después de realizar el trabajo, ¿puedes explicar por qué sólo hay tres mosaicos regulares?

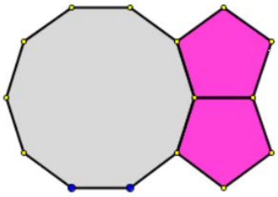
Una forma de codificar un mosaico es indicar en cada vértice qué polígonos llegan a él y en qué orden. En el primer ejemplo tendríamos 6 triángulos, que se puede resumir por 3,3,3,3,3,3 o simplificarlo en forma de potencia 3^6. A este número se le llama **Símbolo de Schläfli** y sirve tanto para mosaicos como para ciertos poliedros cuyas caras también son polígonos regulares, como algunos balones de fútbol.

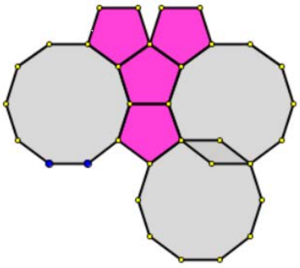
Actividad 4. Mosaicos con combinaciones de polígonos regulares

Si utilizamos combinaciones de polígonos regulares, tendremos los mosaicos semiregulares, son aquellos en los que, además de utilizar combinaciones de este tipo de polígonos, han de cumplir la condición de que en cada vértice siempre se encuentren los mismos polígonos y en el mismo orden, por ejemplo, en el mosaico de la izquierda hay vértices de dos tipos, unos son 6,3,6,3 mientras otros son 6,6,3,3. En cambio en el de la derecha todos los vértices son 6,3,6,3.



La construcción de los mosaicos con polígonos regulares debe tener en cuenta los ángulos interiores de cada polígono regular. En algunos casos podemos completar un vértice sin dejan huecos ni solapamientos, esto ocurre con la combinación de dos pentágonos y un decágono que (izquierda). El problema surge cuando intentamos extender esa combinación a todo el plano, enseguida encontraremos huecos o solapamientos (derecha).





Construye de esta forma los otros mosaicos semiregulares.

MOSAICOS. RELLENAR EL PLANO SIN HUECOS NI SOLAPAMIENTOS

Una forma de diferenciar un palacio de los edificios de alrededor consiste en utilizar materiales más valiosos. Para distinguir a un señor poderoso de otros que lo son menos es por la vestimenta y los tejidos. Cuando no se dispone de mármoles, seda o piedras preciosas, se recurre a la decoración de las paredes y de los tejidos para realzar la importancia. Aquí tenemos el mosaico de la pajarita en la Alhambra de Granada y una muestra de tejido tomado de la web del Museo Chileno de Arte Precolombino

Los mosaicos contienen un diseño más o menos complejo pero dentro de una característica común: la repetición. Es la que hace que nuestro cerebro pueda tomar una parte del diseño y realizar un ejercicio de recomposición para completar el diseño. La sensación de belleza que produce la contemplación de estos mosaicos es personal, pero también es una impresión compartida culturalmente y en ella intervienen varios factores:

- La regularidad o simetría de las baldosas.
- Los elementos de simetría de la composición completa.

- Las conexiones del diseño de una baldosa con las adyacentes, es decir, la continuidad de las líneas, porque esto permite la generación de formas complejas más grandes que se repiten en el mosaico**.**

Podríamos resumir estas ideas con una frase de H. Weyl: *La simetría es una idea, por medio de la cual, el hombre de todas las épocas ha tratado de comprender y crear la belleza, el orden y la perfección*.

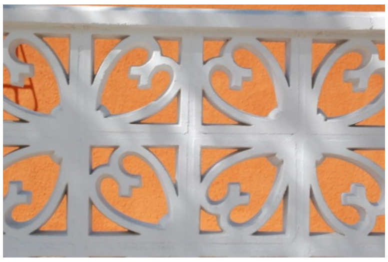
Las celosías se construyen con baldosas, normalmente cuadradas, que contienen un diseño interior. Se colocan en la parte superior para aislar del exterior.Es una buena solución porque las zonas huecas suponen una descarga del peso del muro sobre su base; en segundo, dejan pasar la luz que después puede tamizarse con un seto y, por último, aportan un motivo decorativo a una pared normalmente lisa. Si los dos primeros motivos (peso y luz) se pueden abordar desde la física, el tercero nos llevará por el camino de la geometría.

La colocación se realiza mediante diversos movimientos de dichas baldosas: traslaciones, giros y simetrías de la baldosa original.

Una de las formas más frecuentes de colocar este tipo de baldosas consiste en hacer simetrías axiales, tomando como ejes los lados del cuadrado En la colocación práctica consiste en poner la nueva frente a una colocada y “dar la vuelta” en el espacio alrededor de uno de los lados para colocarla junto a la primera.

Tienes un ejemplo en http://jmora7.com/Mosaicos/3100celconst.htm

En algunos casos se dan situaciones no deseadas. Es el caso de la celosía de la derecha se observa un intento de seguir el patrón anterior de colocación, pero ha habido un error en la colocación de una de las baldosas. Al principio cuesta localizarla, pero una vez se ha encontrado, la vista casi siempre se dirige hacia ella.

