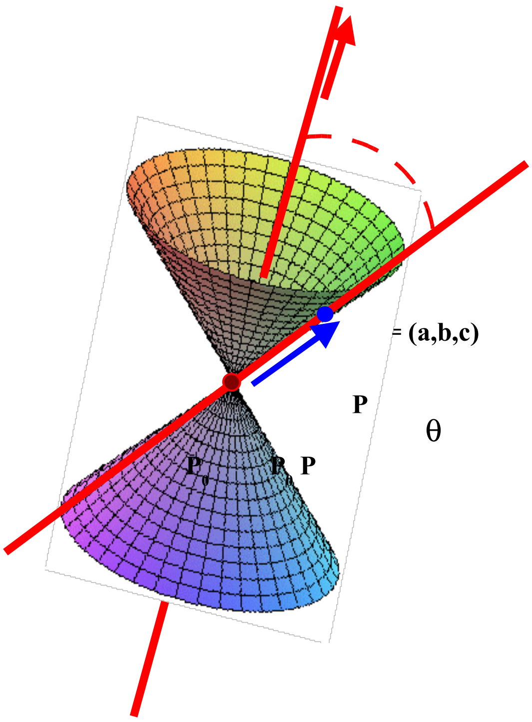
✓ INTRODUCCIÓN.

La primera definición de sección cónica (*de un cono circular recto*) apareció en la civilización Griega. **Apolonio de Perga** (*siglo II a. C.*) efectuó estudios matemáticos sobre las secciones cónicas, de los cuales compuso el tratado sobre las curvas cónicas.

Durante muchos siglos, las cónicas no tuvieron un papel relevante en los estudios matemáticos, hasta que se descubrió que el mundo que nos rodea está lleno de secciones cónicas, ya que por ejemplo, los estudios de Galileo demostraron que las trayectorias de los proyectiles siguen una trayectoria parabólica o que los estudios de **Kepler** demostraron que los planetas seguían una trayectoria elíptica. Además, las secciones cónicas tienen diferentes aplicaciones en la vida real, como por ejemplo: los cables de los puentes colgantes, los detectores de radar o los focos de los coches tienen forma parabólica; las órbitas de los planetas alrededor del sol son elípticas, en óptica y propagación de ondas se utilizan lentes elípticas.

✓ SECCIONES CÓNICAS.



☞ Se denominan SECCIÓN CÓNICA a la curva intersección de un plano con un cono.

Un CONO es aquel que se puede generar al girar una recta s con respecto a otra no paralela r (denominada eje de rotación).

$P_0 = P_0(x_0, y_0, z_0) = r \cap s$

Se denomina VÉRTICE del CONO, si

$\overline{v} = (a,b,c)$ el vector director de r ($|\overline{v}| = 1$)

θ = Ángulo(r,s) ($0^o < \theta < 90^o$).

P = P(x,y,z) pertenece al CONO si cumple:

$$\left(\overrightarrow{P_0P}\bullet\vec{v}\right)^2 = \left(\left|\overrightarrow{P_0P}\right|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta\right)^2$$

Desarrollando dicha relación y teniendo en cuenta que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, queda

$$\left(a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)+c\cdot(z-z_0)\right)^2 = \left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right)\cdot\cos^2\theta$$

que simplificando queda la siguiente ecuación implícita[1]:

$$F(x,y,z) \equiv$$
$$= (\cos^2\theta - a^2)\cdot(x-x_0)^2 + (\cos^2\theta - b^2)\cdot(y-y_0)^2 + (\cos^2\theta - c^2)\cdot(z-z_0)^2 -$$
$$-2\cdot\left[a\cdot b\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) + a\cdot c\cdot(x-x_0)\cdot(z-z_0) + b\cdot c\cdot(y-y_0)\cdot(z-z_0)\right] = 0$$

Para ver como es una SECCIÓN CÓNICA (*intersección de un CONO con un PLANO*), podemos considerar

P_0 = **$(0,0,z_0)$** con **$z_0 \neq 0$** el vértice del CONO.

θ el ángulo que forma cualquier generatriz (*recta contenida en la superficie del cono*) del cono con el eje de rotación r

π : G(x,yz) = z = 0, es decir el plano XY.

Si además, consideramos

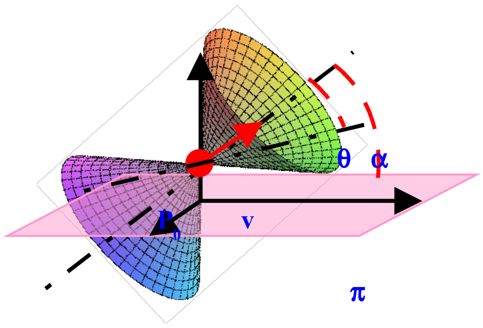
α = Ángulo ($\overline{v}$, π) ,.

podemos tomar

v = (0, cos α, sen α) el vector de la recta r.

y la SECCIÓN CÓNICA, cumplirá el siguiente sistema

$$F(x,y,z) \equiv (\cos^2\theta)\cdot x^2 + (\cos^2\theta - \cos^2\alpha)\cdot y^2 + (\cos^2\theta - sen^2\alpha)\cdot(z-z_0)^2 - 2\cdot\cos\alpha\cdot sen\alpha\cdot y\cdot(z-z_0) = 0$$
$$G(x,y,z) \equiv z = 0$$



Resultando la ecuación de la cónica siguiente:

$$C(x,y,z) \equiv$$
$$\equiv (\cos^2\theta)\cdot x^2 + (\cos^2\theta - \cos^2\alpha)\cdot y^2 -$$
$$-2\cdot\cos\alpha\cdot sen\alpha\cdot z_0^2\cdot y -$$
$$-(\cos^2\theta - sen^2\alpha)\cdot z_0^2 \qquad = 0$$

Que podemos simplificar con la notación:

$$C(x,y,z) \equiv A\cdot x^2 + B\cdot y^2 + C\cdot y + D = 0$$

donde

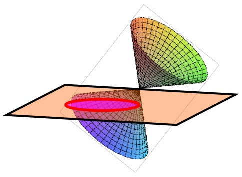
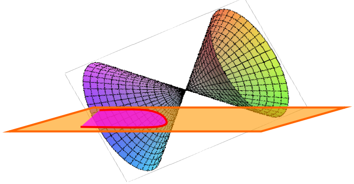
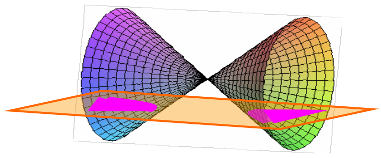
$$A = \cos^2\theta; B = (\cos^2\theta - \cos^2\alpha); C = -2\cdot\cos\alpha\cdot sen\alpha\cdot z_0^2; D = -(\cos^2\theta - sen^2\alpha)\cdot z_0^2$$

[1] Si *P_0 = (0,0,0) y v = (0,0,1), dividiendo por $\cos^2\theta$, la ecuación implícita sería:*

$$F(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 - tg^2\theta\cdot z^2 = 0$$

Es decir es un caso particular de una CUÁDRICA (superficie algebraica de grado 2).

Como A > 0, dependiendo del signo de $\theta - \alpha$, obtenemos las siguientes curvas:

Si $\theta - \alpha > 0$ $\Rightarrow B > 0$, ecuación de una ELIPSE. 	Si $\theta - \alpha = 0$ $\Rightarrow B = 0$, $C < 0$, ecuación de una PARÁBOLA. 	Si $\theta - \alpha < 0$ $\Rightarrow B < 0$, ecuación de una HIPÉRBOLA. 

☞ Además, hemos descartado el punto $z_0 = 0$, ya que en este caso sería una CÓNICA DEGENERADA, cuyas posibles soluciones (no cónicas) son:

Si $\theta > \alpha$. La única solución es el punto P = (0,0,0)

Si $\theta = \alpha$. La solución es la recta que contiene al eje OY.

Si $\theta < \alpha$. La solución son dos rectas no paralelas, que pasan por el origen de coordenadas y que están sobre le plano z = 0.

✓ ESTUDIO ANALÍTICO DE LAS CÓNICAS.

Ecuación algebraica de una Cónica

Una cónica **C** satisface una ecuación algebraica de grado dos respecto de las variables x, e y. Es decir, en el plano afín real $\mathbf{E_2}$, una cónica **C** es un conjunto de la forma:

$$C = \left\{ P(x,y) : (1,x,y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

A una matriz cuadrada y simétrica ($A=A^t$), denominada **MATRIZ COORDENADA**, con coeficientes reales. Siendo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0\bullet} \\ a_{1\bullet} \\ a_{2\bullet} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\bullet 0} & a_{\bullet 1} & a_{\bullet 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & & \\ a_{02} & & A_{00} \end{pmatrix}$$

Para estudiar las CÓNICAS, para cada, podemos definir las siguientes funciones:

$$g(P,Q) = g\big((x,y),(u,v)\big) = (1,x,y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \end{pmatrix} = 0$$

$$f(P) = f\big((x,y)\big) = (1,x,y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Hay que observar que una cónica C, verifica infinitas ecuaciones de la forma $f((x,y)) = 0$, ya que si W es una matriz proporcional a A, existe un real c no nulo, tal que se verifica:

$$(1,x,y) \cdot W \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = c \cdot (1,x,y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = c \cdot 0 = 0$$

Si

$$C \equiv (1, x, y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

es la ecuación de una cónica, respecto de un sistema de referencia B, y B' es otro sistema de referencia, cuyas ecuaciones de cambio viene dadas por

$$(1, x, y) = (1, x', y') \cdot M$$

Entonces, la cónica C, respecto del nuevo sistema de referencia B ' vendrá dado por las ecuaciones

$$C \equiv (1, x, y) \cdot M^t \cdot A \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Ejemplos

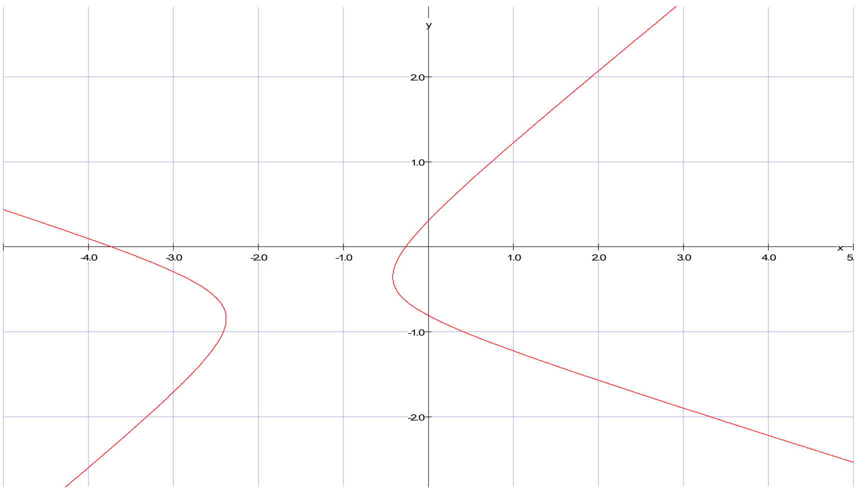
1. La siguiente ecuación de la Cónica

$$[1, x, y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

Que equivale a

$$\left[x^2 + x \cdot (2 \cdot y + 4) - 4 \cdot y^2 - 2 \cdot y + 1\right] = 0$$

Es la ecuación de una Hipérbola



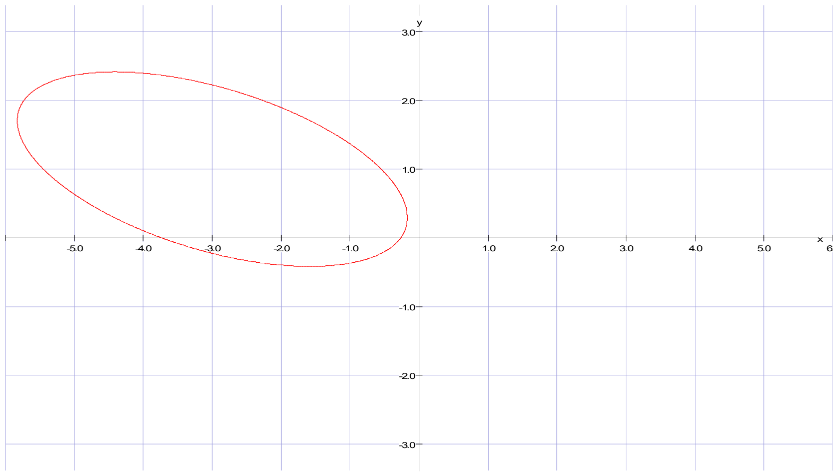
2. La siguiente ecuación de la Cónica

$$[1,\ x,\ y]\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ x\\ y\end{bmatrix} = 0$$

Que equivale a

$$\left[x^2 + x\cdot(2\cdot y + 4) + 4\cdot y^2 - 2\cdot y + 1\right] = 0$$

Es la ecuación de una Elipse



<u>Puntos conjugados, rectas polares, puntos singulares y polos de una Cónica.</u>

Dos puntos $P_1 \equiv (x_1,y_1)$ y $P_2 \equiv (x_2,y_2)$ del plano afín, son **CONJUGADOS**, respecto de la cónica C, si

$$f\left(P_1,P_2\right) = \left(1,x_1,y_1\right)\cdot A\cdot\begin{pmatrix}1\\ x_2\\ y_2\end{pmatrix} = 0$$

Es evidente, que si $P \in C$, P es **AUTOCONJUGADO**.

Ejemplos

1. Respecto de la Cónica

$$[1,\ x,\ y]\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ x\\ y\end{bmatrix} = 0$$

Los puntos (1,1) y (0,½) son CONJUGADOS ya que se cumple:

$$[1,\ 1,\ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = [0]$$

2. Respecto de la Cónica

$$[1,\ x,\ y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

El punto (- 2 + √3 , 0) es un punto AUTOCONJUGADO, ya que se cumple:

$$[1,\ -2+\sqrt{3},\ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2+\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} = [0]$$

Si $P_0 = (x_0,y_0)$ es un punto del plano afín, denominamos **RECTA POLAR** del punto P_0 , respecto de la cónica C, a la recta: $r \equiv (1, x_0, y_0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$

a) Si $(1, x_0, y_0) \cdot A = (t, 0, 0); t \in \mathbb{R} - \{0\}$

$\Rightarrow$ NO EXISTE ningún punto P del plano afín conjugado con P_0.

b) Si $(1, x_0, y_0) \cdot A = (0,0,0)$

$\Rightarrow$ Cualquier punto P del espacio afín es conjugado con P_0.

Ejemplo

El punto P(-7/5,-3/5) no tiene ningún punto conjugado respecto de la Cónica

$$[1,\ x,\ y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

Ya que se cumple:

$$\left[1,\ -\frac{7}{5},\ -\frac{3}{5}\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \left[-\frac{6}{5},\ 0,\ 0\right]$$

Los **PUNTOS SINGULARES** de la cónica C es el conjunto

$$\{ P(x,y) \in E_2 : (1, x_0, y_0) \cdot A = (0,0,0) \}$$

Ejemplo

La Cónica C

$$[1,\ x,\ y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

No tiene puntos singulares, ya que el sistema:

$$[1,\ x,\ y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = [2\cdot x - y + 1,\ x + y + 2,\ x + 4\cdot y - 1] = [0,\ 0,\ 0]$$

No tiene solución.

☞ Si A es la matriz coordenada de una cónica C en E_2 que tiene puntos singulares, entonces $|A| = 0$

\# Demostración:

Si $P \equiv (x,y)$ es un punto singular de la cónica C, debe de cumplir

$(1 , x , y) . A = (0 , 0 , 0).$ **(1).**

Si C tiene puntos singulares el sistema **(1)**, es compatible, por tanto ran A < 3.

Luego se cumple $|A| = 0$. C. Q. D.

Además, si ran A = 2, existe solución única, y si ran A = 1, el conjunto de soluciones viene determinado por la recta r, solución del sistema **(1).**

Una cónica C de matriz de coordenadas A, es **REGULAR** si $|A| \neq 0$. Si C no es regular se denomina **DEGENERADA**.

Ejemplo

La Cónica C

$$[1,\ x,\ y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

Es regular, ya que:

$$\mathrm{DET} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = -18$$

Si C es una cónica regular y r es la recta polar del punto $P_0 = (x_0,y_0)$, entonces este punto es único y se denomina **POLO de la recta r**.

Demostración:

Sea $\quad r \equiv \left(b_0, b_1, b_2\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$

la recta polar de P_0.