Actividad 5. Baldosas simétricas en el Museo del Azulejo de Onda (Castellón, España)

En primer lugar nos vamos a fijar en la simetría de la baldosa. Un diseño tiene un elemento de simetría cuando podemos realizar un movimiento en él y conseguir que la baldosa coincida con la original. El azulejo de la derecha tiene un eje de simetría a lo largo de una de las diagonales. Si hacemos una simetría axial respecto de esa línea, toda la baldosa coincide con la original

Podemos diseñar baldosas con distintos elementos de simetría. Para una baldosa cuadrada tenemos ocho posibles diseños, cada una con elementos de simetría distintos a los demás. Aquí tienes ejemplos de cada uno de ellos sobre baldosas de cerámica del Catálogo de la colección del siglo XIX del Museo de Onda (Castellón, España)

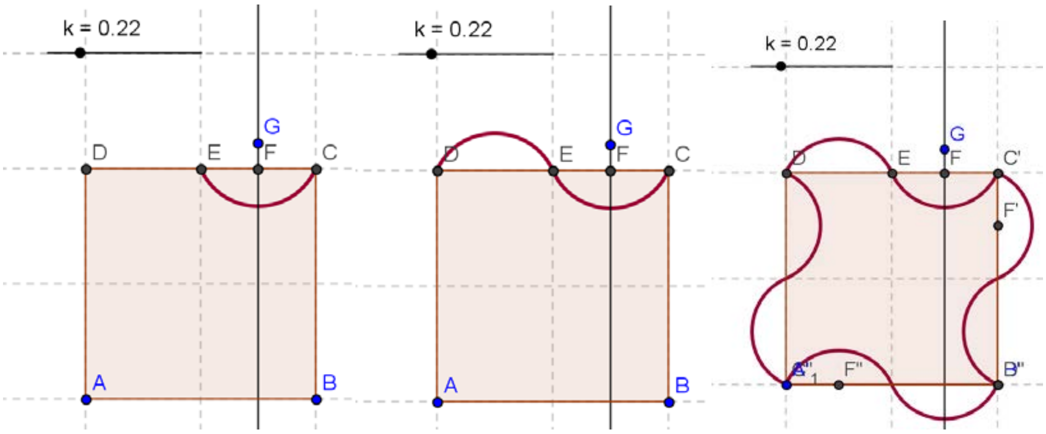
La primera tiene cuatro ejes de simetría –dos paralelos a los lados en rojo y dos que van por los vértices en azul-, y un centro de rotación de orden 4 –en verde, las rotaciones de 90º coinciden con la baldosa original. Da los elementos de simetría de cada una de las ocho baldosas

Utiliza GeoGebra para construir un diseño geométrico sencillo dentro de una baldosa cuadrada que sea ejemplo de cada uno de los ocho anteriores.

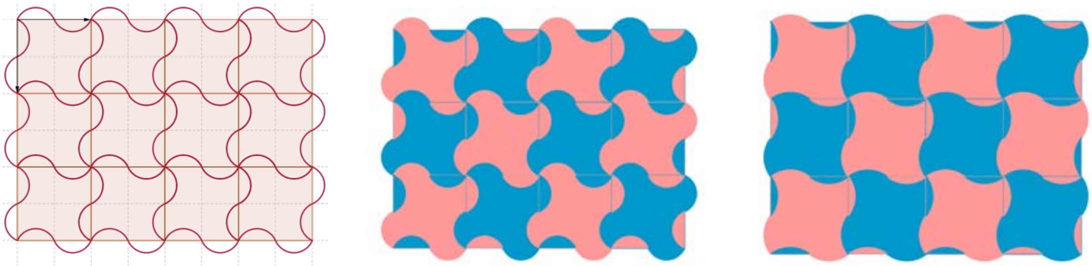
Actividad 6. Mosaicos por deformación.

Basta con mirar los suelos de cualquier casa para ver cómo los cuadrados forman mosaico. También podemos deformar la baldosa cuadrada para crear una nueva que también rellene el plano sin dejar huecos ni solaparse.

Sustituiremos medio lado del cuadrado por un pequeño arco que tiene un centro más o menos alejado del lado (lo haremos con un deslizador). Completamos la deformación de ese lado con una simetría (reflexión) respecto del punto E, el punto medio del lado y después la llevamos a los otros lados con rotaciones de 90º alrededor de los vértices del cuadrado



Ahora con dos vectores que tengan extremos en los vértices contiguos del cuadrado, uno horizontal y otro vertical, llevamos esa baldosa hacia la derecha y hacia abajo para rellenar el plano. Después se colorean con cuidado las baldosas alternas (hay que llevar cuidado con los arcos porque las baldosas no son “objetos” sino que están formados por piezas más pequeñas. Con el deslizador podremos hacer que la curva sea más o menos pronunciada.



Encontramos mosaicos de este tipo en la Alhambra de Granada y en las obras del diseñador holandés M.C. Escher