Si P ≡ (x,y) es un punto singular de la cónica C, debe de cumplir:

$$\left(1, x, y\right) \cdot A = \lambda \cdot \left(b_0, b_1, b_2\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Es decir, existe un $\lambda \in$ R, tal que es solución del sistema:

$$\left(1, x, y, -\lambda\right) \cdot \begin{pmatrix} & A & \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} = 0$$

Y como |A| ≠ 0, se tiene:

$$Rang \begin{pmatrix} & A & \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} = 4$$

Luego, el sistema **(2)**, es compatible determinado y el punto P, será el único punto que cumple la ecuación. **C. Q. D.**

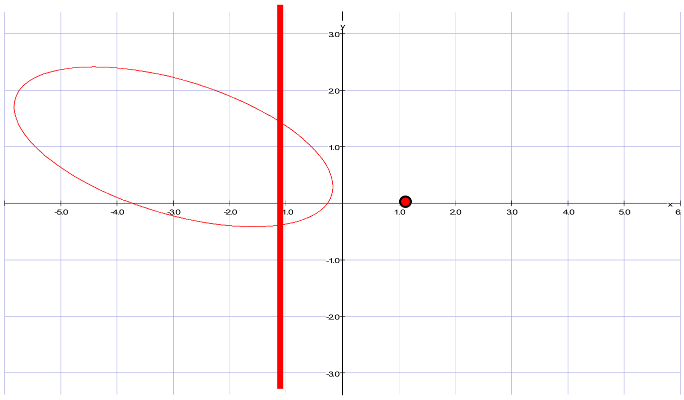
Ejemplo

El punto (1,0) es el POLO de la recta x = - 1, respecto de la Cónica

$$[1,\ x,\ y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

ya que se cumple:

$$[1,\ 1,\ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = [3 \cdot x + 3] = 0$$



Sean la recta r y la Cónica C, dadas por las ecuaciones

$$r \equiv (1,x,y) = \alpha \cdot (1,x_1,y_1) + \beta \cdot (1,x_2,y_2)\,; \quad \alpha + \beta = 1$$

$$C \equiv (1,x,y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad \textbf{(3).}$$

Si un punto P = (x,y) ∈ r ∩ C, P se debe de cumplir:

$$\left(\alpha \cdot (1,x_1,y_1) + \beta \cdot (1,x_2,y_2)\right) \cdot A \cdot \left(\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = 0; \quad \alpha + \beta = 1$$

Que desarrollando queda el sistema:

$$\alpha^2 \cdot g\left((1,x_1,y_1),(1,x_1,y_1)\right) + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot g\left((1,x_1,y_1),(1,x_2,y_2)\right) + \beta^2 \cdot g\left((1,x_2,y_2),(1,x_2,y_2)\right) = 0; \quad \alpha + \beta = 1$$

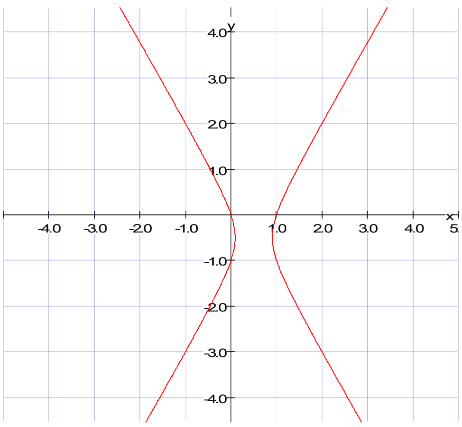
Pudiendo ser este sistema incompatible, cuando la recta es EXTERIOR a C, compatible determinado con solución única P_0 , cuando la recta es TANGENTE a C en P_0 , con dos soluciones P' y P'' , cuando la recta es SECANTE a C, o compatible indeterminado, cuando la recta r está incluida es C, y la recta es GENERATRIZ de C.

Como conclusión, si P ∈ C y r es la recta polar a P respecto de C, entonces, r es la única tangente a C en el punto P, o r es la generatriz de C que pasa por P.

Ejemplo

Sea la Cónica

$$[1,\ x,\ y] \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = 0$$



Como la recta polar en el punto (2,2) es:

r : 9x -5x – 8 =0

Y dado que (2,2) es un punto de la Cónica, esta recta es la recta tangente a la Cónica que pasa por el punto (2,2).

☞ Si C posee una generatriz, entonces C es unión de dos rectas del plano afín.

Demostración:

Si r es generatriz de C y R' = {O,u,v} es un sistema de referencia rectangular, tal que: O ∈ r, r = O + <u>.

Entonces, la Cónica C, vendrá dada respecto a R' por la ecuación:

$$(1,x,y)\cdot B\cdot\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=(1,x,y)\cdot\begin{pmatrix}b_{00}&b_{01}&b_{02}\\b_{01}&b_{11}&b_{12}\\b_{02}&b_{12}&b_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=0 \qquad \textbf{(4)}$$

Y como todo punto de r pertenece a C, resulta que los puntos de coordenadas (x,0) respecto de R ' cumplen:

$$(1,x,0)\cdot B\cdot\begin{pmatrix}1\\x\\0\end{pmatrix}=b_{00}+2\cdot b_{01}\cdot x+b_{11}\cdot x^2=0 \qquad \textbf{(4.1)}$$

Luego:

$$b_{00}=b_{01}=b_{11}=0$$

Y el sistema **(4)**, queda como:

$$y\cdot(b_{02}+2\cdot b_{12}\cdot x+b_{22}\cdot y)=0$$

Lo que indica que la cónica está formada por las rectas que referidas al sistema de referencia R' que tienen las ecuaciones:

$$r\equiv y=0$$

$$s\equiv 2\cdot b_{02}+2\cdot b_{12}\cdot x+b_{22}\cdot y=0$$

C. Q. D.

Hay que observar que los puntos P = (x,y) ∈ s ∩ r, son puntos singulares de C, ya que respecto del sistema R ' la matriz de coordenadas es:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&b_{02}\\0&0&b_{12}\\b_{02}&b_{12}&b_{22}\end{pmatrix}$$

Y será $(1,x,y)\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}$

☞ Si C es una cónica, y P_0 es un punto singular de C, entonces, toda recta que pasa por P_0 o es tangente a C o es generatriz de C.

Demostración:

Si P_1, es otro punto de la recta r que pasa por P_0, entonces, todo punto P = (x,y) que perteneciente a r se puede expresar mediante la ecuación:

$$r \equiv (1,x,y) = \alpha \cdot (1,x_0,y_0) + \beta \cdot (1,x_1,y_1); \quad \alpha + \beta = 1$$

Y teniendo en cuenta que P_0 es singular de la Cónica C, se cumple:

$f(P_0, P_0) = f(P_0, P_1) = 0.$

Luego resolviendo el sistema $P \in r \cap C$, y reduciendo queda:

$\beta^2 . f(P_1, P_1) = 0. \qquad \alpha + \beta = 1.$

En caso de que $\beta = 0$, la recta r es tangente a C en P_0 .

En caso de que $f(P_1,P_1) = 0$, $r \subset C$, y por tanto r es generatriz de C. C. Q. D.

Luego, como conclusión: toda recta r que pase por un punto singular de la cónica C y por otro punto de C, es generatriz de C.

Centro de una cónica C.

Un punto $P \in A$ (*plano afín*) es CENTRO de la CÓNICA C, cuando no existe ningún punto P ' conjugado con P, respecto de la cónica C.

Como los puntos $P \in A$ (*plano afín*), que no poseen puntos conjugados deben de cumplir la ecuación:

$(1,x,y).A = (\lambda,0,0)$; $\lambda \in R$. **(5)**.

Es equivalente a resolver:

$(1,x,y).(a_{\bullet 0}) \neq 0.$ **(5.1)**.

$(1,x,y).(a_{\bullet 1} , a_{\bullet 2}) = (0,0).$ **(5.2)**.

Cónicas regulares.

Si C es una **CÓNICA REGULAR** es decir si $|A| \neq 0$. Resolviendo el sistema **(5)**, se cumple:

a) **Si $| A_{00} | \neq 0$,** existe un único punto Q que es centro de la cónica C.

1) En caso de que sea **$(a_{01} , a_{02}) = (0,0)$,** será Q = (0,0). Y dado que:

$0 \neq | A | = a_{00} . | A_0 |.$

Resulta que $a_{00} \neq 0$, y por consiguiente Q = (0,0) es único.

2) En el caso de que sea **(a₀₁ , a₀₂) ≠ (0,0),** por ser $|A_{00}| \neq 0$, el sistema **(5)**, admite solución única, que resolviendo el sistema **(5.2)**, vendrá dada por:

$$Q = \left(\frac{\begin{vmatrix} -a_{01} & a_{12} \\ -a_{02} & a_{22} \end{vmatrix}}{|A_{00}|}, \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{01} \\ a_{12} & -a_{02} \end{vmatrix}}{|A_{00}|} \right) = (c_1, c_2)$$

Que además, sustituyendo en la ecuación (5.1) se comprueba:

$(1,c_1,c_2).(a_{\bullet 0}) =$

$$= \frac{1}{|A_{00}|} \cdot \left(a_{00} \cdot |A_{00}| - a_{01} \cdot \begin{vmatrix} a_{01} & a_{12} \\ a_{02} & a_{22} \end{vmatrix} + a_{02} \cdot \begin{vmatrix} a_{01} & a_{11} \\ a_{02} & a_{12} \end{vmatrix} \right) = \frac{|A|}{|A_{00}|} \neq 0$$

Y por tanto el punto Q, es el único centro de C. Pues resulta que $a_{00} \neq 0$, y por consiguiente Q es único.

b) **Si $|A_{00}| = 0$,** entonces la cónica C no tiene centro, ya que si $(a_{01}, a_{02}) = (0,0)$.

Ran A_{00} < Ran A. Y por tanto el sistema **(5)** es incompatible, y no tiene solución. Además, teniendo en cuenta:

$$|A| = \left(a_{00} \cdot |A_{00}| - a_{01} \cdot \begin{vmatrix} a_{01} & a_{12} \\ a_{02} & a_{22} \end{vmatrix} + a_{02} \cdot \begin{vmatrix} a_{01} & a_{11} \\ a_{02} & a_{12} \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -a_{01} \cdot \begin{vmatrix} a_{01} & a_{12} \\ a_{02} & a_{22} \end{vmatrix} + a_{02} \cdot \begin{vmatrix} a_{01} & a_{11} \\ a_{02} & a_{12} \end{vmatrix} \neq 0$$

Será al menos alguno de los determinates siguientes, distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} a_{01} & a_{12} \\ a_{02} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{01} & a_{11} \\ a_{02} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

☞ Una Cónica regular C con matriz coordenada A, es:

de tipo PARABÓLICO si $|A_{00}| = 0$, y

de tipo NO PARABÓLICO si $|A_{00}| \neq 0$.

Cónicas degeneradas.

Si C es una CÓNICA DEGENERADA, es decir |A| = 0.

Resolviendo el sistema **(5)**, se cumple:

a) **Si $|A_{00}| \neq 0$,** la cónica no tiene centro, ya que:

1) En el caso de que sea **$(a_{01}, a_{02}) = (0,0)$,** como $|A| = a_{00} . |A_{00}| = 0$, será $a_{00} = 0$. Y en este caso no existe centro de la Cónica.

2) En el caso de que sea **(a_{01} , a_{02}) ≠ (0,0),** por ser $|A_{00}| \neq 0$, el sistema **(5)**, admite solución única, que resolviendo el sistema **(5.2)**, vendrá dada por si Q, es el centro de C será:

$$Q = \left(\frac{\begin{vmatrix} -a_{01} & a_{12} \\ -a_{02} & a_{22} \end{vmatrix}}{|A_{00}|}, \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{01} \\ a_{12} & -a_{02} \end{vmatrix}}{|A_{00}|} \right) = (c_1, c_2)$$

Y sustituyendo en la ecuación (5.1) y teniendo en cuenta que $|A| = 0$, se obtiene:

$(1,c_1,c_2).(a_{\bullet 0}) =$

$$= \frac{1}{|A_{00}|} \cdot \left(a_{00} \cdot |A_{00}| - a_{01} \cdot \begin{vmatrix} a_{01} & a_{12} \\ a_{02} & a_{22} \end{vmatrix} + a_{02} \cdot \begin{vmatrix} a_{01} & a_{11} \\ a_{02} & a_{12} \end{vmatrix} \right) = \frac{|A|}{|A_{00}|} = 0$$

En contra de la hipótesis de que dicho producto sea no nulo, luego no existe centro de la Cónica C.

b) **Si $|A_{00}| = 0$,**

1) Si **(a_{01} , a_{02}) = (0,0)** **y** **$a_{00} = 0$**

entonces, no existe centro de la cónica C.

2) Si **(a_{01} , a_{02}) = (0,0)** **y** **$a_{00} \neq 0$**

entonces, el centro de la cónica C, será una recta, si ran A = 2, y el conjunto vacío si ran A = 1.

3) Si **(a_{01} , a_{02}) = (0,0)** **y** **ran $(a_{\bullet 1}, a_{\bullet 2})^t = 2$.**

El sistema **(5.2)** es incompatible, y por tanto no existe centro de la cónica

4) **Si (a_{01} , a_{02}) = (0,0)** **y** **ran $(a_{\bullet 1}, a_{\bullet 2})^t = 1$.**

El sistema **(5.2)** es compatible, y por tanto el centro de la cónica C, vendrá determinado por los puntos que son solución del sistema **(5.2)**.

5) Si **(a_{01} , a_{02}) = (0,0)** **y** **$a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$**

Entonces, El sistema **(5.2)** es incompatible, y por tanto no existe centro de la cónica C.

Clasificación métrica de las Cónicas.

Sea E el plano afín real, R y R' dos sistemas de referencia rectangulares de A. Dado que existe un ángulo α, y una matriz cuadrada de orden tres, con coeficientes reales:

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

tal que la expresión matricial del cambio de viene dado por:

$(1,x,y) = (1,x',y')\, M(\alpha)$.

Una cónica C, de ecuación de matriz coordenada A respecto del sistema de referencia R, vendrá expresada respecto del sistema de referencia R' por:

$$C \equiv (1,x,y)\cdot M(\alpha)\cdot A\cdot M^t(\alpha)\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = (1,x,y)\cdot B(\alpha)\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Además, se observa, que:

$$|B(\alpha)| = |M(\alpha)|.|A|.|M^t(\alpha)| = (\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)\,|A| = |A|$$

$$|B_{00}(\alpha)| = (\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)\,.\,|A_{00}| = |A_{00}|$$

$$b_{11} + b_{22} = (\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)\,.\,(a_{11} + a_{22}) = a_{11} + a_{22}$$

Luego, dado una cónica C, los escalares **$|A|$, $|A_{00}|$ y $(a_{11}+a_{22})$**, permanecen invariantes cuando se cambia de sistema de referencia rectangular en A. Y reciben el nombre de **INVARIANTES MÉTRICOS.** Por tanto, dada una cónica C, siempre se puede encontrar un sistema de referencia rectangular respecto de la cual la matriz B, que define la cónica C, sea de la forma:

$$B = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{01} & b_{11} & 0 \\ b_{02} & 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

Ya que:

$$b_{12} = -a_{11}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + a_{22}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) =$$

$$= (½)\,.\operatorname{sen}2\alpha\,(a_{22} - a_{11}) + a_{12}\cos 2\alpha.$$

Y siempre se puede tomar α tal que: $tg(2\cdot\alpha) = \dfrac{2\cdot a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$

Valor que hace nulo el elemento $b_{12} = 0$.

Supondremos en adelante α tal que $b_{12} = 0$.

- Si $|A_{00}| \neq 0$. Entonces el sistema:

  $(1,a,b) \cdot (a_{\bullet 1}, a_{\bullet 2})^t = (0, 0)$.

  Equivalente a:

  $a_{11} a + a_{12} b = - a_{01}$.

  $a_{12} a + a_{22} b = - a_{02}$.

  Tiene solución en a y b. Y teniendo en cuenta que:

  $b_{01} = - a_{01}. \mathrm{Cos}\, \alpha - a_{02} \mathrm{sen}\, \alpha = 0$.

  $b_{02} = - a_{01}. \mathrm{Cos}\, \alpha + a_{02} \mathrm{sen}\, \alpha = 0$.

  O equivalente a:

  $b_{01} = (a_{11} a + a_{12} b). \mathrm{Cos}\, \alpha + (a_{12} a + a_{22} b) \mathrm{sen}\, \alpha = 0$.

  $b_{02} = (a_{11} a + a_{12} b). \mathrm{Cos}\, \alpha - (a_{12} a + a_{22} b) \mathrm{sen}\, \alpha = 0$.

  Luego si la cónica es de tipo no parabólico, es decir $|A_{00}| \neq 0$, se puede encontrar una referencia rectangular del plano afín A, respecto del cual la matriz coordenada de la cónica C es de la forma:

$$B = \begin{pmatrix} b_{00} & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 \\ 0 & 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

  Y por tanto, respecto de dicho sistema:

  $C \equiv b_{00} + b_{11} x^2 + b_{22} y^2 = 0$.

  Donde los coeficientes b_{00}, b_{11} y b_{22}, son tales que:

  $b_{00} = a_{00}$.

  Y b_{11}, b_{22} son tales que cumple el sistema:

  $b_{11} \cdot b_{22} = |A_{00}|$.

  $b_{11} + b_{22} = a_{11} + a_{22}$.

  Es decir b_{11}, b_{22} son raíces de la ecuación:

  $x^2 - (a_{11} + a_{22}) x + A_{00} = 0$.

- Si $|A_{00}| = 0$. Teniendo en cuenta:

  $b_{00} = a_{00}$.

  $b_{01} = a_{01}. \mathrm{Cos}\, \alpha - a_{02} \mathrm{sen}\, \alpha$.

  $b_{02} = a_{01}. \mathrm{Cos}\, \alpha + a_{02} \mathrm{sen}\, \alpha$.

  $b_{11} = a_{11}. \mathrm{Cos}^2 \alpha + a_{22} \mathrm{sen}^2 \alpha - 2 a_{12} \mathrm{sen}\, \alpha \cos \alpha$.

  $b_{22} = a_{11}. \mathrm{sen}^2 \alpha + a_{22} \cos^2 \alpha - 2 a_{12} \mathrm{sen}\, \alpha \cos \alpha$.

Que efectuando en A la transformación:

$$(1 , x' , y') = (1 , x'' , y'') . D.$$

Siendo:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La nueva expresión de la cónica C es:

$$C \equiv (1 , x'' , y'') . D. B . D^{t} . (1 , x'' , y'')^{t} =$$

$$= (1 , x'' , y'') . E . (1 , x'' , y'')^{t} = 0.$$

Donde:

$$e_{00} = b_{00} + 2\, a\, a_{01} + 2\, b\, a_{02} + a^{2} a_{11} + b^{2} a_{22} .$$

$$e_{01} = b_{01} + a\, a_{11} .$$

$$e_{02} = b_{00} + b\, a_{22} .$$

Además:

$$e_{11} = b_{11} ; \qquad e_{22} = b_{22} .$$

Y según el valor de los coeficientes de B, queda:

1. Si $b_{11} = 0$, $b_{01} \neq 0$, $b_{22} \neq 0$.

   $$\mathbf{C \equiv 2\, e_{01}\, x + e_{22}\, y^{2} = 0;}$$

   Donde e_{01} y e_{22} son tales que:

   $$- e^{2}_{01} . e_{22} = | A |.$$

   $$e_{01} = \pm \sqrt{\frac{|A|}{a_{11} + a_{22}}}$$

2. Si $b_{11} = 0$, $b_{01} \neq 0$, $b_{22} = 0$.

   $$\mathbf{C \equiv e_{00} + e_{22}\, y^{2} = 0;}$$

   Donde e_{00} y e_{22} son tales que:

   $$e_{22} = a_{11} + a_{22} .$$

   $$e_{00} = \frac{|A_{11}| + |A_{22}|}{e_{22}}$$

3. Si $b_{11} = 0 = b_{22}$.

   $$\mathbf{C \equiv e_{01}\, x + e_{02}\, y^{2} = 0;}$$

Denominadas ecuaciones reducidas de las cónicas correspondientes.

Rectas tangentes a las Cónicas y haz de Cónicas.

Recta tangente a C, que pase por un punto H = (a,b):

* **Si H $\in$ C $\Rightarrow$ r $\equiv$ (1,a,b).A.(1,x,y) ^{t} = 0.**

* **Si H $\notin$ C $\Rightarrow$ r $\equiv$ (1,a,b).A.(1,x,y) ^{t} - [(1,a,b).A.(1,a,b) ^{t}] . [(1,x,y).A.(1,x,y) ^{t}] = 0.**

Si C y C ' son dos cónicas de matrices coordenadas A y A', se denomina **HAZ DE CÓNICAS** generadas por C y C ' a los puntos de A, que verifican la ecuación:

$$(1, x, y) . (\alpha . A + \alpha' . A') . (1, x, y)^t = 0. \quad \alpha, \alpha' \in R; \quad (\alpha, \alpha') \neq (0,0).$$

Los puntos básicos del haz de cónicas, pertenecen a las dos cónicas (y por tanto a todas las del haz).

Si P y P ' son puntos conjugados respecto de las cónicas C y C ', entonces son conjugadas respecto de cualquier otra cónica del haz generado por C y C '.

Clasificación afín de las Cónicas.

Un estudio particular de las cónicas nos conduce a la CLASIFICACIÓN AFÍN de las cónicas:

$\lvert A_{00}\rvert > 0$	$\lvert A\rvert$.(traza A_{00}) < 0	$\Rightarrow$	ELIPSE REAL. *("circunferencia si a_{12} = 0").*
	$\lvert A\rvert$.(traza A_{00}) = 0	$\Rightarrow$	RECTAS IMAGINARIAS.
	$\lvert A\rvert$.(traza A_{00}) > 0	$\Rightarrow$	ELIPSE IMAGINARIA *("circunferencia si a_{12} = 0").*
$\lvert A_{00}\rvert = 0$	$\lvert A\rvert \neq 0$	$\Rightarrow$	PARÁBOLA.
	$\lvert A\rvert = 0$	$\Rightarrow$	RECTAS , reales distintas, imaginarias conjugadas o coincidentes
$\lvert A_{00}\rvert < 0$	$\lvert A\rvert \neq 0$	$\Rightarrow$	HIPÉRBOLA *(" equilátera si $a_{11} + a_{22} = 0$")*
	$\lvert A\rvert = 0$	$\Rightarrow$	RECTAS DISTINTAS. *En caso de rectas, si $a_{11} = - a_{22} \neq 0$, se cumple que son perpendiculares.*

Centro, diámetros y ejes de las Cónicas.

Si la cónica tiene centro en un punto (x_0 , y_0) se verifica:

$$\frac{\partial f(x,y)_{(x_0,y_0)}}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)_{(x_0,y_0)}}{\partial y} = 0$$

Si las rectas r y r ' viene dadas por las ecuaciones:

r $\equiv$ u x + v y + 1 = 0. *(" de pendiente m = u/v ").*

r ' $\equiv$ u ' x + v ' y + 1 = 0. *(" de pendiente m' = u'/v' ").*

Si A es la matriz coordenada de la cónica C, y Adj A es la matriz adjunta de A *("cuyos coeficientes son las matrices adjuntas de A")*, entonces:

r es tangente a C si	**(1,u,v) . Adj A . (1,u,v) ^{t} = 0.**
r y r ' son conjugadas a C si	**(1,u,v) . Adj A . (1,u ' ,v ') ^{t} = 0.**

Si la cónica C tiene centro, los **DIÁMETROS** de dicha cónica, vendrán dadas por las rectas que pasan por el centro y cuyas pendientes m y m' se resuelven mediante la ecuación:

$$\mathbf{(1,m).\ A_{00}\ .\ (1,m')^{t} = 0.}$$

Los **EJES** de la cónica, vendrán dados por las rectas que pasan por el centro y cuyas pendientes m y m' se resuelven mediante la ecuación:

$$\mathbf{(1,m)\ .\ A_{00}\ .\ (-m'\ ,\ 1)^{t} = 0.}$$

Los **VÉRTICES** de la cónica serán los puntos de intersección de los diámetros con la cónica.

Ejemplo

Sea la Cónica

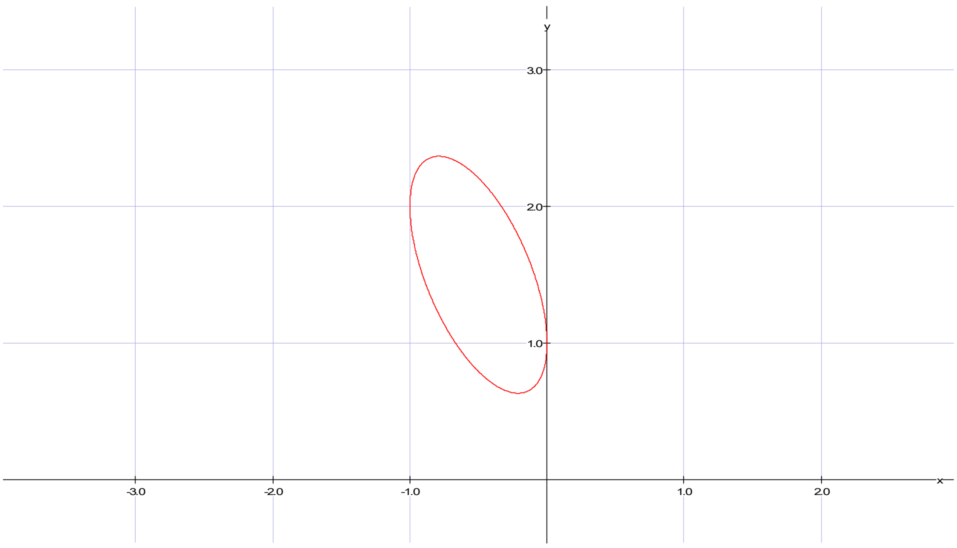
$$f(x, y) := [[1, x, y]] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = 3 \cdot x^{2} + 2 \cdot x \cdot y + y^{2} - 2 \cdot y + 1 = 0$$

Como:

$DET\ (A_{00}) = 2 > 0;$

$(DET\ A)\ .\ Traza\ A_{00} = (-1).(3+1) = -4 < 0$

La cónica es una ELIPSE



Además, teniendo en cuenta que la ELIPSE tiene CENTRO, su centro se obtiene resolviendo las ecuaciones:

$$\frac{d}{dx}(3\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot y + y^2 - 2\cdot y + 1) = 6\cdot x + 2\cdot y = 0$$

$$\frac{d}{dy}(3\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot y + y^2 - 2\cdot y + 1) = 2\cdot x + 2\cdot y - 2 = 0$$

Que se obtiene el punto O = (- ½ , 3/2).

Y los diámetros de la elipse son las rectas que pasan por O, y tiene de pendientes m y m', que se obtiene teniendo en cuenta que m.m' = -1, y resolviendo las ecuaciones

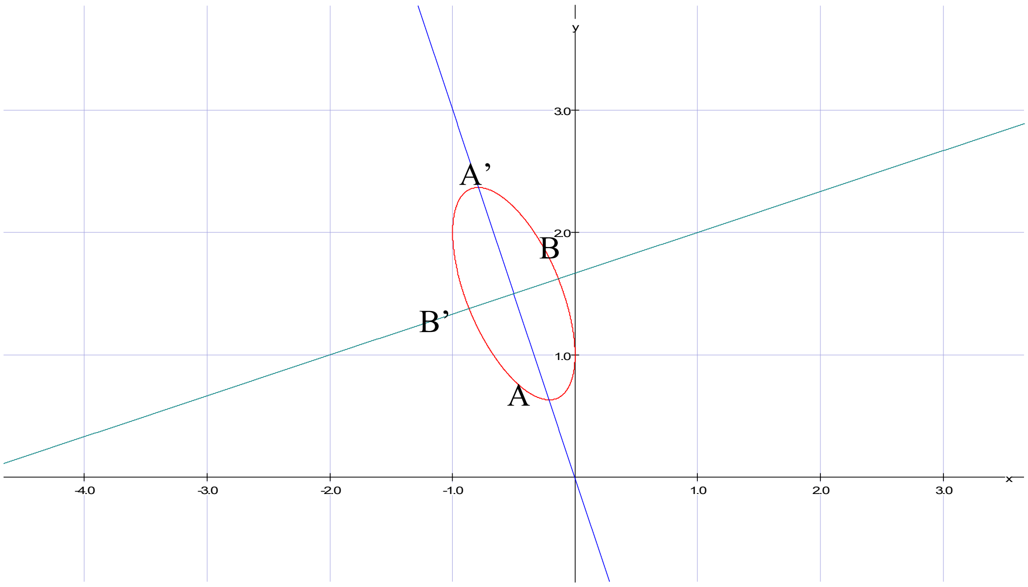
$$[1,\ m]\cdot\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ m' \end{bmatrix} = 0$$

Obteniendo las rectas (DIÁMETROS)

$$y := -3\cdot x$$

$$y := \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ A' \\ B \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2113248654 & 0.6339745962 \\ -0.7886751345 & 2.366025403 \\ -0.1361965624 & 1.621267812 \\ -0.8638034375 & 1.378732187 \end{bmatrix}$$



Para hallar los vértices de la ELIPSE, basta con que resolvamos los sistemas:

1) $$\begin{aligned} 3\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot y + y^2 - 2\cdot y + 1 = 0 \\ y = -3\cdot x \end{aligned}$$

2)

$$3 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 - 2 \cdot y + 1 = 0$$

$$y := \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$$

Cuyas soluciones son los puntos A, A’, B, B’, cuyas coordenadas son:

$$\begin{bmatrix} A \\ A' \\ B \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \\ \frac{3 \cdot \sqrt{17}}{34} - \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{17}}{34} + \frac{3}{2} \\ -\frac{3 \cdot \sqrt{17}}{34} - \frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{34} \end{bmatrix}$$

✓ LAS CÓNICAS COMO LUGARES GEOMÉTRICOS.

Si consideramos el plano afín euclídeo, dado un punto f (denominado FOCO), una recta D (denominada DIRECTRIZ) y un número real e (denominado EXCENTRICIDAD). Denominamos CÓNICA C al conjunto de puntos del plano A cuya distancia al foco es igual al producto de e por su distancia a la directriz. Es decir:

$$C = \{ p \in A : d(p,f) = e \cdot d(p,D) \}.$$

Teniendo en cuenta que hay varios tipos de cónicas, según el valor de su excentricidad, podemos clasificar:

si $e < 1$	si $e = 1$	si $e > 1$
ELIPSE	**PARÁBOLA**	**HIPÉRBOLA**

Como resumen, en el caso de las ecuaciones reducidas de las cónicas, los correspondientes focos, directrices y excentricidades vienen dadas por:

CÓNICAS	FOCOS	DIRECTRICES	EXCENTRICIDADES
Elipse ≡ d (P,F) + d(P,F') = 2.a			
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$(\pm c,0)$ $(0,\pm c)$	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$e=\frac{c}{a}<1; \quad a^2=b^2+c^2$
Parábola ≡ d (P,F) = d(P,D).			
$y^2=2\cdot p\cdot x$ $x^2=2\cdot p\cdot y$	$\left(\frac{p}{2},0\right)$ $\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$x=-\frac{p}{2}$	$e=1$
Hipérbola ≡ | d (P,F) + d(P,F') | = 2.a			
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$(\pm c,0)$ $(0,\pm c)$	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$e=\frac{c}{a}<1; \quad a^2+b^2=c^2$

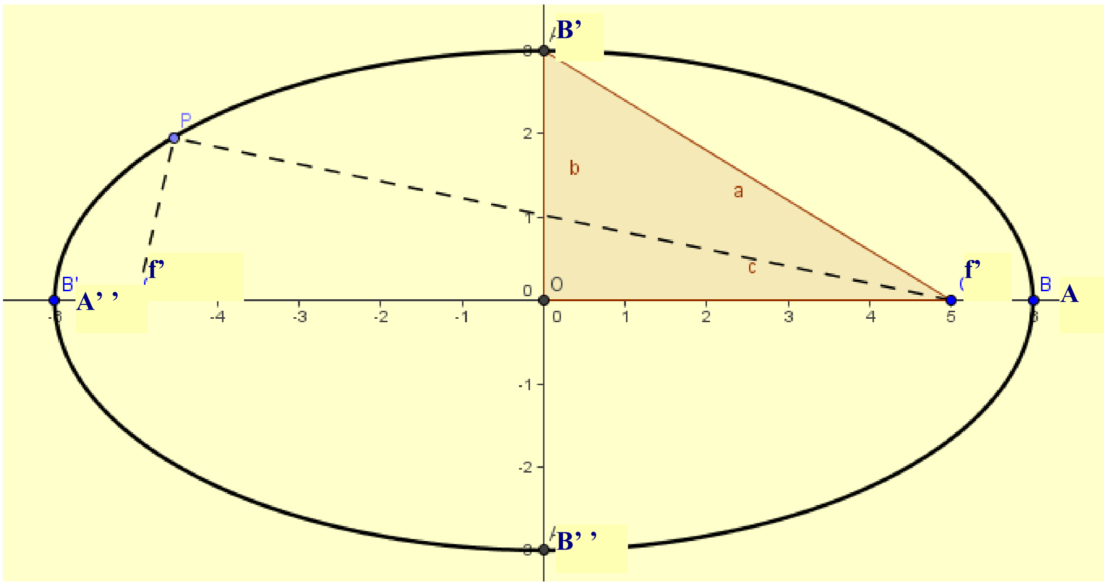
Como ejemplo de cónicas, estudiaremos los casos particulares de la parábola, la elipse y la hipérbola en sus formas canónicas *(tomando un sistema de referencia adecuado).*

ELIPSES.

En el plano afín real E, se llama ELIPSE a la CÓNICA que tiene por focos los puntos f(*C*) y f'(*C'*) (*situados a una distancia dist(f,f') = 2.c*), y cuya constante es 2a ∈ R (*siendo a>c*), al lugar geométrico de los puntos P(x,y) de E, tales que

$$\text{dist}(P,f) + \text{dist}(P,f') = 2.a$$

Se denominan EJES de la elipse (*por ser sus ejes de simetría ortogonales*), a la recta que pasa por f y f' (*de segmento mayor*) y a su mediatriz (*de segmento menor*).



El punto de intersección de los ejes de la elipse, es su CENTRO, y los puntos de intersección con la elipse se denomina vértices (*A y A' para el eje mayor, B y B' para el eje menor*).

De la definición se desprende que la ELIPSE es simétrica respecto de los segmentos AA' y BB'. De donde se deduce:

dist(A,f) + dist(A,f ') = dist(A',f) + dist(A',f ') = 2.a (por definición) =

= dist(O,A) + dist(O,A') = 2. dist(O,A)

⇒ **dist(O,A) = dist(O,A') = a**.

Y como los puntos B y B', son simétricas respecto de los focos f y f':

dist(B,f) = dist(B,f ') = dist(B',f) = dist(B',f ') = a

Denominando:

dist(O,B) = dist(O,B ') = b.

Y teniendo en cuenta que

dist(O,f) = dist(O,f') = c.

será:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Entonces, tomando el caso particular, de que los ejes mayores y menores de la elipse sean respectivamente el eje X e Y, de un sistema de referencia cartesiano.

Los focos **f y f ' tendrán de coordenadas (c,0) y (-c,0)** respectivamente. Y para cada punto P de la elipse, la condición:

d (P,f) + d (P,f ') = 2.a.

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2\cdot a$$

Y elevando, ambas expresiones al cuadrado, se obtiene:

$$(x-c)^2+y^2+(x+c)^2+y^2+2\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4\cdot a^2$$

$$\Rightarrow \qquad x^2+y^2+c^2+\sqrt{\left(x^2+y^2+c^2\right)^2-4\cdot x^2\cdot c^2}=2\cdot a^2$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{\left(x^2+y^2+c^2\right)^2-4\cdot x^2\cdot c^2}=2\cdot a^2-\left(x^2+y^2+c^2\right)$$

Y elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando se obtiene:

$$\Rightarrow \qquad -x^2\cdot c^2=a^4-a^2\cdot\left(x^2+y^2+c^2\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \left(a^2-c^2\right)\cdot x^2+a^2\cdot y^2=a^2\cdot\left(a^2-c^2\right)$$

Y dividiendo ambos miembros por $a^2\cdot\left(a^2-c^2\right)$, y teniendo en cuenta que $b^2=a^2-c^2$ b ², se obtiene la **ECUACIÓN REDUCIDA DE LA ELIPSE**:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Razonado análogamente, si tomamos el caso particular, de que los ejes mayores y menores de la elipse sean respectivamente el eje Y y X, dicha ecuación queda:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

La **excentricidad e**, viene determinada por el cociente, **c/a** que como es de esperar es menor que 1, y geométricamente indica el grado de achatamiento de la elipse.

La ELIPSE es una curva acotada simétrica respecto de los ejes de simetría, pues si consideramos por ejemplo la elipse

$$C=\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad \text{Si } (x,y)\in C \Rightarrow (-x,y),\ (x,-y)\in C.$$

El centro de la elipse es el punto de intersección de los ejes de simetría, cuyos puntos de corte con los ejes son:

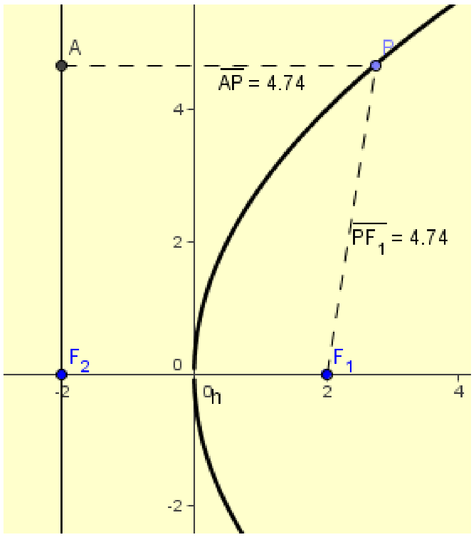
(a,0), (-a,0), (0,b), (0,-b) ó (0,a), (0,-a), (b,0), (-b,0)

Si desplazamos el centro de la Elipse al punto O = (p,q), la ecuación de la Elipse puede ponerse en alguna de las formas siguientes:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1 \qquad\qquad \frac{(x-p)^2}{b^2}+\frac{(y-q)^2}{a^2}=1$$

Parábolas.

En el plano afín real E, se llama PARÁBOLA a la CÓNICA que tiene por foco al punto f(F_1) y por directriz a la recta D(F_2A) (*situada a una distancia p > 0 del foco*), al lugar geométrico de los puntos P(x,y) de E que equidistan de f y de D.



Debido a que los puntos P de la PARÁBOLA, equidistan de f y D, su **excentricidad e = 1**.

Se denomina **eje de simetría** (ortogonal) a la perpendicular a D, que pasa por f. Y se denomina, **vértice (o)** a la intersección del eje de simetría con la parábola.

Además, se cumple: **dist(o,f) = dist(o,D) =** $\frac{p}{2}$.

Por tanto, las coordenadas de f vendrán dadas por f = (p/2,0) y la ecuación de la directriz será D: **x = -** $\frac{p}{2}$.

La distancia de un punto P(x,y) a la recta D, vendrá dada por:

$$dist(P,D) = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

Y como P será un punto de la parábola si:

$$\text{dist(P,f)} = \text{dist(P,D)} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{\left(\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2\right)} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

Elevando ambas expresiones al cuadrado y simplificando se obtiene:

$$y^2 = 2.p.x$$

Razonado, análogamente, si tomamos como eje de simetría el eje y, dicha ecuación queda:

$$x^2 = 2.p.y$$

Hay que observar que la parábola carece de centro, no está acotada, y carece de asíntotas. Además, es simétrica respecto del eje de simetría, y tiene dos ramas infinitas, pues si consideramos por ejemplo la parábola C de ecuación:

$y^2 = 2.p.x$, si $(x,y) \in C \Rightarrow (x,-y) \in C$.

si $x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$.

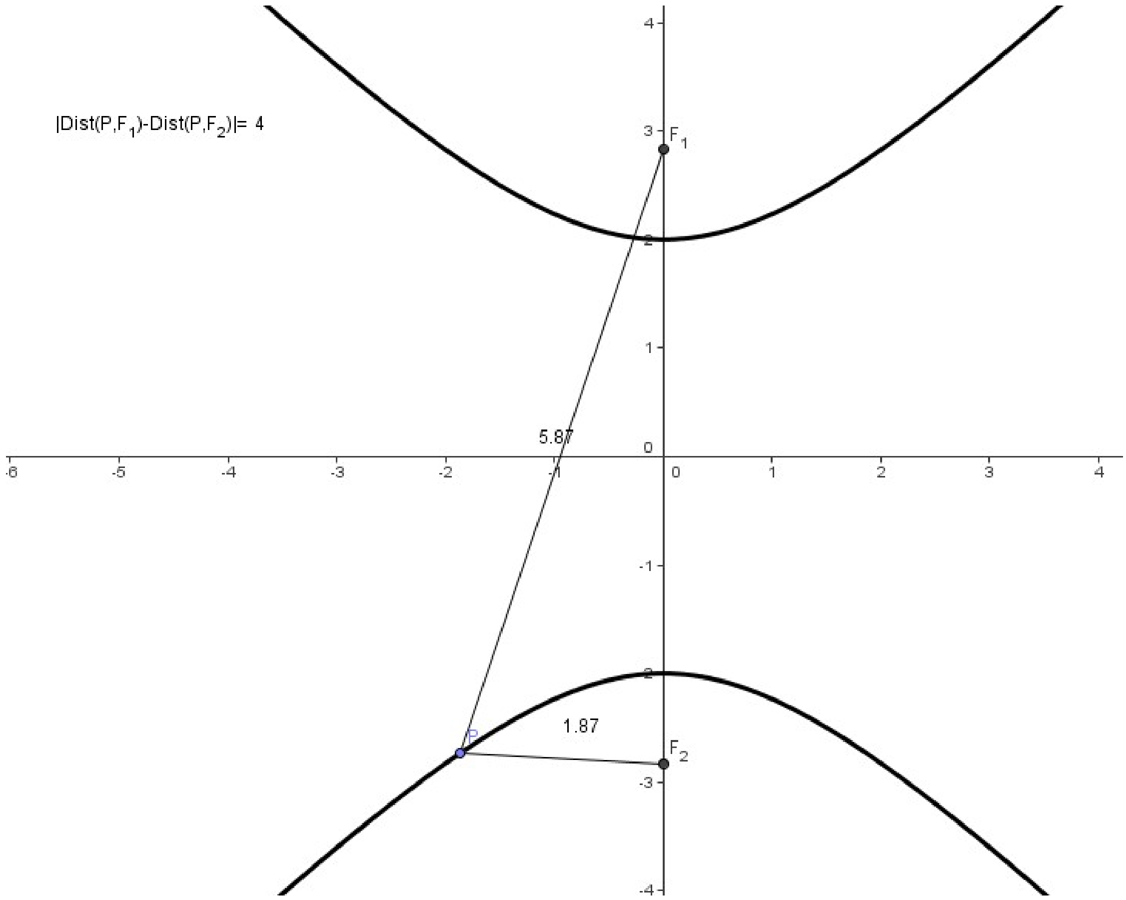
Si desplazamos el centro de la Parábola al punto O = (p,q), la ecuación de la Parábola puede ponerse en alguna de las formas siguientes:

$$(y\text{-}b)^2 = 2.p.(x\text{-}a) \qquad \text{ó} \qquad (x\text{-}a)^2 = 2.p.(y\text{-}b).$$

Hipérbolas.

En el plano afín real E, se llama HIPÉRBOLA a la CÓNICA que tiene por focos al los puntos f y f' (*situados a una distancia d (f,f') = 2c*), y cuya constante es 2a ∈ R (*siendo 0 < a < c*), al lugar geométrico de los puntos P = (x,y) de A, tales que

| d (P,f) - d (P,f') | = 2a.



Se denominan EJES de la hipérbola (*por ser sus ejes de simetría ortogonales*), a la recta que pasa por f y f' (*eje focal o real*) y a su mediatriz (*eje secundario o imaginario*). El punto de intersección O de los ejes de la hipérbola es su centro de simetría.

El eje real corta a la hipérbola en dos puntos, A y A' llamados vértices reales; y se verifica que

d (O,A) = d (O,A') = a.

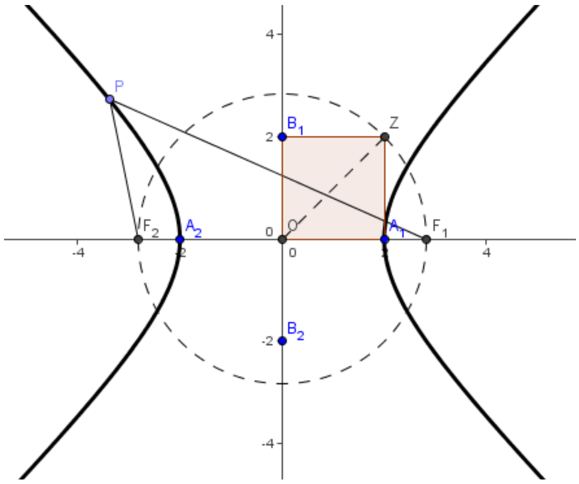
De la definición se desprende que la hipérbola es simétrica respecto de sus dos ejes de simetría. Y se deduce:

d (A,f ’) - d (A,f) =

= d (A,A’) + d(A’,f ’) – d (A,f) =

= 2.a (por definición) =

= d (O,A) + d (O,A’) = 2.d(O,A).



Tomando el caso particular, de que el eje de simetría real sea el je X y el vértice el origen de coordenadas. Teniendo en cuenta, que eje imaginario equidistan de f y f ’, las coordenadas de los focos son (c,0) y (-c,0) respectivamente.

Los puntos (0,± b), se denominan extremos imaginarios, y son tales que, su distancia (b) al punto O cumple:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Donde

a = d (A,O) = d (A’,O) y c = d (f,O) = d(f ’O).

Luego, un punto P(x,y) pertenece a la hipérbola, si cumple:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2 \cdot a$$

Y elevando, ambas expresiones al cuadrado, se obtiene:

$$(x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 - 2 \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4 \cdot a^2$$

$$\Rightarrow \qquad x^2 + y^2 + c^2 - \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4 \cdot x^2 \cdot c^2} = 2 \cdot a^2$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4 \cdot x^2 \cdot c^2} = (x^2 + y^2 + c^2) - 2 \cdot a^2$$

Y elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando se obtiene:

$$\Rightarrow \qquad x^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot (x^2 + y^2 + c^2) - a^4$$

$$\Rightarrow \qquad (c^2 - a^2) \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot (c^2 - a^2)$$

Dividiendo ambos miembros por a^2 $(c^2 - a^2)$, y dado que $b^2 = (c^2 - a^2)$, se obtiene la **ecuación reducida de la hipérbola**:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Razonado análogamente, si tomamos el caso particular, de que el eje de simetría real sea el eje Y, dicha ecuación queda la **ecuación reducida de la hipérbola** (*de la hipérbola conjugada*):

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

La excentricidad e, viene determinada por **c/a** que como es de esperar es mayor que 1, y geométricamente indica el grado de achatamiento de la hipérbola.

Hay que observar, que es simétrica respecto de los ejes de simetría.

Pues si consideramos por ejemplo la hipérbola.

$$C \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad \text{Si } (x,y) \in C \quad \Rightarrow \qquad (-x,y),\ (x,-y) \in C.$$

Además es una curva no acotada con dos ramas infinitas, y sus puntos de corte con el eje real son los vértices A y A'.

Dada la hipérbola de ecuaciones reducidas:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Simplificando, se obtiene:

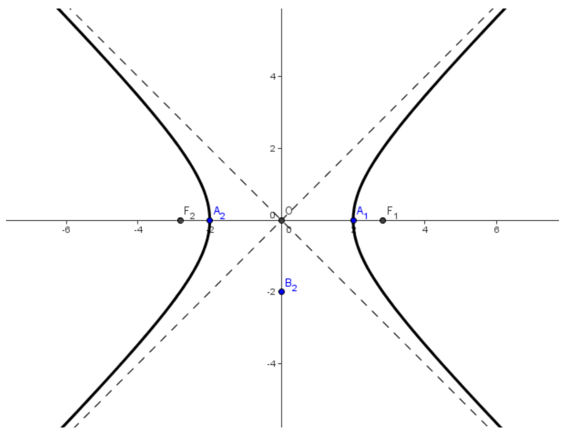
$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 - \frac{b^2}{b^2} \cdot a^2} = \pm\left(\frac{b}{a}\right) \cdot x \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Que cuando $x \to \pm\infty$.

Se cumple:

$$y = \pm\left(\frac{b}{a}\right) \cdot x$$

Que son sus asíntotas (en el caso particular de que a = b, se denomina hipérbola equilátera).



- **Observaciones.**

En el caso de la elipse y de la hipérbola en forma reducida, la directriz D viene determinada por la rectas

$$x = \pm\frac{a^2}{c}$$

Pues, basta tomar, por ejemplo los puntos B y B' (d*el eje menor de la elipse o del eje imaginario de la hipérbola*), y teniendo en cuenta:

$$d(B,f) = d(B',f) = a$$

$$d(B,f) \;\; = e \cdot d(B,D) = \frac{c}{a} \cdot d(B;D)$$

$$d(B',f) = \frac{c}{a} \cdot d(B',D)$$

Se obtiene que:

$$d(B,D) \;\; = d(B',D) = \frac{a^2}{c}$$

✓ LAS CÓNICAS COMO CURVAS PARMÉTRICAS.

En muchas ocasiones se suelen utilizar las ecuaciones paramétricas para representar las cónicas, para el estudio de sus propiedades.

Las ecuaciones paramétricas de la elipse reducida son:

$x = a \cos t.$ $y = b \operatorname{sen} t,$ $t \in [0,2\pi).$

En el caso de ser a = b, se trata de una circunferencia y los focos f y f ' coinciden con el centro de la circunferencia.

Las ecuaciones paramétricas de la hipérbola reducida son:

$x = a \cosh t.$ $y = b \operatorname{senh} t,$ $t \in R.$

Las ecuaciones paramétricas de la parábola reducida son:

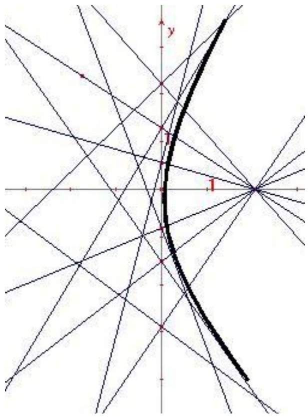
$x = t^2 .$ $y = 2 p t,$ $t \in R.$

✓ LAS CÓNICAS COMO EVOLVENTES.

Esta forma de introducir las curvas, nos permite efectuar las derivadas de primer y segundo orden, de x e y respecto del parámetro t, de forma que podemos estudiar el comportamiento de la curva, así como representarla el plano afín euclideo.

A partir de ciertas familias de rectas, se genera como envolventes las curvas CÓNICAS en el plano.

PARÁBOLA:



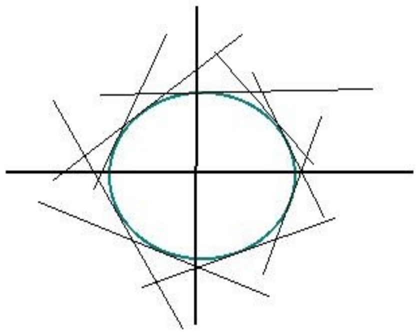
Sean dos rectas perpendiculares e y h (*podemos considerar e = OX y h =OY*) si:

Si F $\in$ h -{ h $\cap$ e } (*foco de la parábola)*

Para cada P $\in$ e -{ h $\cap$ e }.

Si consideramos las rectas $\perp$ a [F,P] que pasan por P, generan como envolvente la PARÁBOLA de foco F.

CIRCUNFERENCIA:



Sean dos rectas perpendiculares e y h (*podemos considerar e = OX y h =OY*) si:

O $\in$ h -{ h $\cap$ e } (*centro de la circunferencia)*

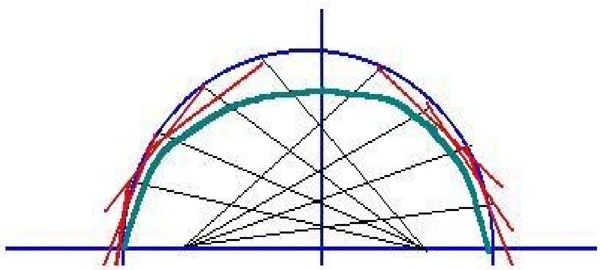
Las rectas que distan R unidades de O generan como envolvente la CIRCUNFERENCIA de radio R.

ELIPSE:

Sean dos rectas perpendiculares e y h (*podemos considerar e = OX y h =OY*) si:

Si F, F' $\in$ h -{ h $\cap$ e }; $\overline{O}$F = - $\overline{O}$F'

(*focos de la elipse)*



Para cada P $\in$ C(h $\cap$ e , r), donde:

h $\cap$ e = O

C(p,q) es la circunferencia de centro p y radio q

2.r $\geq$ d(F,F')

Las rectas perpendiculares a [F,P] y a [F',P], que pasan por P, generan como envolvente la ELIPSE de focos F y F '.

HIPÉRBOLA:

Sean dos rectas perpendiculares e y h (*podemos considerar e = OX y h =OY*) si:

Si F, F' $\in$ h -{ h $\cap$ e }; $\overline{O}F = - \overline{O}F'$

(*focos de la elipse)*

Para cada P $\in$ C(h $\cap$ e , r), donde:

h $\cap$ e = O

C(p,q) es la circunferencia de centro p y radio q

2.r $\leq$ d(F,F')

Las rectas perpendiculares a [F,P] y a [F',P], que pasan por P, generan como envolvente la HIPÉRBOLA de focos F y F '.